

# FEYNMANOVY

## PŘEDNÁŠKY Z FYZIKY

s řešenými příklady

1/3

FEYNMAN • LEIGHTON • SANDS

FRAGMENT



# FEYNMANOVY PŘEDNÁŠKY Z FYZIKY

FRAG  
MENT  
PRAHA 2000

**Richard P. Feynman  
Robert B. Leighton  
Matthew Sands**

**FEYNMANOVY  
přednášky z fyziky  
s řešenými příklady**

Obálka a grafická úptava: Marek Jodas  
Odborná korektura: Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc.  
Řešení příkladů a cvičení: Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc.  
Vydalo nakladatelství FRAGMENT,  
Humpolecká 1503, Havlíčkův Brod  
jako svou 465. publikaci  
Vytiskly tiskárny CENTA  
1. vydání, 2000

Copyright © California Institute of Technology, USA, 1963  
© nakladatelství FRAGMENT, 2000  
© Marek Jodas, 2000  
© Ivan Štoll, 2000

Published by arrangement with Addison Wesley Longman, Inc.

All rights reserved. This book, or parts thereof may not be reproduced in any form without written permission of the copyright holder.

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této knihy nesmí být reprodukována a rozšiřována žádnou formou bez písemného souhlasu majitelů práv.

ISBN 80-7200-405-0 (česká verze, 1. vydání, 2000)  
ISBN 0-201-02116-1-P (anglická verze, 6. vydání, 1977)

# FEYNMANOVY

**PŘEDNÁŠKY  
Z FYZIKY**

s řešenými příklady

**1/3**

**FEYNMAN • LEIGHTON • SANDS**

FRAG  
MENT



## Feynmanova předmluva

Dostáváte do rukou kurz fyziky, který jsem přednášel v minulém a předminulém roce posluchačům prvního a druhého ročníku na Kalifornském technickém institutu (Caltech). Přednášky zde samozřejmě nejsou uvedeny doslovně – místy byly více nebo méně upraveny a představují pouze část celkového kurzu. Skupina 180 studentů se dvakrát týdně shromažďovala ve velké posluchárně, aby si poslechla tyto přednášky a pak rozděleni do skupin po 15 až 20 studentech mívali semináře pod vedením asistentů. Navíc, jednou týdně probíhalo laboratorní cvičení.

Těmito přednáškami jsme chtěli upevnit zájem nadšených nadaných studentů, kteří přicházeli ze středních škol a už mnoho slyšeli o zajímavé a vzrušující fyzice – teorii relativity, kvantové mechanice a dalších moderních oblastech. Po dvou letech předchozího kurzu by mnozí z nich byli velmi znechuceni, neboť kurz obsahoval jen velmi málo velkolepých, nových, moderních myšlenek. Učili by se o nakloněné rovině, elektrostatice a podobných věcech, a kdyby to trvalo dva roky, fyzika by se ocitla v nepříliš příznivém světle. Šlo o to, dokážeme-li sestavit kurz, který by neodradil ani nejschopnější a nejvíce nadšené studenty, ale naopak upevnil jejich zájem.

Tyto přednášky nejsou ani v nejmenším míněny jako přehledný kurz a je třeba je brát velmi vážně. Adresoval jsem je těm nejschopnějším v ročníku a jak to jen bylo možné, snažil jsem se, aby i těm nejvíce chápavým studentům zůstalo něco, na čem je třeba dále pracovat. Záměrně jsem mluvil o aplikování myšlenek a pojmů i v oblastech ležících mimo hlavní téma výkladu. Přitom jsem se však stále velmi snažil o co největší přesnost, o soustavné poukazování na to, jak rovnice a myšlenky zapadají do schématu fyziky a jak se situace změní, až se studenti naučí více.

Zdálo se mi důležité naznačit studentům i to, co mohou – budou-li dost šikovni – sami odvodit z již poznaného a co je zcela nové. Při formulování nových myšlenek jsem se snažil, když to bylo možné, je odvodit, anebo vysvětlit, že jde o novou myšlenku, u níž se nelze opřít o již známé věci a kterou proto není možné považovat za dokazatelnou – je prostě přidaná.

Na začátku přednášek jsem předpokládal, že studenti se již některé věci naučili na střední škole – geometrickou optiku, jednoduché představy z chemie apod. Nepovažoval jsem za rozumné dodržovat při přednášení přísný řád v tom smyslu, že bych se nemohl zmínit o problémech, o kterých budeme podrobněji hovořit až později. Často jsem se o takových věcech zmiňoval bez podrobnější diskuze, k níž jsem se dostával, až když na ni byli posluchači lépe připraveni. Příkladem jsou diskuze o indukčnosti a o energetických hladinách, které měly zpočátku pouze kvalitativní charakter, později se však rozvinuly v plně šří.

Ačkoli jsem se v přednáškách zaměřoval na aktivnější studenty, chtěl jsem se věnovat i těm, které proud myšlenek a množství aplikací pouze znepokojují a u nichž je možné předpokládat, že nezvládnou většinu přednášené látky. Chtěl jsem, aby se pro ně v přednáškách našlo alespoň jakési jádro látky, které jsou schopni zvládnout a doufal jsem, že i když všemu z přednášky neporozumí, nebudou podrážděni. Nevyžadoval jsem od nich, aby všechno chápali. Stačilo mi, když pochopili základní rysy. Samozřejmě, že i to si vyžadovalo určitou inteligenci, aby rozeznali, které věty a myšlenky jsou nejdůležitější a co jsou pouze složitější vedlejší důsledky a aplikace, které pochopí později.

Při přednášení jsem se setkal s jedním vážným problémem: způsob, jakým se kurz uskutečnil, nezabezpečoval zpětnou vazbu od studentů k přednášejícímu, která by ukazovala, do jaké míry je kurz úspěšný. Je to opravdu velmi vážný problém a tak vlastně ani nevím, jestli byl kurz skutečně dobrý. Byl to v podstatě experiment, a kdybych ho měl opakovat, dělal bych to jinak. Doufám však, že ho nebude třeba opakovat! Mám ale dojem, že kurz se v prvním roce celkem osvědčil, alespoň pokud jde o fyziku.

S druhým rokem už jsem nebyl tak spokojený. Pro první část kurzu, která pojednává o elektřině a magnetizmu, jsem si nenašel skutečně neobvyklý, nový způsob přednášení – takový, který by byl o mnoho poutavější než starý. Mám dojem, že v přednáškách o elektřině a magnetizmu jsem

toho mnoho neudělal. Na konci druhého roku jsem měl původně v úmyslu pokračovat po elektřině a magnetizmu dalšími přednáškami o vlastnostech materiálů, ale zabývat se zejména takovými problémy, jako jsou normální kmity, kmitající soustavy, řešení rovnice difúze, ortogonální funkce, tj. vysvětlit základy toho, co obvykle nazýváme „metodami matematické fyziky“. Když se nad tím nyní zamýšlím, docházím k přesvědčení, že při opakovaném přednášení kurzu bych se vrátil k této původní myšlence. Nic takového se však nepředpokládalo, proto vznikl návrh zařadit do kurzu úvod do kvantové mechaniky, se kterým se setkáte ve třetím dílu kurzu.

Je zcela jasné, že studenti, kteří se chtějí specializovat na fyziku, mohou s kvantovou mechanikou počkat až do třetího ročníku. Byl jsem však upozorněn, že mnozí posluchači tohoto kurzu studují fyziku pouze jako podklad pro jejich práci v jiných oblastech. Obvyklý způsob výuky kvantové mechaniky ji dělá pro většinu studentů téměř nedostupnou, neboť nemají možnost ji studovat tak dlouho. V jejich skutečných aplikacích – zejména v těch komplexnějších, které souvisí s elektrotechnikou a chemií – se ale nepoužívá celý aparát diferenciálních rovnic. Proto jsem se pokusil popsat principy kvantové mechaniky takovým způsobem, který by nevyžadoval předchozí znalost parciálních diferenciálních rovnic. Mám dojem, že takovýto obrácený postup může být zajímavý i pro fyzika z důvodů, které budou zjevně ze samotných přednášek. Myslím si však, že experiment s kvantovou mechanikou nebyl zcela úspěšný – do značné míry proto, že jsem se v závěru octl v časové tísní (chyběly mi například tři až čtyři přednášky na úplnější pojednání o takových věcech, jako jsou energetické pásy a prostorová závislost amplitud). Protože jsem o tomto předmětu takovýmto způsobem nikdy předtím nepřednášel, projevil se zvlášť výrazně nedostatek zpětné vazby. Teď zastávám názor, že kvantovou mechaniku je třeba přednášet později. Snad budu mít jednou možnost to tak udělat. Pak to udělám dobře.

Skutečnost, že kromě přednášek probíhaly i semináře, ovlivnila strukturu této knihy do té míry, že se v ní nevěnuji řešení úloh. V prvním roce jsem sice ve třech přednáškách úlohy řešil, ale nezařadil jsem je do tohoto kurzu. Přednášel jsem i o inerciální navigaci, která má své místo za přednáškou o rotujících systémech, ale v knize je tato přednáška, bohužel, vynechána. Pátou a šestou přednášku připravil Matthew Sands, který mě zastoupil, v době mé nepřítomnosti.

Zůstává zodpovědět otázku, do jaké míry byl náš experiment úspěšný. Můj vlastní názor – který však nezastává většina mých spolupracovníků – je pesimistický. Nezdá se mi, že jsem studenty vedl příliš dobře. Když uvážím, jak většina z nich řešila úlohy na zkouškách, docházím k přesvědčení, že můj systém selhal. Jenže má přátelé poukazují na to, že skupina asi 10 až 20 studentů – a to je překvapující – rozuměla téměř všemu v celém kurzu, aktivně pracovala s látkou a s velkým vzrušením a zájmem zápasila s mnohými problémy. Jsem přesvědčen, že tito posluchači teď mají prvotřídní základy fyziky – a jsou to koneckonců ti, které jsem chtěl získat. Jenže „sfla vyučování má zřídka velký účinek, s výjimkou těch šťastně disponovaných, pro které je však téměř zbytečná“. (Gibbon)

Musím poznamenat, že jsem nechtěl zapomenout na žádného studenta, ač se mi to možná nepodařilo. Jedním ze způsobů, jak více pomoci studentům, je svědomitější příprava sbírky úloh, které by objasňovaly některé myšlenky z přednášek. Úlohy poskytují výbornou příležitost rozšířit přednášenou látku a předložené myšlenky získávají řešením úloh reálný tvar, úplnost a lépe se ukládají do paměti. Domnívám se však, že problém výuky je možné vyřešit jen tehdy, když si uvědomíme, že nejlepší vyučování je takové, ve kterém existuje přímý, osobní vztah mezi studentem a dobrým učitelem – tehdy student posuzuje názory, přemýšlí o problémech, diskutuje o nich. Je nemožné naučit se mnoho pouhým seděním na přednáškách, nebo jen řešením povinných příkladů. V současnosti je tak mnoho studentů, které je třeba učit, že musíme nalézt náhradu takového ideálu. Možná tomu pomohou i mé přednášky. Snad v některém menším městě, kde je možný individuální přístup učitele ke studentovi, poskytnou mé přednášky určitou inspiraci. Možná bude zábavné se nad nimi zamyslet, nebo některé myšlenky rozvíjet dál.



Obsahem knihy jsou přednášky z úvodu do fyziky, které měl profesor R. P. Feynman na Kalifornském technickém institutu v průběhu akademického roku 1961–62. Odpovídají prvnímu roku dvouletého úvodního kurzu přednášeného na Caltechu všem posluchačům prvního a druhého ročníku a měly své pokračování v podobném kurzu přednášeném v roce 1962–63 pro druhý ročník. Přednášky představují hlavní část přestavby úvodního kurzu uskutečňované po dobu čtyř let.

Potřeba základní přestavby vznikla pod vlivem rychlého rozvoje fyziky v posledních desetiletích a na základě skutečnosti, že studenti, kteří přicházeli ze středních škol, měli stále lepší matematické základy v důsledku zkvalitnění výuky matematiky na středních školách. Tyto matematické znalosti jsme chtěli využít a zavést moderní poznatky, aby byl kurz podnětější, zajímavější a aby více odpovídal současné fyzice.

Abychom shromáždili různé nápady, jakou látku zahrnout a jak ji podat, vyzvali jsme řadu fyziků z fakulty, aby nás formou stručných sylabů seznámili se svými představami o přestavbě takového kurzu. Přišlo několik návrhů, které jsme důkladně a kriticky prodiskutovali. Téměř ihned jsme se shodli na tom, že základní přestavba kurzu se nemůže uskutečnit ani použitím jiné učebnice, ani napsáním úplně nové učebnice, ale základem musí být soubor přednášek konaných dvakrát nebo třikrát týdně a příslušný textový materiál se zpracuje na podkladě těchto přednášek, přičemž i laboratorní cvičení se mu obsahově přizpůsobí. Tak vznikl neúplný a pokusný hrubý náčrt kurzu podléhajcí změnám, které má uskutečnit ten, kdo převezme zodpovědnost za skutečnou přípravu přednášek.

Existovalo několik návrhů, jak uvést kurz do praxe. Byly většinou dost podobné a předpokládaly společné úsilí učitelů, mezi něž by bylo rovnoměrně rozloženo celé břemeno. Každý by převzal zodpovědnost za  $1/N$  látky, za přednášení a písemné zpracování této části. Nedostatek takových lidí a problém se sjednocením názorů jednotlivých, povahově a smyšlením často rozdílných členů takového kolektivu, dělaly tyto plány neuskutečnitelnými.

Šťastnou inspirací profesora Sandsa jsme zvládli problém vytvoření nejen nového a od jiných se lišícího, ale možná zcela výjimečného kurzu fyziky. Profesor Sands navrhl, aby přednášky připravil a přednesl profesor R. P. Feynman. Tyto přednášky by se nahrály na magnetofonový pásek a po přepisu a zredigování by se staly učebnicí nového kurzu. A právě tento návrh byl přijat.

Očekávali jsme, že nevyhnutelná redakční práce bude nepatrná a bude spočívat zejména ve vyhotovení obrázků, kontrole interpunkce a gramatiky; to by stihli udělat jeden nebo dva posluchači vyšších ročníků při studiu. Bohužel, tyto naše naděje netrvaly dlouho. Ukázalo se, že převod mluveného slova do čtivé podoby si i bez občas nevyhnutelných věcných úprav a korigování vyžaduje velmi mnoho redakční práce. Navíc, to nebyla práce pro technického redaktora nebo studenta vyššího ročníku, ale práce, jež si vyžadovala přímou pozornost profesionálního fyzika, který nad jednou přednáškou musel strávit deset až dvacet hodin!

Obtížnost redakční práce a potřeba dát studentům přednášky co nejdříve do rukou, značně omezily možnost „pilovat“ materiál, a tak jsme se namísto definitivního produktu museli omezit na předběžnou, ale technicky dobrou variantu textu přednášek, který by se mohl okamžitě používat. Potřeba velkého počtu exemplářů pro naše studenty a zájem asistentů a studentů jiných vysokých škol popohnaly vydání materiálu v jeho předběžné formě, bez čekání na další velké úpravy, ke kterým možná ani nikdy nedojde. Neděláme si iluze o úplnosti, uhlazenosti nebo logickém uspořádání materiálu; chystáme některé menší úpravy kurzu v bezprostřední budoucnosti a doufáme, že ani forma, ani obsah nezůstanou neměnné.

Kromě přednášek, které představují tu nejdůležitější část kurzu, jsme museli zabezpečit vhodná cvičení rozvíjející zkušenosti a schopnosti studentů a vhodné experimenty, aby se studenti s přednášeným tématem co nejbezprostředněji seznámili v laboratoři. I když žádná z těchto stránek nepokročila tak, jako samotné přednášky, přece jen se i v tomto směru udělalo dost.

Některá cvičení vznikla v průběhu přednášení, později byla přepracována a rozšířena pro potřeby následujícího roku. Zdá se nám však, že cvičení zatím nejsou takovou pestrou a hlubokou aplikací přednášek, aby si studenti uvědomili, jaký úžasný aparát se jim dostává do rukou. Proto cvičení uveřejňujeme odděleně a v takové podobě, která předpokládá častější přepracování.

Některé nové experimenty pro tento kurz navrhl profesor H. V. Neher. Jsou mezi nimi takové, které využívají mimořádně malé tření při pohybu těles nadnášených plynem: nová lineární vzduchová dráha, která umožňuje kvantitativní zkoumání jednorozměrného pohybu, srážek a harmonického pohybu, dále na vzduchovém polštáři se pohybující a vzduchem poháněný Maxwellův setrvačnický, který umožňuje studium zrychleného rotačního pohybu a gyroskopické precese a nutace. Rozvoj nových laboratorních experimentů bude zřejmě ještě dlouho pokračovat.

Přestavba učebního programu se uskutečnila pod vedením profesorů R. B. Leightona, H. V. Nehera a M. Sandse. Na programu se oficiálně podíleli profesori R. P. Feynman, G. Neugebauer, R. M. Sutton, H. P. Stabler<sup>1)</sup>, F. Strong a R. Vogt z katedry fyziky, matematiky a astronomie a profesori T. Caughey, M. Plesset a C. H. Wilts z katedry technických věd. Srdečně děkujeme všem, kteří nám při přestavbě studia pomohli. Zvláště jsme zavázáni Fordově nadaci, bez jejíž finanční pomoci by se tento program neuskutečnil.

ČERVENEC 1963, ROBERT B. LEIGHTON

---

<sup>1)</sup> Na programu se podílel v letech 1961–62, kdy byl uvolněn z Williams College, Williamstown, Mass.

## Předmluva k prvnímu českému vydání

Otevíráte první ze tří dílů Feynmanových přednášek o fyzice, světově proslulého vysokoškolského kurzu fyziky. Náš významný teoretický fyzik profesor Bičák před časem napsal, že čeština je jedním z mála kulturních jazyků, do nichž Feynmanovy přednášky dosud nebyly přeloženy. Nakladatelství Fragment tak splácí tento dluh. Náš překlad byl pořizen z amerického vydání nakladatelství Addison – Wesley 1977 (1. a 2. díl) a 1966 (3. díl), s přihlédnutím k vydáním ve slovenském a ruském jazyce. Náš překlad je navíc doplněn i úlohami, které tvoří součást kurzu, s uvedením výsledků a stručných návodů k řešení. Řešení Feynmanových úloh v angličtině nevyšla, ale byla podrobně rozebrána v ruských překladech Feynmanových přednášek.

Feynmanovy přednášky o fyzice nejsou učebnicí v běžném smyslu a představují spíše široký proud živých myšlenek velkého fyzika a myslitele, který se celý život těšil a bavil hravým luštěním těch nejskrytějších tajemství přírody. Feynmanovy přednášky je možno doporučit spíše tomu, kdo už základní kurs fyziky na vysoké škole absolvoval nebo se ze své profese či záliby o fyziku hlouběji zajímá. I pro učitele a zralé fyziky jsou přednášky zdrojem bohaté inspirace, poznáním nečekaných souvislostí a vyvolávají obdiv ke kráse, složitosti a jednoduchosti přírody zároveň.

O genezi Feynmanových přednášek se dočítáme v předmluvách k americkému vydání. Přednášky vznikly v letech 1961–63 na Kalifornském technickém institutu v Pasadeně u Los Angeles, kde Feynman působil, ze snahy zdokonalit a modernizovat výuku fyziky. Feynman byl požádán, aby přednesl studentům prvních dvou ročníků celý souvislý kurz fyziky a učební text měl vzniknout na základě magnetofonových záznamů těchto přednášek. Původní záměr však dostal poněkud jinou podobu. Feynman při přednáškách pronesl asi milion slov, nedržel se žádných osnov ani konvencí, používal živý, hovorový jazyk, neočekávaná přirovnání a humor, a podařilo se mu nakazit alespoň část studentů nadšením a obdivem k zákonům přírody. Vtěsnat takový gejzír myšlenek do alespoň trochu důstojné vysokoškolské učebnice bylo pak dílem celé řady spolupracovníků, kteří se ovšem snažili Feynmanův přístup a duch přednášek zachovat. Učební text musel vyjít v krátké době, protože široká fyzikální veřejnost ho dychtivě očekávala.

Takový text je ovšem i orůvkem pro překladatele, snaží-li se pokud možno zachovat původní svěžest výkladu a zároveň dodržovat určitá učebnicová a terminologická pravidla. Výsledkem je kompromis, v němž jsme si dovolili ve Feynmanově duchu porušit i některé v našich školách požadované formální zásady. Je ostatně třeba podotknout, že zahraniční fyzikální literatura je v takových požadavcích mnohem tolerantnější. Tak třeba občas necháváme částice pohybovat po kruhových dráhách (i když by se správně měly pohybovat po trajektoriích tvaru kružnice) nebo necháváme na píšť působit tlak (i když by přesně vzato měla působit tlaková síla) apod.

Feynmanovy přednášky o fyzice vycházejí ve třech dílech. První z nich je věnován mechanice, optice, termodynamice a nauce o vlnění, druhý elektromagnetismu a vlastnostem materiálů, třetí základům kvantové fyziky. U Feynmana ovšem nepřekvapuje, že do termodynamiky zařadil celou kapitolu o ozubeném kolečku a vysvětlil na něm vznik Vesmíru, v optice rozebral fyziologii vidění ostrorepa amerického anebo zreprodukoval postup výpočtu logaritmů, jak ho prováděl v 17. století Briggs. Feynman se vůbec domníval, že příroda je jen jedna a dělit ji na fyziku, chemii, biologii a další vědy je jen lidský výmysl. Ostatně, když studentům Kalifornského technického institutu vysvětloval postup při otevírání sejfů, chápal to také jako součást experimentální fyziky.

Může vzniknout otázka, zda učebnice fyziky z počátku 60. let 20. století přece jen nezastarala. Je naopak s podivem, jak moderně a současně nám znějí Feynmanovy formulace dnes, jak postihují podstatu fyzikálních jevů a dějů. Je to samozřejmě jednak tím, že Feynman se soustřeďuje na základní pohledy na přírodu a vidí daleko dopředu, a také proto, že právě v období vzniku učebnice se mnohé myšlenky a pozdější objevy ve fyzice právě rodily a nabývaly nové obrysy, nemalou zásluhou samotného Feynmana. Zastaraly samozřejmě některé aktuality, které Feynman uvádí; v některých případech zmiňujeme pod čarou novější fyzikální výsledky a poznatky.

Feynmanův život a jeho vědecký přístup je u nás zainteresovaným čtenářům dobře znám z vynikající a úsměvné autobiografie pod názvem „To snad nemyslíte vážně“. Najdeme v ní i stručný Feynmanův životopisný rámec podaný v „dotazníkovém“ stylu:

*Narodil jsem se v roce 1918 v městečku Far Rockaway na okraji New Yorku, nedaleko moře. Žil jsem tam do roku 1935, kdy mně bylo sedmnáct. Čtyři roky jsem studoval na Massachusettském technickém institutu (MIT) a pak jsem, kolem roku 1939, šel do Princetonu. Během pobytu v Princetonu jsem začal pracovat na projektu Manhattan a nakonec jsem odešel v dubnu 1943 do Los Alamos. Tam jsem zůstal asi tak do října nebo listopadu 1946, kdy jsem odešel na Cornellovu univerzitu.*

*V roce 1941 jsem se oženil s Arlene, která zemřela na tuberkulózu v roce 1945, během mého pobytu v Los Alamos. Na Cornellu jsem zůstal asi do roku 1951. V létě 1949 jsem navštívil Brazílii a v roce 1951 jsem tam strávil půl roku. Pak jsem odešel na Kalifornský technický institut (Caltech) a tam jsem dosud. V Japonsku jsem byl pár týdnů v roce 1951 a pak znova o jeden nebo dva roky později, právě když jsem se podruhé oženil s Mary Lou.*

*V současné době jsem ženatý s Gweneth, která je Angličanka a máme spolu dvě děti jménem Carl a Michelle.*

Všimněme si charakteristické okolnosti, jak neurčité jsou některé Feynmanovy údaje („o jeden nebo dva roky později“ apod.), čímž dává najevo, jak považuje přesné určení takových událostí za nedůležité.

Je třeba doplnit, že Feynman získal v roce 1965 Nobelovu cenu a působil na Kalifornském technickém institutu do konce svého života. V roce 1988 podlehl kruté nemoci; zemřel na selhání ledvin způsobeném rakovinou, která ho několik posledních let života sužovala. Studenti institutu pak vyvěsili na nejvyšší budovu své školy transparent: „Máme Tě rádi, Dicku“. Americké veřejnosti se Feynman ještě naposled představil krátce před smrtí, kdy již nemocen, posuzoval příčiny tragédie amerického raketoplánu Challenger. Na televizních obrazovkách demonstroval, jak gumový těsnící prstenec přívodu paliva za nízké venkovní teploty zkřehne, ztratí své pružné vlastnosti a může způsobit havárii. Přitom podle svého zvyku ostře kritizoval způsob řízení velkých amerických organizací a nezodpovědnost jejich vedoucích pracovníků.

Přiblížit Feynmanův vědecký přínos, který ho zařadil mezi největší fyziky 20. století, populární formou je obtížné. Feynman byl jedním z tvůrců kvantové elektrodynamiky, která propojila teorii relativity a kvantovou fyziku, objevil Feynmanovy diagramy a Feynmanův dráhový integrál, přispěl k teorii slabých interakcí, supravodivosti, supratekutosti a gravitace, navrhl partonový model hadronů a zasloužil se o fyziku elementárních částic. Jde vesměs o matematicky nejnáročnější otázky teoretické fyziky. Feynman se přitom řídil svou fyzikální intuicí a zakládal si na tom, že dovede nejsložitější problémy řešit jednoduchým způsobem, podobně jako Kolumbus se svým pověstným vejcem. Odvozování, které významnému fyzikovi trvalo šest měsíců, dovedl Feynman provést během jedné bezesné noci (podobně jako kdysi Newton). Prostým logickým a matematickým úsudkem překonával umění kabaretních zázračných počtářů.

Přitom Feynman žil plnokrevným životem a šíře jeho zájmů byla nesmírná. Byl i hudebníkem (hrál na bonga), malířem, milovníkem žertů a nijak si nezakládal na své důstojnosti. Rád šokoval a dráždil svými nápady, navštěvoval bary a podřadné restaurace, stýkal se s lidmi všech společenských vrstev, slunil se nahý na střeše univerzity, objímal své sekretářky a v dnešní Americe by měl určitě velké potíže. Vymýšlel návody, jak svádět děvčata (ostatně možná, že i to patří do fyziky nebo do chemie?), občas byl nezdvořilý a kousavý a nezáleželo mu na tom, koho se třeba dotkne. Vyzářovala z něho neuvěřitelná myšlenková síla, elán a nadšení, když hovořil o fyzice, gestikuloval rukama, žongloval prsty a prožíval drama celým tělem. Aspoň tak ho pamatují jeho spolupracovníci a žáci.

My už dnes nemůžeme sledovat jeho přednášky v neopakovatelném přímém podání a musíme se spokojit s tištěným slovem. Věřím však, že i z jejich textu čtenář vycítí velkou lidskou osobnost autora.

BŘEZEN 2000, IVAN ŠTOLL

## OBSAH

- 1 **ATOMY V POHYBU**
  - 1.1 Úvod /15
  - 1.2 Látka se skládá z atomů /16
  - 1.3 Atomové procesy /20
  - 1.4 Chemické reakce /22  
Příklady a cvičení /27
- 2 **ZÁKLADY FYZIKY**
  - 2.1 Úvod /27
  - 2.2 Fyzika před rokem 1920 /29
  - 2.3 Kvantová fyzika /32
  - 2.4 Jádra a částice /35
- 3 **VZTAH FYZIKY K JINÝM VĚDÁM**
  - 3.1 Úvod /39
  - 3.2 Chemie /40
  - 3.3 Biologie /40
  - 3.4 Astronomie /45
  - 3.5 Geologie /47
  - 3.6 Psychologie /47
  - 3.7 Jak všechno vzniklo? /48
- 4 **ZACHOVÁNÍ ENERGIE**
  - 4.1 Co je to energie? /50
  - 4.2 Gravitační potenciální energie /51
  - 4.3 Kinetická energie /56
  - 4.4 Jiné formy energie /57  
Příklady a cvičení /60
- 5 **ČAS A VZDÁLENOST**
  - 5.1 Pohyb /64
  - 5.2 Čas /65
  - 5.3 Krátké časy /66
  - 5.4 Dlouhé časy /67
  - 5.5 Jednotky a standardy času /69
  - 5.6 Velké vzdálenosti /70
  - 5.7 Malé vzdálenosti /73
- 6 **PRÁVĚPODOBNOST**
  - 6.1 Možnost a pravděpodobnost /77
  - 6.2 Fluktuační /79
  - 6.3 Náhodná procházka /82
  - 6.4 Rozložení pravděpodobnosti /86
  - 6.5 Princip neurčitosti /89  
Příklady a cvičení /91
- 7 **TEORIE GRAVITACE**
  - 7.1 Pohyb planet /92
  - 7.2 Keplerovy zákony /93
  - 7.3 Rozvoj dynamiky /94
  - 7.4 Newtonův gravitační zákon /95
  - 7.5 Všeobecná gravitace /98
  - 7.6 Cavendishův experiment /102
  - 7.7 Co je to gravitace? /103
  - 7.8 Gravitace a relativita /105  
Příklady a cvičení /106
- 8 **POHYB**
  - 8.1 Popis pohybu /108
  - 8.2 Rychlost /110
  - 8.3 Rychlost jako derivace /113
  - 8.4 Vzdálenost jako integrál /115
  - 8.5 Zrychlení /116  
Příklady a cvičení 120
- 9 **NEWTONOVY ZÁKONY DYNAMIKY**
  - 9.1 Hybnost a síla /122
  - 9.2 Směr a velikost rychlosti /124
  - 9.3 Složky rychlosti, zrychlení a síly /125
  - 9.4 Co je to síla? /126
  - 9.5 Smysl dynamických rovnic /127
  - 9.6 Numerické řešení rovnic /128
  - 9.7 Pohyb planet /131  
Příklady a cvičení /136
- 10 **ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI**
  - 10.1 Třetí Newtonův zákon /139
  - 10.2 Zákon zachování hybnosti /140
  - 10.3 Hybnost se zachovává /143
  - 10.4 Hybnost a energie /147
  - 10.5 Relativistická hybnost /148  
Příklady a cvičení /151
- 11 **VEKTORY**
  - 11.1 Symetrie ve fyzice /153
  - 11.2 Translace /154
  - 11.3 Rotace /156
  - 11.4 Vektory /158
  - 11.5 Vektorová algebra /160
  - 11.6 Newtonovy zákony ve vektorovém tvaru /162
  - 11.7 Skalární součin vektorů /164  
Příklady a cvičení /166
- 12 **CHARAKTERISTIKY SÍLY**
  - 12.1 Co je to síla? /169
  - 12.2 Tření /171
  - 12.3 Molekulové síly /174
  - 12.4 Fundamentální síly. Pole /176
  - 12.5 Nepravé síly /180
  - 12.6 Jaderné síly /182  
Příklady a cvičení /183
- 13 **PRÁCE A POTENCIÁLNÍ ENERGIE**
  - 13.1 Energie padajícího tělesa /185
  - 13.2 Práce vykonaná gravitací /188
  - 13.3 Sčítání energií /192
  - 13.4 Gravitační pole velkých těles /194

- 14 PRÁCE A POTENCIÁLNÍ ENERGIE (ZÁVĚR)**
- 14.1 Práce /197
  - 14.2 Vázaný pohyb /199
  - 14.3 Konzervativní síly /199
  - 14.4 Nekonzervativní síly /203
  - 14.5 Potenciály a pole /204  
Příklady a cvičení /208
- 15 SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY**
- 15.1 Princip relativity /210
  - 15.2 Lorentzova transformace /212
  - 15.3 Michelsonův-Morleyův experiment /213
  - 15.4 Transformace času /216
  - 15.5 Lorentzovská kontrakce /218
  - 15.6 Současnost /219
  - 15.7 Čtyřvektory /219
  - 15.8 Relativistická dynamika /220
  - 15.9 Ekvivalence hmotnosti a energie /222  
Příklady a cvičení /224
- 16 RELATIVISTICKÁ ENERGIE A HYBNOST**
- 16.1 Relativita a filozofové /225
  - 16.2 Paradox dvojčat /227
  - 16.3 Transformace rychlostí /228
  - 16.4 Relativistická hmotnost /231
  - 16.5 Relativistická energie /234  
Příklady a cvičení /236
- 17 PROSTOROČAS**
- 17.1 Geometrie prostoročasu /237
  - 17.2 Prostoročasové intervaly /239
  - 17.3 Minulost, přítomnost a budoucnost /241
  - 17.4 Podrobnosti o čtyřvektorech /242
  - 17.5 Algebra čtyřvektorů /244  
Příklady a cvičení /247
- 18 DVOJROZMĚRNÁ ROTACE**
- 18.1 Hmotný střed /248
  - 18.2 Rotace tuhého tělesa /250
  - 18.3 Moment hybnosti /253
  - 18.4 Zachování momentu hybnosti /255  
Příklady a cvičení /257
- 19 HMOTNÝ STŘED; MOMENT SETRVAČNOSTI**
- 19.1 Vlastnosti hmotného středu /259
  - 19.2 Poloha hmotného středu /263
  - 19.3 Určení momentu setrvačnosti /264
  - 19.4 Kinetická energie rotace /267  
Příklady a cvičení /270
- 20 ROTACE V PROSTORU**
- 20.1 Momenty sil v prostoru /273
  - 20.2 Rovnice rotace a vektorový součin /277
  - 20.3 Setrvačnický /278
  - 20.4 Moment hybnosti tuhého tělesa /282  
Příklady a cvičení /284
- 21 HARMONICKÝ OSCILÁTOR**
- 21.1 Lineární diferenciální rovnice /286
  - 21.2 Harmonický oscilátor /287
  - 21.3 Harmonický pohyb a pohyb po kružnici /290
  - 21.4 Počáteční podmínky /291
  - 21.5 Nucené kmity /292  
Příklady a cvičení /294
- 22 ALGEBRA**
- 22.1 Sčítání a násobení /295
  - 22.2 Inverzní operace /296
  - 22.3 Abstrakce a zobecnění /297
  - 22.4 Aproximace iracionálních čísel /298
  - 22.5 Komplexní čísla /302
  - 22.6 Imaginární exponenty /304  
Příklady a cvičení /307
- 23 REZONANCE**
- 23.1 Komplexní čísla a harmonický pohyb /309
  - 23.2 Tlumené nucené kmity /311
  - 23.3 Rezonance v elektrických obvodech /314
  - 23.4 Rezonance v přírodě /317  
Příklady a cvičení /322
- 24 PŘECHODOVÉ JEVY**
- 24.1 Energie oscilátoru /323
  - 24.2 Tlumené kmity /325
  - 24.3 Přechodné jevy v elektrických obvodech /328  
Příklady a cvičení /331
- 25 LINEÁRNÍ SYSTÉMY. PŘEHLED**
- 25.1 Lineární diferenciální rovnice /332
  - 25.2 Superpozice řešení /334
  - 25.3 Oscilace v lineárních systémech /337
  - 25.4 Analogie ve fyzice /339
  - 25.5 Sériové a paralelní impedance /341  
Příklady a cvičení /343
- 26 OPTIKA: PRINCIP NEJKRATŠÍHO ČASU**
- 26.1 Světlo /344
  - 26.2 Odraz a lom /345
  - 26.3 Fermatův princip nejkratšího času /347
  - 26.4 Použití Fermatova principu /350
  - 26.5 Přesnější formulace Fermatova principu /353
  - 26.6 Jak tomu rozumět /355  
Příklady a cvičení /356
- 27 GEOMETRICKÁ OPTIKA**
- 27.1 Úvod /357
  - 27.2 Ohnisková vzdálenost kulové plochy /358
  - 27.3 Ohnisková vzdálenost čočky /362
  - 27.4 Zvětšení /364
  - 27.5 Složené čočky /365
  - 27.6 Aberace /366

- 27.7 Rozlišovací schopnost /367  
Příklady a cvičení /369
- 28 ELEKTROMAGNETICKÉ ZÁŘENÍ**
- 28.1 Elektromagnetismus /370  
28.2 Záření /373  
28.3 Dipólový zářič /374  
28.4 Interference /376  
Příklady a cvičení /378
- 29 INTERFERENCE**
- 29.1 Elektromagnetické vlny /379  
29.2 Energie záření /381  
29.3 Sinusoidální vlny /382  
29.4 Dva dipólové zářiče /383  
29.5 Matematika interference /386  
Příklady a cvičení /390
- 30 DIFRAKCE**
- 30.1 Výsledná amplituda  $n$  stejných oscilátorů /391  
30.2 Difrakční mřížka /395  
30.3 Rozlišovací schopnost mřížky /398  
30.4 Parabolická anténa /399  
30.5 Barevy tenkých vrstev; krystaly /400  
30.6 Difrakce na neprůzračné cloně /401  
30.7 Pole nábojů kmitajících v rovině /403  
Příklady a cvičení /408
- 31 PŮVOD INDEXU LOMU**
- 31.1 Index lomu /410  
31.2 Pole v látce /414  
31.3 Disperze /416  
31.4 Absorpce /419  
31.5 Energie přenášená elektrickou vlnou /420  
31.6 Difrakce světla na cloně /421  
Příklady a cvičení /424
- 32 RADIČNÍ ÚTLUM. ROZPTYL SVĚTLA**
- 32.1 Radiační odpor /425  
32.2 Radiační výkon /426  
32.3 Radiační útlum /428  
32.4 Nezávislé zdroje /430  
32.5 Rozptyl světla /431  
Příklady a cvičení /436
- 33 POLARIZACE**
- 33.1 Elektrický vektor světla /437  
33.2 Polarizace rozptýleného světla /439  
33.3 Dvojlom /439  
33.4 Polarizátory /441  
33.5 Optická aktivita /443  
33.6 Intenzita odraženého světla /444  
33.7 Anomální lom světla /446  
Příklady a cvičení /449
- 34 RELATIVISTICKÉ JEVY A ZÁŘENÍ**
- 34.1 Pohybující se zdroje /450  
34.2 „Zdánlivý“ pohyb /452  
34.3 Synchrotronové záření /454  
34.4 Kosmické synchrotronové záření /456  
34.5 Brzdné záření /458  
34.6 Dopplerův jev /458  
34.7 Vlnový čtyřvektor /461  
34.8 Aberace /463  
34.9 Hybnost světla /464  
Příklady a cvičení /466
- 35 BAREVNÉ VIDĚNÍ**
- 35.1 Lidské oko /467  
35.2 Barva závislá na intenzitě /469  
35.3 Měření barevného vjemu /470  
35.4 Diagram barevnosti /474  
35.5 Mechanismus barevného vidění /475  
35.6 Fyziologie barevného vidění /477
- 36 MECHANIZMUS VIDĚNÍ**
- 36.1 Barvný vjem /480  
36.2 Fyziologie oka /483  
36.3 Tyčinky /486  
36.4 Složené oko hmyzu /488  
36.5 Jiné oči /491  
36.6 Neurologie zraku /492
- 37 KVANTOVÉ CHOVÁNÍ**
- 37.1 Mechanika atomů /496  
37.2 Experiment s kulkami /497  
37.3 Experiment s vlnami /499  
37.4 Experiment s elektrony /500  
37.5 Interference elektronových vln /501  
37.6 Sledování elektronů /503  
37.7 Základní principy kvantové mechaniky /506  
37.8 Princip neurčitosti /507
- 38 SOUVISLOST MEZI VLNOVÝM A KORPUSKULÁRNÍM HLEDISKEM**
- 38.1 Amplitudy vln pravděpodobnosti /509  
38.2 Měření polohy a hybnosti /511  
38.3 Difrakce na krystalech /514  
38.4 Velikost atomu /516  
38.5 Energetické hladiny /518  
38.6 Filozofické důsledky /519  
Příklady a cvičení /522
- 39 KINETICKÁ TEORIE PLYNŮ**
- 39.1 Vlastnosti látek /523  
39.2 Tlak plynu /525  
39.3 Stlačitelnost záření /529  
39.4 Teplota a kinetická energie /530  
39.5 Zákon ideálního plynu /534  
Příklady a cvičení /537

- 40 PRINCIPY STATISTICKÉ MECHANIKY**  
 40.1 Exponenciální atmosféra /539  
 40.2 Boltzmannův zákon /542  
 40.3 Vypařování kapaliny /543  
 40.4 Rozdělení molekul podle rychlosti /544  
 40.5 Měrná tepelná kapacita plynů /548  
 40.6 Selhání klasické fyziky /550  
 Příklady a cvičení /553
- 41 BROWNŮV POHYB**  
 41.1 Ekvipartičnost energie /554  
 41.2 Tepelná rovnováha záření /557  
 41.3 Ekvipartičnost a kvantový oscilátor /561  
 41.4 Náhodná procházka /563  
 Příklady a cvičení /567
- 42 APLIKACE KINETICKÉ TEORIE**  
 42.1 Vypařování /568  
 42.2 Termocmise /572  
 42.3 Termoionizace /573  
 42.4 Chemická kinetika /575  
 42.5 Einsteinovy zákony záření /576  
 Příklady a cvičení /580
- 43 DIFUZE**  
 43.1 Srážky molekul /581  
 43.2 Střední volná dráha /584  
 43.3 Driftová rychlost /585  
 43.4 Iontová vodivost /587  
 43.5 Molekulová difuze /589  
 43.6 Tepelná vodivost /592  
 Příklady a cvičení /594
- 44 ZÁKONY TERMODYNAMIKY**  
 44.1 Tepelné stroje; první zákon /595  
 44.2 Druhý zákon /598  
 44.3 Vratné stroje /599  
 44.4 Účinnost ideálního stroje /603  
 44.5 Termodynamická teplota /606  
 44.6 Entropie /608  
 Příklady a cvičení /612
- 45 ILUSTRACE TERMODYNAMIKY**  
 45.1 Vnitřní energie /613  
 45.2 Aplikace /617  
 45.3 Clausiova – Clapeyronova rovnice /619  
 Příklady a cvičení /624
- 46 ROHATKA SE ZÁPADKOU**  
 46.1 Jak pracuje rohatka /625  
 46.2 Rohatka jako stroj /627  
 46.3 Vratnost v mechanice /629  
 46.4 Nevratnost /631  
 46.5 Uspořádání a entropie /632
- 47 ZVUK. VLNOVÁ ROVNICE**  
 47.1 Vlny /635  
 47.2 Šíření zvuku /638  
 47.3 Vlnová rovnice /639  
 47.4 Řešení vlnové rovnice /642  
 47.5 Rychlost zvuku /643  
 Příklady a cvičení /645
- 48 RÁZY**  
 48.1 Skládání dvou vln /646  
 48.2 Záněbové tóny a modulace /649  
 48.3 Postranní pásy /651  
 48.4 Lokalizované vlnové balíčky /652  
 48.5 Amplitudy pravděpodobnosti pro částice /655  
 48.6 Vlny v trojrozměrném prostoru /657  
 48.7 Normální kmity /658  
 Příklady a cvičení /660
- 49 MODY**  
 49.1 Odraz vln /661  
 49.2 Vlny v ohraničené oblasti, vlastní frekvence /663  
 49.3 Dvojrozměrné módy /665  
 49.4 Vázaná kyvadla /668  
 49.5 Liniární soustavy /670  
 Příklady a cvičení /671
- 50 HARMONICKÉ KMITY**  
 50.1 Hudební tóny /672  
 50.2 Fourierovy řady /674  
 50.3 Kvalita a libozvučnost /675  
 50.4 Fourierovy koeficienty /677  
 50.5 Věta o energii /681  
 50.6 Nelineární odezvy /681  
 Příklady a cvičení /685
- 51 VLNY**  
 51.1 Kuželové vlny /686  
 51.2 Rázové vlny /688  
 51.3 Vlny v pevných látkách /691  
 51.4 Povrchové vlny /694
- 52 SYMETRIE FYZIKÁLNÍCH ZÁKONŮ**  
 52.1 Symetrické operace /699  
 52.2 Symetrie v prostoru a čase /700  
 52.3 Symetrie a zákony zachování /702  
 52.4 Zrcadlový obraz /703  
 52.5 Polární a axiální vektory /705  
 52.6 Která ruka je pravá? /707  
 52.7 Parita se nezachovává /708  
 52.8 Antihmota /710  
 52.9 Porušená symetrie /711
- VÝSLEDKY A NÁVODY KE CVIČENÍM /713**
- REJSTŘÍK VYBRANÝCH POJMŮ A JMEN /731**



# Atomy v pohybu

---

## 1.1 ÚVOD

## 1.2 LÁTKA SE SKLÁDÁ Z ATOMŮ

## 1.3 ATOMOVÉ PROCESY

## 1.4 CHEMICKÉ REAKCE

### 1.1 ÚVOD

Při uvádění tohoto dvouletého kurzu fyziky vycházíme z předpokladu, že čtenář se má stát fyzikem. To, samozřejmě, nemusí být pravda, ale každý učitel to ve svém oboru o studentech předpokládá! Jestliže se máte stát fyziky, budete muset mnoho studovat; vždyť jde o dvěšlet let nejrychleji se rozvíjející oblasti poznání. Je to tak mnoho poznatků, že se vám snad bude zdát nemožné je obsáhnout za pět let, a budete mít pravdu. Budete muset studovat ještě i po ukončení vysoké školy.

Je dost překvapující, že i přes úžasně velkou práci vykonanou za tuto dobu, je možné značně zkoncentrovat ohromné množství výsledků – nalézt zákony, které zahrnují všechny naše vědomosti. Jenže i tyto zákony je těžké si osvojit, a proto by bylo nečestné vůči vám začít studium složitěho předmětu bez jakési mapy nebo náčrtu souvislostí mezi jednotlivými částmi vědy. V souladu s těmito úvodními poznámkami jsou první tři kapitoly věnovány tomu, jak souvisí fyzika s ostatními vědami, jak souvisí jednotlivé vědní disciplíny navzájem a jaký je smysl vědy. To nám umožní získat „cit“ pro fyziku.

Možná se zeptáte, zda není možné při vyučování fyziky na první straně uvést základní zákony a potom ukázat, co z nich vyplývá v nejrůznějších situacích. Tak se postupuje v euklidovské geometrii, kde se postulují axiomy, ze kterých se odvodí všechny možné závěry. (Protože se vám nelíbí pětileté studium fyziky, chtěli byste se ji naučit za pět minut?) Takovýmto způsobem však nemůžeme postupovat ze dvou důvodů. Především, zatím neznáme všechny základní zákony – oblast toho, co bychom ještě měli poznat, se nám stále zvětšuje. Dále, přesná formulace fyzikálních zákonů zahrnuje mnoho neobvyklých myšlenek, jejichž vyjádření si vyžaduje vyšší matematiku. Proto je nutná značná předběžná příprava jen k tomu, abychom rozuměli, co znamenají slova. Není tedy možné postupovat tímto způsobem. Učit se můžeme pouze postupně, kousek po kousku.

Každý kousek nebo část celku, který představuje příroda, je vždy jen přiblížením k úplně pravdě; přesněji k úplně pravdě, pokud ji známe. Ve skutečnosti vše, co víme, je jen určitým

druhem aproximace, protože víme, že ještě neznáme všechny zákony. Proto se věci musíme učit jen proto, abychom se je znovu odnaučili, nebo, což je pravděpodobnější, abychom si naše znalosti o nich opravovali.

Princip vědy, téměř její definice, je následující: *Prověrkou všech našich vědomostí je experiment. Experiment je jediné kritérium vědecké „pravdy“*. Jenže co je zdrojem našich vědomostí? Odkud pocházejí zákony, které prověřujeme? Samotný experiment nám pomáhá odvozovat zákony v tom smyslu, že nám poskytuje náznaky, pokyny. Navíc je však potřebná *představivost*, aby z těchto náznaků mohla vzniknout velká zobecnění – abychom v nich odhadli nádherný, jednoduchý, ale neobyčejný obraz a potom experimentem prověřili správnost našeho odhadu. Tento proces představivosti je tak těžký, že si fyzici rozdělili práci – teoretičtí fyzici představivostí, dedukcí a odhadem odvozují nové zákony, ale neexperimentují; experimentální fyzici dělají pokusy a přitom také uplatňují představivost, dedukci a odhad.

Řekli jsme, že přírodní zákony jsou přibližné: že nejdříve nacházíme „nesprávné“ a až potom „správné“. Jak však může být experiment „nesprávný“? Především z velmi jednoduchého důvodu – váš přístroj není v pořádku a vy jste to nezapozorovali. Takové chyby se však zjišťují lehce. Odhlédneme-li od těchto drobností, jak může být výsledek experimentu nesprávný? Jen v důsledku nepřesnosti. Například, hmotnost předmětu se zdá být neměnná; rotující káča má stejnou hmotnost jako káča v klidu. Tak byl objeven „zákon“: hmotnost je konstantní, nezávislá na rychlosti. O tomto „zákonu“ se zjistilo, že je nesprávný. Ukázalo se, že hmotnost roste s rychlostí, ale k značnému růstu jsou potřebné rychlosti blízké rychlosti světla. Správný zákon zní: je-li rychlost tělesa menší než 100 km za sekundu, je hmotnost konstantní s přesností na jednu milióntinu. V takové aproximativní podobě je tento zákon správný. Někdo by si mohl myslet, že prakticky není rozdíl mezi starým a novým zákonem. To je i není pravda. Pro běžné rychlosti je jistě možné zapomenout na to, o čem jsme mluvili a používat jednoduchý zákon konstantní hmotnosti jako dobré přiblížení. Při velkých rychlostech se však dopustíme chyby, a to tím větší, čím větší je rychlost.

Ostatně, nejzajímavější je to, že *z filozofického hlediska je tento aproximativní zákon zcela nesprávný*. Náš celkový obraz o světě musíme změnit, i kdyby se hmotnost měnila jen nepatrně. Toto je svérázný znak filozofie nebo myšlenek stojících v pozadí zákonů. Někdy i velmi malý efekt vyžaduje hlubokou změnu našich názorů.

Čemu tedy máme dát přednost? Máme podat správné, ale nezvyklé zákony s jejich cizím a obtížným pojetím jako je například teorie relativity, čtyřrozměrný prostoročas a podobné? Nebo máme nejdříve vysvětlit jednoduchý zákon „konstantní hmotnosti“, který je pouze přibližný, ale nevyžaduje náročné představy? První způsob je více vzrušující, nádhernější a zábavnější, ale s druhým se jednodušeji začíná a představuje první krok ke skutečnému porozumění správného zákona. Tento problém se vždy znovu objevuje při vyučování fyziky. V různých etapách ho musíme řešit různými způsoby, ale vždy je vhodné se zabývat, do jaké míry je přesné to, co teď víme, jak to souvisí s dalším a jak se to může změnit, budeme-li vědět víc.

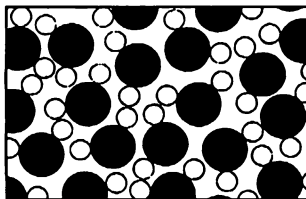
Nyní přejdeme k nártu nebo k všeobecné mapě našeho chápání současné vědy (zejména fyziky, ale i jiných věd, které s ní souvisejí). Když se později soustředíme na konkrétní problém, budeme mít představu o jeho pozadí, o tom, proč je zajímavý a jak zapadá do celkové struktury. Jaký je tedy náš celkový obraz světa?

## 1.2 LÁTKA SE SKLÁDÁ Z ATOMŮ

Kdyby při nějaké katastrofě zanikly všechny vědecké poznatky a dalším generacím by měla zůstat jen jediná věta, které tvrzení by při nejmenším počtu slov obsahovalo nejbohatší

informaci? Jsem přesvědčen, že je to *atomová hypotéza* (nebo *atomový fakt*, nebo jak to chcete nazvat), že všechny věci se skládají z atomů – malých částic, jež jsou v neustálém pohybu a vzájemně se přitahují, když jsou od sebe trochu vzdálené, ale odpuzují se, když jsou těsně u sebe. V této jediné větě, jak uvidíte, je obsaženo nesmírné množství informací o světě. Je k tomu třeba jen trochu představivosti a uvažování.

Abychom ilustrovali sílu myšlenky o atomu, představme si kapku vody o rozměru 0,5 cm. Podíváme-li se na ni zblízka, neuvidíme nic jiného, než vodu – klidnou, souvislou vodu. I když kapku zvětšíme tím nejlepším optickým mikroskopem, přibližně dvoutisíckrát, a kapka bude měřit deset metrů, tedy stejně jako velká místnost, i tehdy budeme stále vidět relativně klidnou vodu. Jen tu a tam v ní budou plavat jakési malé fotbalové míče. Tyto velmi zajímavé objekty jsou trepky. Tady se můžeme zastavit a zajímat se o trepky, o jejich třepotající se řasičky, o jejich kroučící se těla a nepokračovat ve zvětšování. Nebo můžeme zvětšit trepky tak, abychom viděli i do nich). Trepky jsou však předmětem biologie. Proto si jich teď nebudeme všimnout, ale zahledíme se ještě pozorněji na vodu při dalším dvoutisícinásobném zvětšení. Teď měří kapka vody dvacet kilometrů a při pozorném sledování je vidět jakési hemžení – cosi, co už nevypadá klidně, ale připomíná dav na fotbalové tribuně při pohledu z velké vzdálenosti. Abychom zjistili, co je to za hemžení, zvětšíme kapku ještě 250krát a potom uvidíme něco podobného jako na *obr. 1.1*. Tento obrázek představuje vodu při zvětšení miliardkrát, je však v několika směrech idealizovaný. Především částice jsou zakreslené zjednodušeně – s ostrými okraji, což neodpovídá skutečnosti. Dále kvůli jednoduchosti jsou částice zakreslené v dvojrozměrném uspořádání, ačkoli se ve skutečnosti pohybují ve všech třech směrech. Všimněte si, že jsou tam dva druhy částic znázorněných kroužky, které představují atomy kyslíku (černé) a vodíku (bílé) a že na každý atom kyslíku se vážou dva atomy vodíku. Každá skupinka skládající se z atomu kyslíku a dvou atomů vodíku se nazývá molekulou. Obrázek je zjednodušený i v tom, že skutečné částice v přírodě se ustavičně kolébají a poskakují, obracejí se a točí jedna okolo druhé. Musíte si to představit spíše jako dynamický a ne jako statický obrázek. Další věcí, kterou není možné vystihnout na obrázku, je skutečnost, že částice „drží pohromadě“ – přitahují se, jedna za sebou táhne druhou atd. Je možné říci, že jsou jakoby „slepené dohromady“. Na druhé straně se částice netlačí jedna přes druhou. Kdybyste se pokusili přitlačit dvě z nich příliš těsně k sobě, odpudily by se.



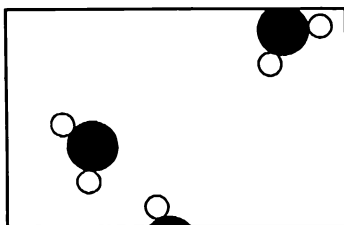
Obr. 1.1 Voda zvětšená miliardkrát

Atomy mají poloměr  $1 \cdot 10^{-10}$  m –  $2 \cdot 10^{-10}$  m. Jejich velikost si můžeme pamatovat i jinak: zvětšíme-li jablko na velikost Země, budou atomy v jablku tak velké, jak bylo původně jablko.

Představme si teď tuto velkou kapku vody s jejími hemžícími se částicemi, jež přilnuly k sobě a honí jedna druhou. Voda udržuje svůj objem; nerozpadne se na části díky vzájemné přitažlivosti molekul. Je-li tato kapka na šikmé ploše, kde se může hýbat z místa na místo, voda poteče. Nestane se však, že by jednoduše zmizela. Věci se nerozpadají na části právě díky přitažlivosti molekul. Hemživý pohyb částic je to, co chápeme jako *teplota*: zvýšíme-li teplotu, zvětšíme pohyb. Zahříváme-li vodu, pohyb roste a roste i vzdálenost mezi částicemi, až nastane

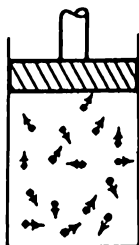
okamžik, kdy přitažlivost mezi molekulami je už nestačí udržet pohromadě. Částice přestanou být vzájemně svázané a rozletají se od sebe. Zvyšováním teploty tak získáváme vodní páru.

Na *obr. 1.2* vidíme páru. V jednom směru tento obrázek páry selhává: při našem zvětšení za normálního atmosférického tlaku připadá jen velmi málo molekul na celý pokoj, takže na tak malém obrázku určitě nebudou tři molekuly. Většina plošek této velikosti nebude obsahovat žádnou molekulu – na našem obrázku jsou náhodou dvě a část z třetí molekuly (abychom tam neměli prázdné místo). V případě páry vidíme podobu molekul jasněji než v případě vody. Pro jednoduchost jsou molekuly zakresleny tak, že atomy vodíku svírají úhel  $120^\circ$ . Ve skutečnosti má tento úhel hodnotu  $105^\circ 3'$  a vzdálenost mezi středem vodíku a středem kyslíku je  $9,57 \cdot 10^{-11}$  m. Tuto molekulu tedy velmi dobře známe.



Obr.1.2 Pára

Všimněme si jedné vlastnosti vodní páry nebo jiných plynů. Molekuly budou tím, že se vzdálily jedna od druhé, narážet na stěny. Představme si místnost s určitým počtem (tak kolem sta) neustále poskakujícími tenisovými míčky. Když míčky narážejí na stěnu, odtlačují ji a stěnu proto musíme upevnit. Plyn působí přerušovanou silou, kterou naše nedokonalé smysly (jejich citlivost nevzrostla miliardkrát) vnímají jako stálý tlak. Abychom plyn udrželi, musíme na něj působit tlakem z opačné strany. *Obr. 1.3* znázorňuje běžnou nádobu na udržování plynu, kterou najdeme v každé učebnici: válec s pístem. Teď nám nezáleží na tom, jaký je ve skutečnosti tvar molekul vody, a proto je kvůli jednoduchosti znázorníme jako tenisové míčky nebo body. Jsou v neustálém pohybu a pohybují se na všechny strany. Na spodek pístu jich neustále naráží tolik, že na něj musíme působit určitou silou dolů, aby ho molekuly nevytlačily z válce. Tuto sílu nazýváme *tlakem* (přesněji, tlak násobený plochou dává sílu). Je jasné, že síla je úměrná ploše pístu, protože zvětšíme-li plochu a přitom nezměníme počet molekul v kubickém centimetru, pak vzroste počet srážek s pístem tolikrát, kolikrát se zvětšila jeho plocha.



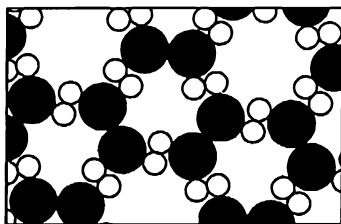
Obr.1.3

Nyní zdvojnásobme v této nádobě počet molekul, takže se zdvojnásobí jejich hustota, ale ponechme jim stejnou rychlost, tj. stejnou teplotu. Pak můžeme dost přesně říci, že se

zdvojnásobil počet srážek a jelikož je každá právě tak „energická“ jako dříve, tlak je úměrný hustotě. Uvážíme-li skutečnou povahu meziatomových sil, můžeme očekávat mírný pokles tlaku jako projev zvýšené přitažlivosti mezi atomy a mírný vzrůst související s objemem, který zaujmají. Přesto však, pokud je hustota dostatečně nízká, tj. atomů není příliš mnoho, můžeme s dostatečnou přesností říci, že *tlak je úměrný hustotě*.

Snadno pochopíme i něco jiného. Zvyšujeme-li teplotu bez změny hustoty plynu, tj. když zvětšujeme rychlost atomů, co se stane s tlakem? Atomy narážejí do pístu silněji, neboť se pohybují rychleji a navíc, narážejí častěji. Proto tlak vzrůstá. Vidíte, jak jednoduché jsou myšlenky atomové teorie.

Podívejme se na jinou situaci. Předpokládejme, že se píst pohybuje dovnitř, takže atomy jsou pomalu stlačovány do menšího prostoru. Co se stane, narazí-li atom do pohybujícího se pístu? Je jasné, že při takové srážce získá rychlost. Můžete si to vyzkoušet na ping-pongovém míčku: po úderu pálkou míček odletí od pátky rychleji, než k ní přiletěl. Ve zvláštním případě, není-li atom v pohybu a píst na něj narazí, se atom začne určitě pohybovat. Atomy jsou při návratu od pístu „teplejší“, než byly před nárazem na píst. Proto všechny atomy, které jsou v nádobě, získají na rychlosti. To znamená, že *při pomalém stlačení plynu jeho teplota vzrůstá*. Když plyn pomalu *stlačujeme*, jeho teplota *vzrůstá* a když plyn pomalu *rozpínáme*, jeho teplota *klesá*.



Obr. 1.4 Led

Vraťme se k naší kapce vody a podívejme se na ni z jiného pohledu. Snižme teplotu naší kapky. Předpokládejme, že hemžení molekul vody postupně slábne. Víme, že mezi atomy působí přitažlivé síly, které způsobí, že molekuly už nebudou moci tak snadno pohybovat. *Obr. 1.4* znázorňuje, co se stane při velmi nízkých teplotách: molekuly jsou vázány v nové struktuře, vytváří se *led*. Takové schematické znázornění ledu není správné, neboť je dvojrozměrné. Situaci však vystihuje kvalitativně. Je pozoruhodné, že každý atom má v této látce určité místo. Rozmístíme-li atomy na jednom konci kapky podle určitého pravidla, pak v důsledku pevné struktury meziatomových vazeb vznikne určité uspořádání atomů i na druhém konci kapky, vzdáleném (v našem měřítku) několik kilometrů. Proto, držíme-li ledový rampouch za jeden konec, jeho druhý konec bude při lámání klást odpor, chová se jinak než voda, ve které je pravidelná struktura rozrušena intenzivním pohybem atomů v rozličných směrech. Rozdíl mezi pevnými látkami a kapalinami spočívá v tom, že atomy pevné látky jsou uspořádány zvláštním způsobem. Toto uspořádání se nazývá *krystalická struktura*. I tehdy, kdy jde o velmi vzdálené atomy, nepozorujeme nic náhodného v jejich polohách. Poloha atomu na jednom konci krystalu je určena polohou atomu na druhém konci, i když se mezi nimi nacházejí miliony jiných atomů. *Obr. 1.4* znázorňuje vymyšlené uspořádání ledu a ačkoli správně vystihuje mnohé vlastnosti ledu, neodpovídá skutečnému uspořádání. Jedním ze správných rysů je existence části hexagonální symetrie. Můžete se o tom přesvědčit: otočíte-li obrázek o  $120^\circ$ , dostanete stejné seskupení. Taková symetrie ledu je příčinou šestihorného tvaru sněhových vloček. Další informací, kterou

je možné vytušit z obrázku 1.4, je zmenšování objemu ledu při tání. Znázorněná struktura ledu, stejně tak jako skutečná, obsahuje mnoho dutin. Když se struktura rozpadne, tyto dutiny mohou být zaplněny molekulami. Většina jednoduchých látek, s výjimkou vody a liteřiny, zvětšují při tání svůj objem, neboť atomy jsou v pevných krystalech těsně seskupeny a při tání potřebují více prostoru na kmitání. Otevřené struktury se však při tání zhroutí – podobně jako led.

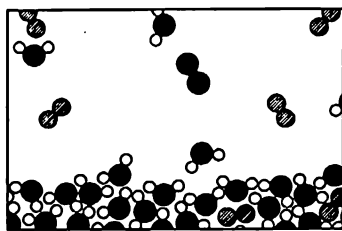
I když má led pevnou krystalickou strukturu, jeho teplota se může měnit – v ledu je zásoba tepla. Chceme-li, můžeme toto množství tepla změnit. Jaké je teplo, které se nachází v ledu? Atomy ledu nejsou v klidu, poskakují a kmitají. Ačkoli v krystalu existuje určité uspořádání – struktura – všechny atomy kmitají, „na místě“. Zvyšujeme-li teplotu, budou kmitat se stále větší amplitudou, až opustí svá místa. Tento jev nazýváme *táním*. Snižujeme-li teplotu, kmity slábnou a při teplotě absolutní nuly jsou nejslabší, ne však nulové. Toto nejmenší množství pohybu, který přísluší atomům, nestačí na roztání látky – až na jednu výjimku: hélium. V héliu se při ochlazení také zpomaluje pohyb atomů na nejmenší možnou míru, ale i při teplotě absolutní nuly brání tento pohyb zmrznutí hélia. Hélium nezmrzne, pokud nevytvoříme tak veliký tlak, abychom atomy stlačili k sobě. Při velkém tlaku můžeme dosáhnout toho, že hélium ztuhne.

### 1.3 ATOMOVÉ PROCESY

Dosud jsme si všimli stavby pevných látek, kapalin a plynů z atomového hlediska. Jenže atomová hypotéza charakterizuje i *procesy*, a proto si všimněme některých procesů z atomového hlediska. Nejdříve budeme hovořit o procesech, které se odehrávají na povrchu vody. Co se vlastně děje na vodním povrchu? Úlohu si zkomplikujeme – bude tak blíže skutečnosti – předpokladem, že nad vodním povrchem se nachází vzduch. *Obr. 1.5* takovou situaci znázorňuje. Tak jako předtím vidíme molekuly vody, které tvoří kapalinu, ale vidíme i povrch vody. Nad povrchem vidíme různé molekuly. Jsou tam především molekuly vody v podobě *vodní páry*, kterou je možné pozorovat vždy nad kapalnou vodou (pára a voda jsou v rovnováze, o které pohovoříme později). Dále tam nalezneme jiné molekuly, dvojice atomů kyslíku tvořící *molekulu kyslíku* a dvojice atomů dusíku tvořící *molekulu dusíku*. Vzduch se skládá téměř výhradně z dusíku, kyslíku, vodní páry a menšího množství oxidu uhličitého, argonu a jiných příměsí. Nad povrchem vody se nachází vzduch – plyn obsahující jisté množství vodní páry. Nyní si všimněme, co se odehrává na obrázku. Molekuly vody se neustále pohybují. Občas některá z molekul, nacházejících se v blízkosti povrchu, narazí na jinou molekulu trochu silněji než obvykle a vyskočí nad povrch. Na obrázku takovýto děj *přímo* nevidíte, neboť vše je na něm nehybné. Můžeme si však představit, že jedna molekula za druhou v důsledku srážek opouští vodu – voda mizí, vypařuje se. Když nádobu *přikryjeme*, objevíme po nějakém čase velké množství molekul vody mezi molekulami vzduchu. Čas od času některá z těchto molekul vody vletí zpět do vody a zůstává v ní. To, co jsme považovali za mrtvé a nezajímavé – *přikrytý* pohár vody, který snad dvacet let stál na jednom místě – v sobě skrývá stále probíhající zajímavý dynamický proces. Náš nedokonalý zrak nepozoruje žádnou změnu, ale při miliardovém zvětšení bychom viděli, jak se vše mění: jedny molekuly opouští povrch a druhé se vracejí.

Proč nepozorujeme tyto změny *my*? Protože do vody se vrací právě tolik molekul, kolik z ní odešlo. Navenek se „nic neděje“. Když odkryjeme nádobu, odfoukneme vlhký vzduch pryč a nahradíme ho suchým vzduchem, nezmění se počet z vody vylétajících molekul (neboť závisí pouze na pohybu ve vodě), ale velmi se změní počet molekul do vody se vracících, protože nad vodou je mnohem méně molekul. Molekul, které opouští vodu, je víc než molekul, které se do ní vracejí; voda se vypařuje. Chcete-li tedy, aby se voda vypařovala, zapněte ventilátor!

## ATOMY V POHYBU

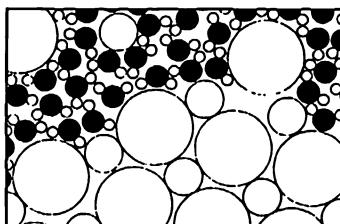


● kyslík    ○ vodík    ▨ dusík

Obr. 1.5 Vodavypařujícíse dovzduchu

Zůstává ještě otázka: Které molekuly opouštějí vodu? Molekula opustí vodu když náhodně získá malé množství dodatečné energie, kterou potřebuje na to, aby překonala přitažlivé působení svých sousedů. Protože ty molekuly, které opouštějí vodu, mají větší než průměrnou energii, budou se molekuly, které ve vodě zůstávají, v průměru pohybovat méně. Při vypařování se tedy kapalina postupně *ochlazuje*. Je samozřejmé, že když molekula páry sestoupí ze vzduchu do vody, objeví se silné přitahování, když molekula dosahuje povrchu vody. Důsledkem toho je zrychlení přicházející molekuly a s tím spojený vznik tepla. Můžeme tedy říci, že s odchodem molekul odchází a s příchodem molekul přichází teplo. Když jsou oba procesy vyrovnány, voda svou teplotu nemění. Foukáme-li na vodu, aby odpařování převládalo nad zkapalňováním, voda se ochlazuje. Proto, chcete-li ochladit polévku, foukejte na ni!

Musíme si však uvědomit, že procesy, o kterých jsme hovořili, probíhají ve skutečnosti složitěji. Při unikání vody do vzduchu čas od času některá z molekul kyslíku nebo dusíku vnikne do vody a „ztratí se“ mezi jejími molekulami. Vzduch se tedy rozpouští ve vodě. Molekuly kyslíku a dusíku pronikají do vody, která pak obsahuje vzduch. Když z nádoby náhle odstraníme vzduch, budou molekuly vzduchu unikat z vody rychleji, než do ní vnikají, což způsobí vystupování bublinek. Možná víte, že tato skutečnost je velmi nepříjemná pro potápěče.



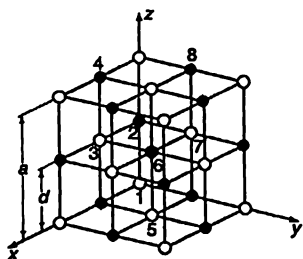
○ chlór    ○ sodík

Obr. 1.6 Sůlrozpuštějícíse ve vodě

Nyní si všimněme dalšího procesu. *Obr. 1.6* znázorňuje, jak se podle atomové představy rozpouští pevná látka ve vodě. Co se stane, vložíme-li krystal soli do vody? Sůl je pevná látka, krystal, organizované seskupení „atomů soli“. Na *obr. 1.7* je znázorněna trojrozměrná struktura kuchyňské soli, chloridu sodného. Máme-li být přesní, musíme říct, že krystal není tvořen atomy, ale *ionty*. Ionť je atom, který má několik elektronů navíc, nebo několik elektronů ztratil. V krystalu soli nalézáme ionty chlóru (atomy chlóru s přebytečným elektronem) a ionty sodíku

## CHEMICKÉ REAKCE

(atomy sodíku zbavené jednoho elektronu). Ionty jsou v krystalu vzájemně vázány elektrickou přitažlivostí, ale ve vodě se některé z nich pod vlivem přitažlivosti záporného kyslíku a kladného vodíku začínou uvolňovat. Na obrázku 1.6 vidíme uvolňující se iont chloru a jiné atomy plavající ve vodě ve formě iontů. Tento obrázek je pečlivě zakreslený. Všimněte si například, že vodíkové konce molekul vody obvykle obklopují iont chloru a u iontu sodíku zpravidla nalézáme kyslíkový konec, neboť sodík je kladný a kyslíkový konec molekuly vody je záporný a tyto se elektricky přitahují. Můžeme podle tohoto obrázku říci, jestli se sůl rozpouští ve vodě, nebo krystalizuje z vody? Samozřejmě, že *nemůžeme*, neboť zatím co jedny atomy opouštějí krystal, jiné se k němu připojují. Takovýto proces je – podobně jako vypařování – *dynamický* a všechno závisí na tom, je-li ve vodě více nebo méně soli, než je třeba k rovnováze. Rovnováhou rozumíme takovou situaci, kdy počet atomů opouštějících krystal je roven počtu atomů do krystalu se vracějících. Když sůl ve vodě téměř není, vstupuje do vody více atomů, než vystupuje a sůl se rozpouští. Když je, naopak, „atomů soli“ příliš mnoho, do krystalu se vrací více atomů, než ho opouští a sůl krystalizuje.



krystal	●	○	$a (10^{-10} \text{ m})$
sůl kamenná	Na	Cl	5,64
sylvín	K	Cl	6,28
	Ag	Cl	5,54
	Mg	O	4,20
galenit	Pb	S	5,97
	Pb	Se	6,14
	Pb	Te	6,34

Obr. 1.7 Vzdálenost nejbližších sousedů  $d = a/2$

Zmínili jsme se o tom, že představa *molekuly* látky je pouze přibližná a je opodstatněná jen pro určitou třídu látek. Je jasné, že v případě vody jsou její tři atomy skutečně svázané, ale v případě pevného chloridu sodného už to tak jasné není. V takovém případě jde o uspořádání sodíkových a chlorových iontů do krychlové mřížky a neexistuje přirozený způsob jejich uspořádání do „molekul soli“.

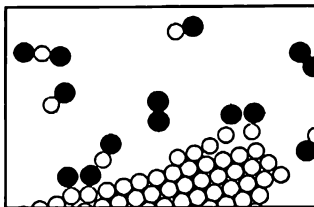
Vraťme se ještě k naší diskuzi o rozpouštění a srážení. Zvýšíme-li teplotu roztoku soli, vzroste počet atomů, které sůl opouštějí a vzroste i počet atomů, které se do soli vrací. Ukazuje se, že obecně je velmi těžké předpovědět, jak se ten proces realizuje, proběhne-li rozpouštění rychleji nebo pomaleji. S rostoucí teplotou se většina látek rozpouští lépe, ale některé látky se rozpouštějí hůře.

### 1.4 CHEMICKÉ REAKCE

Ve všech procesech, o nichž jsem dosud hovořil, neměnily atomy a ionty své partnery. Za určitých okolností však může dojít ke změně atomových kombinací, vytvoří se nové molekuly. Taková situace je znázorněna na *obr. 1.8*.



## ATOMY V POHYBU



Obr. 1.8 Uhlík hořící v kyslíku

Proces, ve kterém dochází k přeskupení atomových partnerů, nazýváme *chemickou reakcí*. Ostatní dosud uvažované procesy nazýváme fyzikálními procesy. Mezi uvedenými dvěma druhy procesů však neexistuje ostrá hranice. Příroda se nestará o naše názvosloví a pokračuje i nadále ve svém díle. Uvedený obrázek má znázornit hoření uhlíku v kyslíku. Kyslík se vyznačuje tím, že jeho dva atomy jsou velmi pevně svázány. (Proč nejsou svázány tři nebo dokonce čtyři atomy? Toto je jedna ze zvláštností atomových procesů. Atomy jsou velmi svérázné: upřednostňují určité partnery, určité směry apod. Úlohou fyziky je analyzovat, proč chtějí právě to, co chtějí. V každém případě dva atomy kyslíku, nasycené a šťastné, tvoří molekulu.)

Předpokládejme, že atomy uhlíku vytvářejí pevný krystal – grafit nebo diamant (diamant *může* shořet ve vzduchu). Uvažujme situaci, kdy se molekula kyslíku dostane k uhlíku, každý její atom zachytí atom uhlíku a odletí v novém seskupení – „uhlík-kyslík“. Toto seskupení představuje molekulu plynu nazývaného oxid uhelnatý. Jeho chemické označení je CO. Je to velmi jednoduché: písmena „CO“ jsou vlastně obrazem jeho molekuly. Jenže uhlík váže kyslík o mnoho silněji než kyslík váže kyslík nebo uhlík váže uhlík. Proto v tomto procesu může kyslík přicházet s malou energií, ale kyslík a uhlík se spojí velmi „energicky“ a uvolní energii pohltí okolní atomy. Tak se vytváří velké množství pohybové, kinetické energie. Myslíme tím samozřejmě hoření; spojením uhlíku a kyslíku získáváme *teplo*. Teplo se obvykle projevuje formou pohybu molekul horkého plynu, ale za určitých okolností ho může být tak mnoho, že způsobuje *světlo*. Tak vzniká *plamen*.

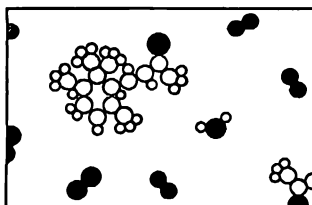
Kromě toho, oxid uhelnatý není zcela uspokojen. Je možné, aby k sobě připojil další atom kyslíku a tak dostaneme mnohem složitější reakci, ve které se kyslík spojuje s uhlíkem a současně dochází ke srážce s molekulou oxidu uhelnatého. Kyslíkový atom se připojí k CO a v konečném důsledku vytvoří molekulu složenou z jednoho uhlíku a dvou kyslíků. Tato molekula má označení CO<sub>2</sub> a nazývá se oxid uhličitý. Spalujeme-li uhlík ve velmi malém množství kyslíku a reakce probíhá velmi rychle (např. v motoru automobilu, kde je výbuch tak rychlý, že se nestačí vytvořit oxid uhličitý), vzniká velké množství oxidu uhelnatého. V mnoha takových přeskupeních atomů se uvolňuje velké množství energie, vznikají výbuchy, plamen apod., podle druhu reakce. Chemici studovali takové seskupení atomů a zjistili, že každá látka představuje určitý druh *uspořádání atomů*.

K objasnění této myšlenky si zvolme jiný příklad. Ocitneme-li se na louce rozkvetlé fialkami, víme, co je to „vůně“. Je to určitý druh molekul nebo seskupení atomů, které se dostalo do našeho nosu. Jak se nám to stalo? To je dost jednoduché! Jestliže vůně je jistý druh molekul, tím nejrozmanitějším způsobem poletujících a srážejících se ve vzduchu, pak se může náhodou dostat i do nosu. Tyto molekuly se určitě nesnažily dostat právě do našeho nosu. Jsou jen bezmocnou částí strkajících se zástupů molekul, jehož kousek se na svém bezcílném putování dostal do našeho nosu.

Chemici mohou i takové zvláštní molekuly, jako je vůně fialek, podrobit analýze a říci nám *přesné uspořádání* jejich atomů v prostoru. Víme, že molekula oxidu uhličitého je přímá

## CHEMICKÉ REAKCE

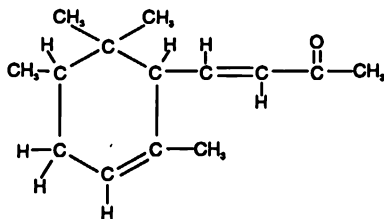
a symetrická: O–C–O (lze to snadno zjistit i fyzikálními metodami). I pro mnohem složitější seskupení atomů, jako jsou ty, se kterými pracuje chemie, můžeme zdoluhavým, pozoruhodným procesem, připomínajícím práci detektiva, zjistit tvar seskupení. *Obr. 1.9* znázorňuje vzduch v blízkosti fialky: ve vzduchu opět nalézáme dusík, kyslík a vodní páru. (Odkud se vzala vodní pára? Fialka je vlhká, protože všechny rostliny odpařují vodu.) Vidíme však i „monstrum“ složené z uhlíkových, vodíkových a kyslíkových atomů, které vytvořily zcela určité, zvláštní seskupení. Je to mnohem složitější seskupení než v případě oxidu uhličitého. Naneštěstí do obrázku nemůžeme zakreslit všechno, co o něm po chemické stránce víme, neboť seskupení všech atomů je trojrozměrné, zatímco náš obrázek je pouze dvojrozměrný. Šest uhlíků vytváří ne plochý, ale „zvrásněný“ prstenec. Všechny úhly a vzdálenosti známe. Chemický vzorec je jen obrázkem takové molekuly. Když chemik napíše vzorec na tabuli, snaží se „nakreslit“ dvojrozměrný obraz molekuly. Například, vidíme „prstenec“ šesti uhlíků a na jednom konci visící „řetěz“ uhlíků, na něm kyslík druhý od konce, tři vodíky vázané na tento uhlík, dva uhlíky a tři vodíky vázané nahoře atd.



Obr. 1.9 Vůně fialek

Jak chemik zjistí, o jaké uspořádání jde? Smíchá obsah dvou lahvíček a když se směs zbarví červeně, ví, že látka obsahuje jeden vodík a dva uhlíky vázané na určité místo molekuly. Zbarví-li se směs modře, je to úplně jinak. To je organická chemie – jeden z nejfantastičtějších kousků detektivní práce. Aby objevil uspořádání atomů v neobyčejně komplikovaných útvech, chemik sleduje, co se děje při smíchání dvou rozdílných látek. Fyzik by nikdy zcela neuvěřil, že chemik ví, o čem mluví při popisu uspořádání atomů. Jenže asi před dvaceti lety se objevila fyzikální metoda umožňující v některých případech pozorovat molekuly (ne tak složité, jako je molekula vůně fialky, ale takové, které obsahují části této molekuly). Touto metodou je možné lokalizovat každý atom, a to ne sledováním zbarvení směsi, ale *měřením skutečné polohy atomů*. A světe, div se! Ukázalo se, že chemici měli téměř vždy pravdu.

Zjistilo se, že vůně fialky obsahuje tři málo se lišící molekuly, jejichž rozdílnost spočívá pouze v jiném uspořádání vodíkových atomů.



Obr. 1.10 Strukturální vzorec vůně fialky ( $\alpha$ -iron)

Jedním z problémů chemie je tvorba chemického názvosloví. Každé molekule musíme najít jméno! Toto jméno musí ukazovat nejen její tvar, ale musí vyjadřovat i to, že tu je kyslíkový atom, tam vodíkový – musí říkat, kde přesně ten který atom je. Takto pochopíme, že chemické názvy musí být složité, aby byly úplné. Název fialkové vůně má v podobě prozrazující strukturu následující znění: 4-(2,2,3,6-tetrametyl-5-cyklohexanyl)-3-buten-2-on. Teď chápeme obtíže, se kterými chemici zápolí a rovněž chápeme příčinu tak dlouhých názvů. Není to proto, že by chemici chtěli být záhadnými, ale je to proto, že bojují s velmi obtížným problémem popisu molekuly slovy.

Jak víme, že atomy existují? Používáme k tomu trik, o kterém jsme se již zmínili: *předpokládáme* jejich existenci a všechny výsledky, jeden po druhém, vycházejí tak, jak by měly, kdyby se látka skládala z atomů. Existují i přímější důkazy. Příkladem takového důkazu je následující skutečnost. Atomy jsou tak malé, že je nemůžeme vidět pomocí světelného mikroskopu – dokonce ani pomocí *elektronového* mikroskopu. (Světelným mikroskopem je možné vidět jen věci mnohonásobně větší.) Atomy jsou však v neustálém pohybu a když vložíme do vody nějaký míček, který je mnohem větší než atomy, bude poskakovat. Bude se chovat podobně, jak se chová velký míč postrkovaný při hře velkého množství lidí. Lidé postrkují míč různými směry a ten se pohybuje po hřišti nepravidelně. Právě tak se bude pohybovat „velký míč“ ve vodě, neboť v různých okamžicích na něj budou z různých stran dopadat nestejně údery. Proto při sledování velmi malých částic (koloidů) ve vodě pomocí výborného mikroskopu pozorujeme jejich neustálé poskakování jako následek toho, že jsou bombardovány atomy. Tento jev se nazývá *Brownův pohyb*.

Další důkaz existence atomů můžeme vidět ve struktuře krystalů. V mnoha případech souhlasí struktury odvozené na základě rentgenové analýzy svými prostorovými „tvary“ s formami samotných přírodních krystalů. Úhly mezi různými krystalickými „stěnami“ souhlasí s přesností na úhlové vteřiny s úhly určenými za předpokladu, že krystal je tvořen mnoha „vrstvami“ atomů.

*Vše se skládá z atomů.* To je klíčová hypotéza. Například v celé biologii je nejdůležitější hypotézou to, že *vše, co dělají živočichové, dělají atomy.* Jinými slovy, *v živých věcech není nic, co by nemohlo být pochopeno z pohledu, že se skládají z atomů podléhajících fyzikálním zákonům.* To nebylo vždy známo: k formulování této hypotézy bylo třeba mnoha experimentů i teoretických úvah. Dnes je tato hypotéza uznávána a je nejužitečnější teorií pro vytváření nových myšlenek v oblasti biologie.

Jestliže kousek oceli nebo kousek soli skládající se z uspořádaných atomů může mít tak zajímavé vlastnosti, jestliže voda – která není ničím jiným než těmi malými kapkami stejnými na celé Zemi – může tvořit vlny a pěnu, hučet přibojem a vytvářet podivné tvary omýváním břehů, jestliže toto všechno, celý život vodního proudu nemůže být ničím jiným než hromada atomů, *co víc je ještě možné?* Jestliže namísto uspořádání atomů podle určitého, stále opakovaného vzoru, nebo jestliže namísto tvorby malých, ale složitých shluků, jako je vůně fičky, seskupíme atomy *v každém místě jinak*, různé druhy atomů seskupíme různými způsoby tak, aby se nic neopakovalo, o co úžasněji se může takováto věc chovat? Je možné, že „věci“, které se před vámi procházejí a baví se s vámi, jsou velké shluky těchto atomů velmi složitým způsobem seskupené, takže pouhá naše představivost nestačí předpovědět jejich chování? Jestliže říkáme, že jsme shlukem atomů, nemyslíme tím, že jsme *jen* shlukem atomů, protože takový shluk atomů, který se nikdy neopakuje, může vypadat právě tak jako to, co vidíte v zrcadle.

---

# PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

Při řešení následujících úloh používejte myšlenky a metody vyložené v 1. kapitole, a také svou vlastní zkušenost a představivost. O přesné číselné hodnoty výsledků se příliš nestarejte.

- 1.1 ■ Za normálních podmínek je hustota vzduchu rovna přibližně  $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , zatímco hustota kapalného vzduchu je asi  $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .
  - a) Odhadněte počet molekul v  $1 \text{ m}^3$  plynného a kapalného vzduchu.
  - b) Odhadněte hmotnost „molekuly vzduchu“.
  - c) Vypočítejte střední vzdálenost, kterou molekula vzduchu projde mezi dvěma po sobě následujícími srážkami s jinými molekulami za normálního tlaku a teploty. Tato vzdálenost se nazývá *střední volná dráha*.
  - d) Odhadněte tlak, na jaký je třeba vyčerpat vakuový systém, aby střední volná dráha v něm byla rovna 1 m.
- 1.2 ■ Kdysi dávno ve starší době kamenné dopadla kapka odpoledního deště na měkkou rovnou zem a zanechala na ní otisk. Čas uběhl a tohoto otisku si při vykopávkách všiml student geologie trpící horkem a žízní. Zatímco vyprazdňoval svou láhev, z dlouhé chvíle odhadoval, kolik molekul této pravěké kapky bylo ve vodě, kterou právě vypil. Odhadněte i vy počet těchto molekul, pouze na základě údajů, které už znáte. O podrobnostech, které nejsou v podmínkách úlohy uvedeny, udělejte rozumné předpoklady.
- 1.3 ■ Děj se odehrává někde v Kalifornii. Na parapet vedle otevřeného okna někdo postavil sklenici s vodou.
  - a) Jak dlouho podle vašeho mínění bude sklenice stát, než se z ní všechna voda odpaří?
  - b) Kolik molekul se přitom bude odpařovat z každého čtverečního centimetru vodního povrchu za sekundu?
  - c) Existuje spojitost mezi odpovědí na otázku (a) a průměrným množstvím dešťových srážek za rok? Jestliže ano, jaká?
- 1.4 ■ Všechna tělesa se skládají z atomů, které jsou v neustálém pohybu. Jak je tedy možné, že si předměty uchovávají stálý tvar, někdy dokonce velmi dlouhou dobu, jako například zkameněliny?
- 1.5 ■ Můžete vysvětlit, proč neexistují krystaly se stěnami ve tvaru pravidelných pětiúhelníků, zatímco trojúhelníky, čtverce a šestiúhelníky se u krystalů vyskytují běžně?
- 1.6 ■ Jak závisí tlak plynu  $p$  na počtu atomů v jednotce objemu  $n$  a na střední rychlosti atomů  $\langle v \rangle$ ? Bude tlak  $p$  přímo úměrný  $n$  a  $\langle v \rangle$  nebo bude tato závislost jiná?
- 1.7 ■ Jestliže teplo není nic jiného než pohyb molekul, čím se pak liší horký „baseballový“ míček, který je v klidu, od studeného, který letí velkou rychlostí?
- 1.8 ■ Vysvětlete, proč a jak vzniká teplo při tření mezi dvěma pohybujícími se částmi stroje.
- 1.9 ■ Chemici zjistili, že molekuly gumy jsou tvořeny dlouhými vzájemně se křížícími řetízky atomů. Vysvětlete, proč se guma při roztahování zahřívá.
- 1.10 ■ Co se stane s gumičkou, na níž je zavěšeno závaží, když ji zahřejeme? Přesvědčte se pokusem.
- 1.11 ■ Máte k dispozici velké množství ocelových kuliček o stejném průměru  $d$  a nádobu známého objemu  $V$ . Všechny rozměry nádoby jsou mnohem větší, než je průměr kuliček. Jaký největší počet kuliček se vejde do nádoby?

# Základy fyziky

## 2

### 2.1 ÚVOD

### 2.2 FYZIKA PŘED ROKEM 1920

### 2.3 KVANTOVÁ FYZIKA

### 2.4 JÁDRA A ČÁSTICE

#### 2.1 ÚVOD

V této kapitole budeme zkoumat nejzákladnější myšlenky, s nimiž se ve fyzice setkáváme – budeme hovořit o tom, jak si v současnosti představujeme povahu věcí. Nebudeme však hovořit o tom, jak se poznala správnost těchto představ – o těchto detailech se dozvíte v pravý čas.

Věci, o něž se v naší vědě zajímáme, se nám ukazují množstvím projevů a atributů. Stojíme-li například na břehu a hledíme na moře, vidíme vodu, na vodě pěnu, nad mořem oblaka, slunce, modrou oblohu a vůbec světlo, slyšíme zvuk, nárazy vln, svištění větru, cítíme vzduch. Na břehu je písek a skály, a každá má jinou tvrdost a pevnost, barvu a složení. Jsou tam zvířata a vodní tráva, je tam hlad i nemoc a na břehu je pozorovatel se svými myšlenkami a snad i štěstím. Každé jiné místo v přírodě se vyznačuje podobnou pestrostí věcí a vlivů, podobnou složitostí. Naše zvědavost nás nutí klást otázky, hledat souvislosti a chápat mnohotvárnost věcí jako následek snad relativně malého počtu nejjednodušších věcí a sil působících nekonečně rozmanitě.

Klademe si otázku: Je písek jiný než skály? Není snad písek nic jiného, než velký počet velmi malých kamínek? Je Měsíc velká skála? Kdybychom porozuměli tomu, co jsou skály, znamená to, že bychom pochopili i podstatu písku a Měsíce? Co je to vítr? Jsou to nárazy vzduchu podobné nárazům vody na břeh? Jaké společné rysy mají rozličné druhy pohybu? Co mají společného různé druhy zvuku? Kolik různých barev existuje? A tak dále. Takovým způsobem se snažíme postupně analyzovat všechny věci. Dáváme do souvislostí věci, které na první pohled vzájemně nesouvisí. Děláme to s nadějí, že se nám podaří *redukovat* počet *rozličných věcí* a tak je lépe poznat.

Před několika sty lety vznikla metoda hledání částečných odpovědí na uvedené otázky. *Pozorování, usuzování a experiment* vytvářejí to, co nazýváme *vědeckou metodou*. Budeme se muset omezit jen na holý popis našich představ o tom, co se nazývá *základní fyzikou* nebo základními myšlenkami, které vznikly aplikováním vědecké metody.

Co to znamená něco „pochopit“? Můžeme si představit, že to složité nahromadění pohybujících se věcí, které vytvářejí „svět“, je šachová hra bohů a my vystupujeme jako diváci, kteří neznají pravidla hry, ale je jim dovoleno hru *pozorovat*. Samozřejmě, pozorujeme-li

dostatečně dlouho, můžeme nakonec pochytit několik pravidel. *Pravidla hry* představují to, co chápeme jako *základní fyziku*. I kdybychom znali všechna pravidla, nemuseli bychom ještě rozumět každému kroku hry, protože je příliš složitá a možnosti našeho rozumu omezené. Hrajete-li šachy, jistě víte, že je jednoduché naučit se všechna pravidla, ale i tak je velmi těžké zvolit ten správný tah nebo pochopit záměry protihráče. Stejně je to i s přírodou, jen mnohem těžší. Máme však možnost najít alespoň všechna pravidla. Zatím je všechna neznáme. (Každou chvíli se objevuje něco takového jako je rošáda, kterou ještě neznáme.) Nejen, že neznáme všechna pravidla, ale pomocí těch, která známe, umíme jen velmi málo vysvětlit. Je tomu tak proto, že téměř všechny situace jsou ohromně složité a známá pravidla nám neumožní sledovat všechny obraty hry, nemluvě o předvídání dalších kroků. Musíme se proto omezit na základnější otázku pravidel hry. Naučíme-li se pravidla, budeme to považovat za „pochopení“ světa.

Jak můžeme rozhodnout, zda pravidla, která vlastně jen „odhadujeme“, jsou skutečně správná, když nemůžeme dokonale analyzovat hru? Existují zhruba tři způsoby. Především nám příroda může poskytnout (nebo my si od přírody vynutíme) jednoduché situace skládající se z malého počtu částí, umožňující přesnou předpověď budoucího dění, a tím i zkoušku pravidel. (V rohu šachovnice zůstalo jen málo figurek, jejichž tahy již umíme přesně určit.)

Druhý způsob zkoušky pravidel spočívá v jejich použití k odvození obecnějších pravidel. Například, střelec se na šachovnici pohybuje úhlopříčně. Odtud je možné usuzovat na skutečnost, že určitý střelec bude vždy na bílém poli. Odhlédneme-li od podrobností, můžeme prověřovat naše pravidlo o pohybu uvedeného střelce tak, že sledujeme, jestli se vždy nachází na bílém poli. Po dlouhém čase se samozřejmě může stát, že se náhle objeví na černém poli (v průběhu hry byl vzat, ale jeden pěšec došel na konec šachovnice a proměnil se na střelce na černém poli). Tak to bývá i ve fyzice. Dlouho používané pravidlo, které ve všech směrech dobře vyhovuje, ačkoliv neznáme detaily, a potom najednou objevíme *nové pravidlo*. Z hlediska základů fyziky probíhají nejzajímavější jevy na *nových* místech, na místech, kde pravidla neplatí a ne tam, kde pravidla *platí!* To je způsob, jakým objevujeme nová pravidla.

Třetí ze způsobů, kterými se můžeme přesvědčit o správnosti našich myšlenek, je poměrně hrubý, ale snad neúčinnější. Je to způsob přibližného odhadu. Ačkoliv nejsme schopni říci, proč Aljechin táhl *právě tou figurkou*, můžeme v *hrubých rysech* chápat, že seskupuje figurky okolo krále, aby ho chránil, protože za daných okolností je to nejrozumnější. Podobně je to i s naším chápáním přírody. Často ji více či méně chápeme, aniž bychom byli schopni znát význam tahu *každé jednotlivé figurky*.

Zpočátku se přírodní jevy hrubě rozdělovaly do tříd jako teplo, elektřina, mechanika, magnetismus, vlastnosti látek, chemické děje, světlo nebo optika, rentgenové paprsky, jaderná fyzika, gravitace, mezonové jevy atd. Cílem je však pochopení *celé přírody* jako různých aspektů *jednoho souboru* jevů. Úkolem základní teoretické fyziky dneška je *nalezení zákonů stojících za experimentem, sjednocení uvedených tříd*. Historicky se nám vždy podařilo sloučit je, ale postupem času se objevovaly nové věci. Když jsme si již vytvořili ucelenou představu, objevily se najednou rentgenové paprsky. Když se i tento jev dostal do jednotného schématu, objevily se mezony. Proto v každém stádiu hry vypadá situace dost chaoticky. Mnohé se objasnilo z jednotného hlediska, ale ještě stále je mnoho volných konců nitek, o nichž nevíme, kam patří. Takový je dnes stav věcí a my se ho pokusíme popsat.

Všimněme si v historii několika příkladů uvedeného sjednocování. Uvažujme nejdříve *teplo* a *mechaniku*. Jsou-li atomy v pohybu, obsahuje systém tím více tepla, čím více pohybu v něm je, takže *teplo* a *všechny tepelné efekty* je možné *vyjádřit pomocí zákonů mechaniky*. Dalším úžasným sjednocením bylo objevení souvislosti mezi elektřinou, magnetismem a světlem, o nichž se

zjistilo, že jsou různými aspekty stejné věci, kterou dnes nazýváme *elektromagnetické pole*. Dále chemické děje, rozmanité vlastnosti různých látek a chování atomových částic byly sjednoceny do *kvantové chemie*.

Zůstává zde však otázka, zda bude možné vše sjednotit tak, abychom mohli prohlásit, že svět představuje rozmanité aspekty jediné věci? To nikdo neví. Víme pouze, že na naší cestě vpřed se nám daří spojovat fragmenty, přičemž vždy nalézáme cosi, co nezapadá do obecného obrazu, a proto se opět pokoušíme doplnit skládačku. Nevíme, zda tato skládačka má konečný počet částí a zda má tato hra vůbec hranice. Dozvíme se to až tehdy, když složíme výsledný obraz, jestli ho vůbec kdy složíme. Chtěli bychom však ukázat, kam až tento proces sjednocování pokročil a jaká je dnešní situace při objasňování základních jevů pomocí co nejmenšího počtu principů. Jednodušeji řečeno: *z čeho jsou složeny věci a kolik je těch stavebních prvků?*

## 2.2 FYZIKA PŘED ROKEM 1920

Je dost těžké začít hned se současnými představami, a proto se podívejme, jak se jevil svět v roce 1920 a potom na tomto obrázku něco změníme. Naše představa světa byla před rokem 1920 následující: „Scénou“, na které vystupuje vesmír, je trojrozměrný geometrický prostor popsán ještě Euklidem a věci se mění v prostředí, které nazýváme časem. Prvky vystupující na scéně jsou *částice*, například atomy, které mají určité *vlastnosti*. Především vlastnost setrvačnosti: pohybuje-li se částice, zachová si pohyb v původním směru, pokud na ni nepůsobí *síly*. Druhým prvkem jsou tedy *síly*, o nichž se tehdy předpokládalo, že jsou dvojitě druhu. K prvnímu, velmi složitěmu druhu, patřila síla vzájemného působení, která udržovala atomy v jejich různých kombinacích komplikovaným způsobem a byla zodpovědná za to, jestli se sůl při zvyšování teploty rozpouští rychleji nebo pomaleji. Druhou známou silou byla interakce dalekého dosahu – hladké a klidné přitahování. Tato síla, měnící se nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti, byla nazvána *gravitací*. Její zákon byl známý a byl velmi jednoduchý. *Proč* věci zůstávají v pohybu, když se už začaly pohybovat, nebo *proč* existuje gravitační zákon, bylo, samozřejmě, neznámé.

Zabýváme se popisem přírody. Z tohoto hlediska je plyn a právě tak všechna hmota myriádou pohybujících se částic. Takto se dostávají do souvislosti mnohé věci, které jsme viděli na mořském břehu. Tlak pochází od srážek atomů se stěnami nebo s čímkoliv jiným; atomy pohybující se převážně jedním směrem vytvářejí vítr; *chaotické* vnitřní pohyby představují *teplo*. Známe vlny zvýšené hustoty, kde se shromáždilo příliš mnoho částic, které při rozletu stlačují další shluky částic a pohyb se tak předává dál. Tyto vlny vyšší hustoty představují *zvuk*. Pochopení tolika věcí je možno považovat za úžasný úspěch. O některých z těchto věcí jsme hovořili v předcházející kapitole.

Jaké *druhy* částic existují? Tehdy předpokládali, že je jich 92. Nakonec bylo objeveno 92 různých druhů atomů. Měly různá jména podle svých chemických vlastností.

Byl tu ještě problém *povahy sil krátkého dosahu*. Proč uhlík přitahuje jeden kyslík, případně dva, ale ne víc? Jaký je mechanismus vzájemného působení mezi atomy? Je to gravitace? Na tuto otázku musíme odpovědět záporně, protože gravitace je na to příliš slabá. Představme si však sílu podobnou gravitaci, měnící se nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti, ale mnohem silnější a odlišnou ještě v jednom směru. V případě gravitace jde vždy o přitahování. Představme si však, že existují *dva druhy* „věcí“ a tato nová síla (samozřejmě elektrické povahy) má tu vlastnost, že věci stejného druhu se *odpuzují* a věci různého druhu se *přitahují*. „Předmět“, jenž je nositelem tohoto silného vzájemného působení, se nazývá *náboj*.

K čemu jsme došli? Předpokládejme, že máme dvě věci různého druhu, jež se vzájemně

přitahují (plus a minus) a které drží těsně u sebe. Předpokládejme, že v určité vzdálenosti od uvedeně dvojice máme další náboj. Bude tento náboj pocítovat přitažlivost? Mají-li první dva náboje stejnou velikost, neměl by pocítit *prakticky žádnou přitažlivost*, protože přitahování jedním nábojem a odpuzování druhým nábojem se vykompenzují. Ve velkých vzdálenostech je tedy síla velmi malá. Když třetí náboj *hodně přiblížíme* k prvním dvěma, objeví se přitahování, protože odpuzování stejných nábojů a přitahování různých se snaží oddálit stejné náboje a přiblížit různé. Odpuzování bude nakonec *slabší než přitahování*. To je příčina, proč atomy, které se skládají z kladných a záporných elektrických nábojů, na sebe téměř nepůsobí (zanedbáme-li gravitaci), jsou-li od sebe dost vzdáleny. Když se ale přiblíží, mohou „*vidět jeden do druhého*“, přeskupit své náboje a velmi silně vzájemně působit. Podstatou interakce mezi atomy je *elektrické působení*. Tato síla je tak veliká, že všechny plusy a minusy se obvykle dostávají do tak těsné kombinace, jak je to jen možné. Všechny věci, včetně nás samotných, se skládají z drobných, velmi silně interagujících kladných a záporných částic, které jsou velmi přesně vyvážené. Na okamžik je možné náhodou odstranit několik minusů nebo plusů (obvykle je jednodušší odstranit minusy), v tu chvíli jsou elektrické síly *nevyvážené* a můžeme pozorovat působení elektrické přitažlivosti.

Abychom si vytvořili představu o tom, o kolik je elektrické působení silnější než gravitace, představme si dvě zrnka písku, která mají jeden milimetr v průměru a jsou vzdálená třicet metrů. Kdyby elektrické síly mezi nimi nebyly vyvážené, kdyby nebylo odpuzování a vše se navzájem přitahovalo a nic se nekompenzovalo, jakou silou by se zrnka přitahovala? Byla by to síla tří miliónů tun. Jistě chápete, že pro vytvoření značného elektrického působení stačí velmi malý přebytek nebo nedostatek záporných nebo kladných nábojů. Proto není vidět rozdíl mezi elektricky nabitým a nenabitým předmětem – pro nabití předmětu je třeba tak málo částic, že se téměř neprojeví na jeho hmotnosti, či rozměru.

S těmito poznatky bylo jednodušší pochopit atomy. Předpokládalo se, že mají uprostřed „jádro“, které je kladně elektricky nabitě a velmi těžké, a toto jádro je obklopeno určitým počtem „elektronů“, jež jsou velmi lehké a záporně nabitě. Teď trochu pokročíme v našem výkladu a poznamenáme, že v samotných jádrech byly objeveny dva druhy částic – protony a neutrony, které mají téměř stejnou, velmi velkou hmotnost. Protony jsou elektricky nabitě a neutrony jsou neutrální. Máme-li atom se šesti protony v jádře, které je obklopeno šesti elektrony (záporné částice obyčejného světa jsou všechno elektrony a ty jsou velmi lehké v porovnání s protony a neutrony, které tvoří jádra), půjde o atom číslo šest v chemické tabulce a tento atom se nazývá uhlík. Atom číslo osm se nazývá kyslík atd. Chemické vlastnosti závisí na *vnějších* elektronech, ve skutečnosti jen na tom, *kolik* má atom elektronů. *Chemické* vlastnosti látek tedy závisí na jediném čísle, na počtu elektronů. (Seznam prvků sestavený chemiky by se mohl nahradit očíslováním 1, 2, 3, 4, 5 atd. Místo toho, abychom řekli „uhlík“, stačilo by říci „prvek číslo šest“, což by znamenalo, že prvek má šest elektronů. Při objevování prvků však tato skutečnost nebyla známa a dále, při číslování by vše vypadalo velmi složitě. Proto je lepší ponechat prvkům názvy i symboly a nedožadovat se pouhého očíslování.)

O elektrické síle bylo získáno mnoho dalších poznatků. Bylo by přirozené předpokládat, že elektrická interakce je jednoduché přitahování dvou předmětů: kladného a záporného. Zjistilo se však, že toto není úplně vhodná představa. Situaci lépe vystihuje představa, že existence kladného náboje v prostoru způsobuje jeho jisté zakřivení, vytváří v něm určitou „podmínku“, aby záporný náboj vložený do tohoto prostoru cítil působení síly. Tato možnost vzniku síly se nazývá *elektrické pole*. Dostane-li se elektron do elektrického pole, je jakoby „tažen“. Přitom platí dvě pravidla: a) náboje vytvářejí pole, b) v poli působí na náboje síly a náboje se pohybují.



Příčina takového chování se stane jasnější, jakmile rozebereme následující jev: Nabijeme-li těleso elektricky, například hřebenu, a do určité vzdálenosti položíme nabitý ústřížek papíru, přičemž začneme hřebenem pohybovat sem a tam, bude se papír natáčet směrem k hřebenu. Zrychlíme-li pohyb hřebenu, zjistíme, že papír zaostává, působení se opoždí. (V prvním stádiu, když pohybuje hřebenem poměrně pomalu, zkomplikuje nám situaci *magnetismus*. Magnetické vlivy se projevují, když jsou *náboje v relativním pohybu*, takže magnetické a elektrické síly je možné skutečně připsat jedinému poli jako dvě stránky jedné věci. Mění se elektrické pole nemůže existovat bez magnetizmu.) Oddálíme-li nabitý papír, zpoždění je větší. V tu chvíli pozorujeme zajímavou věc. Ačkoliv se síly působící mezi dvěma nabitými předměty mění nepřímou úměrně čtverci vzdálenosti, při kmitání náboje zjišťujeme, že jeho působení se rozprostírá mnohem dále, než by se dalo očekávat. Pokles tohoto působení je mnohem pomalejší než při nepřímé úměrnosti čtverci vzdálenosti.

S analogickou situací se setkáváme, když na vodě plave splávek a my ho uvedeme do pohybu „přímo“ tím, že způsobíme pohyb vody jiným splávkem. Kdybyste se dívali jen na dva *splávky*, pozorovali byste pouze to, že jeden se dává do pohybu jako odezva na pohyb druhého, že mezi nimi existuje určitá „interakce“. Ve skutečnosti jsme ale rozčeřili *vodu* a *voda* posunula druhý splávek. Mohli bychom zformulovat „zákon“, že i při slabém zčeření vody se na vodě budou pohybovat předměty nacházející se blízko zdroje zčeření. Kdyby byl druhý splávek dost daleko, sotva by se dal do pohybu, neboť jsme uvedli vodu do pohybu jen v jednom místě. Bude-li však druhý splávek pravidelně kmitat, vznikne nový úkaz, při kterém se pohyb vody přenáší dál, vzniká *vlnění* a vliv poskakujícího splávku již nemůžeme chápat jako přímé působení mezi splávkami. Myšlenku přímé interakce tedy musíme nahradit předpokladem o existenci vody nebo v případě elektrických nábojů tím, co nazýváme *elektromagnetickým polem*.

Elektromagnetické pole může přenášet vlny. Některé z těchto vln jsou *světlo*, jiné se používají při *rádiovém vysílání*, ale obecně se nazývají *elektromagnetickými vlnami*. Tyto vlny mohou mít rozmanité *frekvence*. Jediné, čím se jedna vlna liší od druhé, je právě *frekvence vlnění*. Kdybychom pohybovali nábojem sem a tam a dělali bychom to stále rychleji a rychleji, objevovala by se celá řada různých jevů, které je možné systematizovat udáním čísla vyjadřujícího počet kmitů za sekundu. Frekvence, s nimiž přicházíme do styku prostřednictvím běžných rozvodových elektrických sítí v domech, jsou řádově sto kmitů za sekundu. Zvýšíme-li frekvenci na 500 kHz nebo 1000 kHz (1 kHz = 1000 kmitů za sekundu), dostáváme se z domů ven, „na vzduch“, neboť máme co činit s frekvencemi používanými při rozhlasovém vysílání. (Se vzduchem to ale nemá co dělat! Rádiové vlny se mohou šířit i v prostoru, v němž není vzduch.) Zvyšujeme-li frekvenci, dostáváme se do oblasti VKV a televizního vysílání. Při ještě vyšších frekvencích máme velmi krátké vlny, které se využívají např. v *radiolokaci*. Kdybychom šli ještě výše, nepotřebovali bychom už zařízení na registraci takových vln, protože bychom je viděli naším zrakem. Kdybychom dokázali pohybovat nabitým hřebenem tak rychle, aby kmital s frekvencemi od  $5 \cdot 10^{14}$  Hz do  $5 \cdot 10^{15}$  Hz, viděli bychom toto kmitání jako červené, modré nebo fialové světlo v závislosti na frekvenci. Frekvence pod touto oblastí nazýváme infračervenými a nad touto oblastí ultrafialovými. Skutečnost, že naše vidění je omezeno na určitou frekvenční oblast, nedělá tuto oblast elektromagnetického spektra z fyzikálního hlediska důležitější než jiné oblasti, avšak z lidského hlediska je tato oblast přece jen zajímavější. Kdybychom frekvenci ještě zvýšili, dostali bychom rentgenové paprsky. Tyto paprsky nejsou nic jiného, než světlo s velmi vysokou frekvencí. Ještě vyšším frekvencím odpovídá záření gama. Výrazy rentgenové paprsky a záření gama jsou téměř synonyma. Zářením gama nazýváme obvykle elektromagnetické vlny pocházející z jader a rentgenovými paprsky vlny pocházející z atomů; při shodě jejich frekvencí

jsou však fyzikálně nerozlišitelné, bez zřetele na jejich původ. Vlny ještě vyšších frekvencí, řekněme  $10^{24}$  Hz, lze získat uměle, například na synchrotronu v Caltechu. Elektromagnetické vlny úžasně vysokých frekvencí (až tisíckrát vyšších) je možné najít ve vlnách *kosmického záření*. Tyto vlny však neumíme ovládat.

Tabulka 2.1 Elektromagnetické spektrum

Frekvence v Hz	Název	Přibližné chování
$10^2$	střídavé proudy	Pole
$5 \cdot 10^5 - 10^6$	rádiové vlny	} Vlny
$10^8$	VKV – TV	
$10^{10}$	radiolokace	
$5 \cdot 10^{14} - 10^{15}$	světlo	
$10^{18}$	rentgenové záření	} Částice
$10^{21}$	$\gamma$ -záření jaderné	
$10^{24}$	$\gamma$ -záření umělé	
$10^{27}$	$\gamma$ -záření kosmických paprsků	

## 2.3 KVANTOVÁ FYZIKA

Když jsme načrtli představu elektromagnetického pole, v němž se mohou šířit vlny, brzy zjistíme, že tyto vlny se chovají nezvykle, jako kdyby to ani vlny nebyly. Při vyšších frekvencích se více podobají *částicím*! Jejich neobvyklé chování vysvětluje *kvantová mechanika*, jejíž vznik je spojován s obdobím těsně po roce 1920. Před rokem 1920 pozměnil Einstein obraz trojrozměrného prostoru a nezávislého času nejdříve na kombinaci, kterou nazýváme *prostorčasem* a potom na *zakřivený* prostorčas, aby vystihl gravitaci. „Scéna“ se změnila na prostorčas a o gravitaci předpokládáme, že je modifikací prostorčasu. Zjistilo se dokonce, že zákony pro pohyb částic jsou nepřesné. Mechanické zákony „setrvačnosti“ a „sily“ jsou *nesprávné* – Newtonovy zákony *neplatí* ve světě atomů. Zjistilo se, že věci se v malém měřítku chovají *úplně jinak* než věci ve velkém měřítku. To dělá fyziku obtížnou, ale velmi zajímavou. Obtížnou proto, že chování věcí malých rozměrů je pro nás „nepřirozené“, nemáme v tomto směru přímé zkušenosti. Věci se tu chovají úplně jinak, než jsme zvyklí, a proto není možné popsat jejich chování jinak, než analyticky. Takový popis je těžký a vyžaduje mnoho představivosti.

Kvantová mechanika má mnoho zvláštností. Především vylučuje předpoklad, že částice má určitou polohu a určitou rychlost. Abychom ukázali, do jaké míry je klasická fyzika správná, uvedeme pravidlo kvantové mechaniky, které říká, že není možné současně vědět, kde se něco nachází a jak rychle se to pohybuje. Neurčitost v hybnosti a neurčitost v poloze jsou komplementární a jejich součin je konstantní. Můžeme to zapsat následujícím způsobem:  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \pi$ . Podrobněji budeme o tomto principu mluvit později. Vysvětluje se tím velmi záhadný paradox: jsou-li atomy složeny z kladných a záporných nábojů, proč se záporný náboj

prostě neusadí na kladném náboji (tyto náboje se přitahují) a to tak těsně, že by ho úplně vyrušil? *Proč jsou atomy tak velké?* Proč je jádro uprostřed a elektrony okolo něho? Zpočátku se myslelo, že příčinou je velký rozměr jádra; jenže jádro je *velmi malé*. Atom má průměr okolo  $10^{-10}$  m. Jádro má průměr asi  $10^{-15}$  m. Kdybychom měli atom a chtěli bychom vidět jeho jádro, museli bychom ho zvětšit tak, aby dosáhl velikosti místnosti a i potom by bylo jádro malé jako skvrnka, kterou sotva spatříte okem, ale téměř *všechna hmotnost* atomu připadá na toto nepatrné jádro. Co brání elektronu prostě spadnout na jádro? Právě uvedený princip. Kdyby elektrony byly v jádru, znali bychom přesně jejich polohu a princip neurčitosti by si potom vyžadoval, aby měly velmi *velkou* (ale neurčitou) hybnost, tj. velmi velkou *kinetickou energii*. S takovou energií by se odtrhly od jádra. Dochází proto ke kompromisu: elektrony si ponechají jakýsi prostor pro tuto neurčitost a potom se ve shodě s tímto pravidlem pohybují s jistým minimálním množstvím pohybu. (Vzpomeňte si, že atomy krystalu při ochlazení na absolutní nulu neustaly ve svém pohybu, ale přece jen kmitaly. Proč? Kdyby se přestaly pohybovat, věděli bychom, kde se nacházejí a že mají nulový pohyb a to by bylo v rozporu s principem neurčitosti. Nemůžeme vědět, kde jsou a jak rychle se pohybují; proto atomy musí neustále kmitat!)

Jinou, velmi zajímavou změnou v ideách a filozofii vědy, kterou přinesla kvantová mechanika, je nemožnost *přesně* předpovědět, co se za jakýchkoli daných okolností odehraje. Například, je možné připravit atom, který bude emitovat světlo, a můžeme zjistit, kdy k této emisi došlo tím, že zachytíme foton (o tomto si brzy řekneme více). Nemůžeme však dopředu předpovědět, kdy se skuteční emise světla, nebo v případě více atomů, *který z nich* bude emitovat světlo. Možná se domníváte, že je to proto, že v atomu se nacházejí jakási vnitřní „kolečka“, která jsme ještě nerozeznali. Ne, taková vnitřní kolečka neexistují! Příroda, tak jak ji dnes chápeme, se chová tak, že je *principiálně nemožné* přesně předpovědět, co se *skutečně stane* v daném experimentu. To je ale úžasná věc, neboť filozofové nejdříve tvrdili, že jedním ze základních požadavků vědy je, aby se všude za stejných podmínek děly stejné věci. To však *není pravda* – to *není* základní podmínka vědy. Faktem zůstává, že se nestanou stejné věci a my můžeme pouze v průměru, pouze statisticky zjistit, co se děje. Jenomže věda se zcela nezhroutila. Mimochodem, filozofové hodně mluví o tom, co je pro vědu *absolutně nevyhnutelné*, ale to je vždy (je možné se o tom přesvědčit) dost naivní a pravděpodobně nesprávné. Například, nějaký filozof anebo někdo jiný řekl, že pro vědecké úsilí je podstatné, že experiment uskutečněný například ve Stockholmu musí vést k *týmž výsledkům* jako stejný experiment uskutečněný v Quitu. To je ale zcela nesprávné. Takováto podmínka není pro vědu nevyhnutelná. Mohla by vyplynout na základě zkušeností, ale není to nevyhnutelné. Například, je-li jedním z experimentů pozorování polární záře ve Stockholmu, pak v Quitu nic takového neuvídíte, neboť tam se tento jev nevyskytuje. Můžete namítnout, „že v tomto případě jde o něco vnějšího, co souvisí s okolím“. Můžete se ptát, zda zpozorujete rozdíl, když se ve Stockholmu uzavřete v bytě a spustíte žaluzie? Určitě! Když v bytě zavěsíte kyvadlo a rozkývete ho, bude se kývat téměř v rovině, jenže ne úplně. Ve Stockholmu se bude rovina kyvu pomalu měnit, ale v Quitu ne; i když stáhnete žaluzie. Skutečnost, že se něco takového stává, neznamena zhroutení vědy. Co je tedy základním předpokladem vědy, její základní filozofie? Již jsme to vyjádřili v první kapitole: *všlučnou prověrkou platnosti jakékoli myšlenky je experiment*. Když se ukáže, že většina experimentů vede ke stejným výsledkům v Quitu i ve Stockholmu, pak je možné tuto „většinu experimentů“ použít pro formulaci nějakého obecného zákona a ty experimenty, které nevedou ke stejným výsledkům, budeme považovat za následek vlivu okolí Stockholmu. Budeme používat různé způsoby vyhodnocení výsledků experimentu, ale dopředu nám nikdo nesmí předepisovat, jaké to mají být způsoby. Když nám někdo řekne, že stejný experiment povede vždy ke stejnému výsledku, je to jistě pěkné, ale jestliže zkouška ukáže, že

tomu tak není, pak tomu tak opravdu *není*. Musíme věřit pouze tomu, co vidíme a pak formulovat své myšlenky na základě našich reálných zkušeností.

Opět se vrátíme ke kvantové mechanice a základní fyzice, ale nebudeme zabíhat do podrobností kvantověmechanických principů, protože jsou dost těžké k pochopení. Budeme prostě předpokládat jejich existenci a ukážeme, k jakým následkům vedou. Jedním z následků je, že věci, které jsme považovali za vlny, se chovají jako částice a částice zase jako vlny; ve skutečnosti se tedy všechno chová stejně. Není rozdíl mezi vlnou a částicí. Kvantová mechanika sjednocuje myšlenku pole, jeho vln a částic v jedno. Při nízkých frekvencích je aspekt pole více zřejmý, resp. užitečnější pro přibližný popis vyjádřený řečí naší každodenní zkušenosti. Se vzrůstem frekvence však zařízení, které obvykle používáme v experimentu, poskytuje spíše důkazy o částicích. I když mluvíme o vysokých frekvencích, musíme přiznat, že v oblasti frekvencí nad  $10^{12}$  Hz nebyl zatím zjištěn žádný jev přímo související s frekvencí. K existenci vyšších frekvencí docházíme pouze *úvahou* vycházející z energie částic a předpokladu správnosti vlnově-korpuskulární představy kvantové mechaniky.

Takto docházíme i k novému pohledu na elektromagnetickou interakci. Kromě elektronu, protonu a neutronu existuje nový druh *částice*. Tuto částici nazýváme *foton*. Nový pohled na interakci elektronů a protonů, tj. elektromagnetickou teorii, která zároveň splňuje zákonitosti kvantové mechaniky, nazýváme *kvantovou elektrodynamikou*. Tato základní teorie interakce světla a hmoty, nebo elektrického pole a nábojů, je dosud největším úspěchem fyziky. V této jediné teorii máme základní zákony, jimiž se řídí všechny známé jevy s výjimkou gravitace a jaderných procesů. Pomocí kvantové elektrodynamiky můžeme vysvětlit všechny známé zákony mechaniky, elektřiny a chemie. Plynou z ní zákony srážek kulečnickových koulí, pohyb vodičů v magnetickém poli i tepelná kapacita oxidu uhelnatého, barva neonových reklam, hustota soli, reakce vodíku a kyslíku při vzniku vody – to vše jsou následky jediného zákona. Všechny tyto detaily je možné získat, je-li situace dost jednoduchá na to, abychom ji mohli přibližně popsat. To sice není splněno téměř nikdy, často však můžeme pochopit více či méně, co se vlastně děje. Dosud se neobjevily žádné výjimky ze zákonů kvantové elektrodynamiky, až na atomová jádra. O jádrech však nemůžeme říci, jestli jde v jejich případě o výjimku, protože vlastně nevíme, jaké procesy v nich probíhají.

V podstatě je kvantová elektrodynamika teorií celé chemie a všech životních procesů, je-li možné život v konečném důsledku redukovat na chemii, nebo vlastně na fyziku, protože chemie vede k fyzice (a ta část fyziky, která která se uplatňuje v chemii, je již dobře známá). Navíc, kvantová elektrodynamika – ta úžasná vědní disciplína – předpověděla mnoho nových věcí. Především mluví o vlastnostech fotonů velmi velkých energií, paprscích gama apod. Předpověděla i jinou, velmi pozoruhodnou věc: kromě elektronu musí existovat jiná částice se stejnou hmotností, ale s opačným nábojem, tzv. *pozitron* a elektron s pozitronem mohou při srážce anihilovat, přičemž se vyzáří světlo nebo paprsky gama (což je vlastně totéž, neboť světlo i záření gama se liší polohou ve frekvenční škále elektromagnetických vln). Zobecnění poznatku, že ke každé částici existuje antičástice se ukazuje být pravdivým. V případě elektronů má antičástice jiné jméno – nazývá se pozitronem, ale u většiny jiných částic mluvíme o anti-tom a tom, např. o antiprotonu nebo antineutronu. Do kvantové elektrodynamiky se vkládají *dvě čísla* a o většině ostatních čísel ve světě se předpokládá, že jsou následkem těchto dvou. Tato dvě vkládaná čísla nazýváme hmotností a nábojem elektronu. Ve skutečnosti to však není úplně tak, neboť máme celý soubor chemických čísel, která hovoří o tom, jak těžká jsou jádra. To nás přivádí k další kapitole.

## 2.4 JÁDRA A ČÁSTICE

Z čeho jsou jádra a jak drží pohromadě? Zjistilo se, že jádra jsou udržována obrovskými silami. Při uvolnění těchto sil se uvolňuje energie, která je obrovská v porovnání s chemickou energií, tak jak je obrovský výbuch atomové bomby v porovnání s výbuchem trinitrotoluenu. U atomové bomby jde totiž o změny uvnitř jádra, zatímco výbuch trinitrotoluenu souvisí se změnami elektronového obalu atomů. Proto si klademe otázku: co jsou to za síly, které udržují protony a neutrony v jádře pohromadě? Tak, jako je možné elektrické působení přisoudit částici – fotonu, předpokládal Yukawa, že i síly mezi neutrony a protony mají svá pole a kmity tohoto pole se chovají jako částice. Kromě neutronů a protonů by proto měly existovat jiné částice a Yukawa odvodil vlastnosti těchto částic z již známých charakteristik jaderných sil. Například, předpověděl, že by měly mít hmotnost dvěstě až třístakrát větší než elektron; a div se světu – v kosmickém záření byly objeveny částice s takovou hmotností! Později se ukázalo, že to nebyla ta správná částice. Tuto částici nazvali  $\mu$ -mezon neboli mion.

Trochu později, v roce 1947 nebo 1948, byla objevena jiná částice,  $\pi$ -mezon neboli pion, která vyhovovala Yukawovu kritériu. Abychom získali jaderné síly, musíme k protonu a neutronu přidat pion. A teď si řeknete: „Och, jak velkolepé! – pomocí této teorie vybudujeme nukleodynamiku, ve které budou mít piony takovou úlohu, jakou jim přisoudil Yukawa a všechno bude vysvětleno“. Ta věc má však háček! Ukázalo se, že výpočty v této teorii jsou tak složité, že se dodnes nikomu nepodařilo odvodit všechny důsledky této teorie, nebo ji porovnat s experimentem; a to se už táhne spoustu let!

Máme tedy teorii, ale nevíme, jestli je správná nebo nesprávná. Víme však už, že je trochu chybná, nebo aspoň neúplná. Zatím co jsme marnili čas teorií a snažili se odvodit její důsledky, experimentátoři některé věci objevili. Například, objevili  $\mu$ -mezon neboli mion a my ani nevíme, jaká je jeho úloha. V kosmickém záření se našel velký počet dalších „přebytečných“ částic. Dnes máme přibližně třicet takových částic<sup>2)</sup> a je velmi těžké porozumět vztahům mezi těmito částicemi a pochopit, na co je příroda potřebuje, nebo která z nich na které závisí. Dnes tyto různé částice nechápeme jako různé aspekty téže věci a skutečnost, že máme tak mnoho nesouvisících částic, je odrazem toho, že máme tak mnoho nesouvisících informací bez dobré teorie. Po ohromném úspěchu kvantové elektrodynamiky máme jisté znalosti z jaderné fyziky, ale jen hrubé znalosti, částečně experimentální a částečně teoretické. Vycházíme přitom z charakteru sil působících mezi protony a neutrony a sledujeme, co z toho vyplyne, ale v podstatě nechápeme, odkud ty síly pocházejí. Kromě toho nebylo dosaženo téměř žádného pokroku. Objevili jsme velký počet chemických prvků. Mezi těmito prvky se najednou objevila souvislost, neočekávaná souvislost zakotvená v Mendělejevově periodické tabulce prvků. Například, sodík a draslík jsou téměř shodné ve svých chemických vlastnostech a v Mendělejevově tabulce se nacházejí ve stejném sloupci. Hledala se tabulka Mendělejevova typu pro nové částice. Taková tabulka nových částic byla sestavena nezávisle Gell-Mannem v USA a Nishijimou v Japonsku. Základem jejich klasifikace je nové číslo, jež je možno, podobně jako elektrický náboj, přiřadit každé částici a které se nazývá její „podivnost“  $S$  (od anglického slova strangeness). Toto číslo se, podobně jako elektrický náboj, zachovává v reakcích vyvolávaných jadernými silami.

<sup>2)</sup> Dnes by Feynman napsal „přibližně tři sta takových částic“. (Pozn. red.)

KVANTOVÁ FYZIKA

Tab. 2.2 představuje seznam všech částic.<sup>3)</sup> Ted' o nich ještě nebudeme podrobně mluvit, ale tabulka vám aspoň prozradí, jak málo toho zatím víme. Pod symbolem každé částice je udána její hmotnost v jednotkách nazývaných MeV. Jeden MeV odpovídá  $1,782 \cdot 10^{-30}$  kg. Důvod pro zavedení těchto jednotek je historický a nás teď nebude zajímat. Hmotnější částice jsou v tabulce umístěny výše. Je vidět, že neutron a proton mají téměř stejnou hmotnost. Ve stejných sloupcích se nacházejí částice se stejným elektrickým nábojem, neutrální částice jsou v prostředním sloupci, kladně nabitě v pravém a záporně nabitě v levém sloupci.

Tabulka 2.2 Elementární částice<sup>4)</sup>

HMOTNOST V GeV	NÁBOJ			SKUPINA A PODIVNOST
	-e	0	+e	
1,4	$\Upsilon_1^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$	$\Upsilon_1^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$	$\Upsilon_1^+ \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$	S=2
1,3	$\Xi^-$ 1319	$\Xi^0$ 1311		S=2
1,2	$\Sigma^-$ 1198	$\Sigma^0$ 1191	$\Sigma^+$ 1189	S=1
1,1		$\Lambda^0$ 1115		S=1
0,9		n 939	p 938	S=0
0,7	$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$	$\Omega^0 \rightarrow \Xi^+ + \pi^-$	$\Omega^+ \rightarrow \Xi^+ + \pi^+$	S=0
0,7				S=0
0,4	$K^-$ 494	$K^0, \bar{K}^0$ 498	$K^+$ 494	S=-1 +1
0,1	$\pi^-$ 139,6	$\pi^0$ 135,0	$\pi^+$ 139,6	S=0
0	$e^-$ 0,51	$\nu^0$ 0		LEPTONY

3) Tj. částic známých začátkem 60. let 20. století. Dnes by byla tato tabulka mnohem rozsáhlejší, kromě podivnosti by musela zahrnout další kvantová čísla částic: půvab (charm, C), krásu (beauty, B), pravdivost (truth, T). (Pozn. red.)

4) Částice označená jako Y je jedna z prvních objevených baryonových rezonancí, dnes se značí  $\Sigma_{1385}$  a má podivnost S=1. (Pozn. red.)

Částice jsou podtrženy spojitou a „rezonance“ přerušovanou čarou. Některé částice jsou v tabulce vynechány. V tabulce nejsou uvedeny důležité částice s nulovou hmotností a nulovým nábojem – foton a graviton, které nezapadají do klasifikačního schématu baryonů, mezonů a leptonů. Nejsou tam ani některé novější rezonance ( $K^*$ ,  $\phi$ ,  $\eta$ ). Antičástice mezonů jsou v tabulce uvedeny, pro antičástice leptonů a baryonů by bylo třeba sestavit novou tabulku, lišící se od naší tabulky tím, že by byla zrcadlově obrácená vzhledem k prostřednímu sloupci. Ačkoli všechny částice kromě elektronu, neutrína, fotonu, gravitonu a protonu jsou nestabilní, produkty jejich rozpadu jsou zaznamenány jen pro rezonance. Označení podivnosti nelze aplikovat na leptony, neboť ty s jádrem silně nereagují.

Částice, jež jsou v tabulce uvedeny spolu s neutronem a protonem, se nazývají *baryony*. Je to „lambda“ s hmotností 1115 MeV a tři „sigmy“ nazývané sigma-minus, sigma-nula a sigma-plus, které mají téměř stejné hmotnosti. Existují skupiny, neboli multiplety, s téměř stejnými hmotnostmi (lišícími se jen o 1 až 2 %). Každá částice multipletu má stejnou podivnost. Prvním multipletem je proton-neutronový dublet, potom je v tabulce singlet (lambda), potom sigma triplet a nakonec ks dublet. V roce 1961 byly objeveny i některé další částice. *Jsou to však částice? Žijí jen velmi krátce, téměř okamžitě po vytvoření se rozpadají, a proto nevíme, je-li možné je považovat za nové částice nebo za „rezonanční“ působení mezi  $\Lambda$  a  $\pi$  částicemi, na něž se rozpadají při určité energii.*

Jiné částice, jež se společně s baryony účastní jaderných interakcí, nazýváme *mezony*. Především máme tři druhy pionů: kladný, záporný a neutrální, které tvoří další multiplet. Byly objeveny i nové částice nazývané K-mezony (kaony), které se vyskytují jako dublet  $K^+$  a  $K^0$ . Ke každé částici přísluší antičástice, pokud by samotná částice nebyla *svou vlastní* antičásticí. Například,  $\pi^-$  a  $\pi^+$  jsou si navzájem antičásticemi, ale  $\pi^0$  je svou vlastní antičásticí. Antičásticemi jsou  $K^-$  s  $K^+$  a  $K^0$  s  $\bar{K}^0$ . Kromě toho byly v roce 1961 objeveny další mezony, nebo spíše jakoby mezony, které se téměř okamžitě rozpadají. Jednu takovou věc nazýváme  $\omega$ , která má v uvedené stupnici hmotnost 780 a rozpadá se na tři piony. Poněkud méně jistý je objekt označený  $\rho$ , který se rozpadá na dva piony. Částice nazývané mezony a baryony a antičástice mezonů jsou ve stejné tabulce, ale antičástice baryonů je třeba seřadit do jiné tabulky – zrcadlově vzhledem ke sloupci nulového náboje.

Mendělejevova tabulka byla velmi dobrá až na to, že existuje skupina prvků vzácných zemin, které k ní byly volně připojeny. Také k naší tabulce je volně připojena skupina částic, které nemají co dělat se silnými jadernými silami a s jádry silně neinteragují – nedávají jadernou energii.

Tyto částice nazýváme *leptony*. Patří k nim elektron, jenž má velmi malou hmotnost, jen 0,510 MeV. Dále k nim patří mion, který je 206-krát hmotnější než elektron. Všechny dosavadní experimenty poukazují na to, že rozdíl mezi elektronem a mionem je jen v hmotnosti. Vše, co platí pro elektron, platí i pro mion, s tím rozdílem, že jeden je lehčí a druhý těžší. Proč existuje i těžší částice, to nevíme. Kromě nich existuje neutrální lepton, který nazýváme neutrino, a který má nulovou hmotnost. Dnes vlastně už víme, že existují *dva* druhy neutrína; jeden druh souvisí s elektrony a druhý s miony.

A známe ještě dvě částice, které neinteragují silně s jadernými částicemi: jednou je foton, a má-li gravitační pole i kvantověmechanickou analogii (kvantová teorie gravitace zatím není vypracována), pak druhou takovou částicí je graviton s nulovou hmotností.

Co znamená „nulová hmotnost“? Hmotnosti, jež uvádíme, jsou hmotnosti částic *v klidu*. Skutečnost, že částice má nulovou hmotnost, vlastně znamená, že částice *nemůže být v klidu*. Foton nikdy není v klidu, neustále se pohybuje rychlostí 300 000 km/s. Pojem hmotnost lépe pochopíme, až se později seznámíme s teorií relativity.

Poznali jsme velký počet částic, které se zdají být základními složkami hmoty. Naštěstí se ne všechny tyto částice liší ve svých vzájemných působeních. Ve skutečnosti existují mezi částicemi jen čtyři druhy interakcí. Sestavíme-li pořadí podle poklesu síly, pak jsou to: jaderná síla, elektrické interakce, interakce při beta rozpadu, gravitace. Foton váže všechny nabitě částice a sílu této interakce je možné charakterizovat určitým číslem, konkrétně  $1/137$ . Detailní zákon této interakce je znám – je to kvantová elektrodynamika. Gravitace se váže na každou energii, ale její vazba je velmi slabá, mnohem slabší než v případě elektřiny. I tento zákon je známý. Potom máme tzv. slabé rozpady – beta rozpad, při němž se neutron poměrně pomalu rozpadá na proton, elektron a neutrino. Tento zákon známe jen částečně. Tzv. silné interakce, jakými jsou interakce mezonů a baryonů, mají v této stupnici sílu 1 a jejich zákon ještě neznáme, ačkoli některá pravidla, například, že počet baryonů se v žádné reakci nemění, už známe.

Tabulka 2.3 Elementární interakce

Vazba	Síla*	Zákon
Foton s nabitými částicemi	$\sim 10^{-2}$	zákon známe
Gravitace s energií	$\sim 10^{-40}$	zákon známe
Slabé rozpady	$\sim 10^{-5}$	zákon známe částečně
Mezony s baryony	$\sim 1$	zákon neznáme (známe některá pravidla)

\* „Síla“ zde označuje bezrozměrnou míru vazbové konstanty projevující se v každé interakci ( $\sim$  znamená „přibližně“).

Tak úžasná je tedy situace, v níž se nachází současná fyzika. Stručně ji můžeme zhodnotit následujícím způsobem: zdá se, že mimo jádro víme všechno; i v jádru však platí kvantová mechanika – nebylo pozorováno selhání principů kvantové mechaniky. Scéna, ke které se váže všechno naše poznání, je relativistický prostoročas a není vyloučeno, že je v něm zahrnuta i gravitace. Nevíme, jak vesmír vznikl a nikdy jsme neuskutečnili experimenty, které by přesněověřily naše představy o prostoru a čase v případě velmi malých vzdáleností, takže víme jen to, že naše představy jsou správné pro dostatečně velké vzdálenosti. Je možné dodat, že pravidly hry jsou kvantověmechanické principy a tyto principy, jak víme, platí jak pro staré, tak i pro nové částice. Původ sil v jádrech nás přivádí k novým částicím. Naneštěstí je jich mnoho a jen ne zcela chápeme jejich vzájemné vztahy, ačkoli už víme, že některé z těchto vztahů jsou velmi překvapující. Zdá se, že se postupně přibližujeme k pochopení světa subjaderných částic, ale nevíme, jak daleko ještě budeme muset jít při řešení tohoto úkolu.<sup>5)</sup>

<sup>5)</sup> Od doby, kdy byla napsána tato kniha, poznání částic a jejich vzájemných interakcí dále pokročilo, mimo jiné i zásluhou samotného Feynmana. Mezony a baryony nazýváme společným názvem hadrony a předpokládáme, že se skládají z kvarků. Síly mezi kvarky zprostředkují částice zvané gluony. Nová teorie, která se snaží vysvětlit interakce kvarků, se nazývá kvantová chromodynamika. Pokud jde o slabé rozpady, podařilo se teoreticky i experimentálně objevit nové částice, které je způsobují; jsou to tzv. intermedialní bosony. (Pozn. red.)



# V 3 ztah fyziky k jiným vědám

---

## 3.1 ÚVOD

## 3.2 CHEMIE

## 3.3 BIOLOGIE

## 3.4 ASTRONOMIE

## 3.5 GEOLOGIE

## 3.6 PSYCHOLOGIE

## 3.7 JAK VŠECHNO VZNIKLO?

### 3.1 ÚVOD

Fyzika je nejzákladnější a vše zahrnující vědou a má hluboký vliv na celý vědecký rozvoj. Fyzika je vlastně dnešním ekvivalentem toho, co se nazývalo *přirodní filozofií*, z níž vznikla většina moderních věd. Studenti mnoha vědních oborů studují fyziku, neboť má základní úlohu ve všech jevech. V této kapitole se pokusíme vysvětlit základní problémy jiných věd, ačkoli na tak malém prostoru není možné skutečně vystihnout krásu těchto disciplín v celé šíři a ve všech detailech. Nedostatek místa nám nedovoluje diskutovat o vztahu fyziky k technickým vědám, průmyslu, společnosti a válce, nebo dokonce o nejpozoruhodnějším vztahu mezi matematikou a fyzikou. Z našeho hlediska není matematika vědou v tom smyslu, že by byla *přirodní vědou*. Zkouškou její platnosti není experiment. Musíme však hned na počátku zdůraznit, že není-li něco věda, nemusí to být nutně špatné. Například, láska není věda. Jestliže tedy o něčem řekneme, že to není věda, neznamená to, že je v tom nějaká chyba; prostě – není to věda.

### 3.2 CHEMIE

Věda, snad nejvíc ovlivňovaná fyzikou, je chemie. Ve svých začátcích se zabývala téměř výlučně tím, co dnes nazýváme anorganickou chemií, chemií látek, které se nevážou k živým věcem. Bylo třeba velkého analytického úsilí k objevení mnoha prvků a jejich vzájemných vztahů – toho, jak vytvářejí různé, relativně jednoduché sloučeniny vyskytující se ve skalách, zemi atd. Tato raná chemie byla pro fyziku velmi důležitá. Obě vědy se vzájemně silně ovlivňovaly, neboť teorie o atomech spočívala ve velké míře na experimentech v chemii. Teorie chemie, tj. teorie samotných reakcí, je do značné míry shrnuta v Mendělejevově periodické tabulce, která objasňuje mnoho podivuhodných vztahů mezi různými prvky a která byla sbírkou pravidel pro slučování látek tvořících anorganickou chemii. Všechna tato pravidla byla nakonec v principu vysvětlena kvantovou mechanikou, takže teoretická chemie je ve skutečnosti fyzikou. Na druhé straně je třeba zdůraznit, že jde o vysvětlení v *principu*. Už jsme mluvili o rozdílu mezi naučením se pravidel šachové hry a schopností hrát. I když známe pravidla, nemusíme umět dobře hrát. Ukazuje se, že je velmi těžké přesně předpovědět, co se stane v dané chemické reakci, ale ta nejpodstatnější část teoretické chemie musí zakotvit v kvantové mechanice.

Existuje mimořádně důležité odvětví fyziky a chemie, které obě vědy rozvíjely společně. Je to metoda statistiky aplikovaná na situaci, v níž platí mechanické zákony a která se podle toho nazývá *statistickou mechanikou*. Jakákoli chemická situace zahrnuje velký počet atomů a již jsme viděli, že všechny atomy se pohybují nepravidelným a složitým způsobem. Kdybychom uměli analyzovat každou srážku a sledovat detailně pohyb každé molekuly, měli bychom naději se dozvědět, co se stane. Ale počet údajů potřebných ke sledování všech molekul natolik překračuje kapacitu každého počítače a určitě i kapacitu mozku, že bylo třeba vyvinout metodu ke zvládnutí tak složitých situací. Statistická mechanika je věda o tepelných jevech neboli termodynamice. Anorganická chemie se jako věda redukovala v podstatě na fyzikální chemii a kvantovou chemii. Fyzikální chemie studuje rychlosti, s jakými se reakce uskutečňují a detailně si všímá, co se vlastně odehrává (jak se molekuly srážejí, které části odletí první apod.). Kvantová chemie nám řeší fyzikálních zákonů pomáhá pochopit, co se odehrává.

Dalším odvětvím chemie je *organická chemie*, chemie látek, které souvisejí s živými organismy. Dlouho se věřilo, že látky vázané na živou hmotu jsou tak úžasné, že je není možné vytvořit lidskou rukou z anorganických materiálů. To vůbec není pravda – jsou právě takové jako látky anorganické chemie, jen obsahují složitější uspořádání atomů. Organická chemie, samozřejmě, úzce souvisí s biologií, která je zdrojem jejích látek, a s průmyslem. Na organické sloučeniny (právě tak jako na anorganické) je možné aplikovat velkou část fyzikální chemie a kvantové mechaniky. V tom však nespočívají hlavní problémy organické chemie. Ty jsou spíše v analýze a syntéze látek vytvářených v biologických systémech, v živých organizmech. To vede krok za krokem směrem k biochemii a pak přes molekulární biologii k biologii samotné.

### 3.3 BIOLOGIE

Tak jsme se dostali k další vědě – *biologii*, která studuje živé objekty. V počátcích biologie se biologové zabývali čistě popisným problémem zjišťování, *jaké* jsou živé věci, a tak museli počítat například chloupky na nožičkách blechy. Když tato s velkým zájmem prováděná práce skončila, začali biologové zkoumat mechanismy uvnitř živých těl. Nejdříve samozřejmě z hrubého pohledu, neboť proniknutí k jemným detailům si vyžádalo mnoho úsilí.

Již tehdy existoval zajímavý vztah mezi fyzikou a biologii, který se projevil v tom, že biologie pomohla fyzice objevit *zákon zachování energie*. Poprvé ho demonstroval Mayer v souvislosti s množstvím tepla přijatého a odevzdaného živými tvory.

Podíváme-li se pozorněji na biologické procesy u živočichů, zpozorujeme *mnoho* fyzikálních jevů: krevní oběh, přečerpávání, tlak atd. Všimněme si nervů: víme, co se stane, když šlápneme na ostrý kámen a víme, že informace o tom se nějak nohou dostane nahoru. Probíhá to velmi zajímavým způsobem. Při studiu nervů dospěli biologové k závěru, že nervy jsou velmi jemné trubice se složitou a velmi tenkou stěnou. Skrz tuto stěnu buňky čerpají ionty tak, že kladné ionty jsou na vnější a záporné na vnitřní straně, podobně jako v kondenzátoru. Takováto membrána má zajímavou vlastnost. Když se „vybije“ na jednom místě, tj. když některé z iontů byly schopny projít membránou v jednom místě, takže elektrické napětí se tam snížilo, pocítí toto elektrické působení i sousední ionty a to ovlivní membránu natolik, že propustí i ionty sousedních míst. Tento průnik iontů zase ovlivní sousední místa a tak vznikne vlna „pronikání“ membránou, která se šíří podél vlákna, když byla „vybuzena“ na jednom konci tím, že jsme stoupli na ostrý kámen. Tato vlna je podobná pohybu, který nastane v dlouhé řadě vertikálně postavených kostek domina. Když shodíme kostku domina na jednom konci, ta svalí svého souseda a tak to půjde dále. Takto se, samozřejmě, přenesou jen jedna zpráva, pokud bychom dominové kostky znovu nepostavili. Podobně je to i v nervové buňce, existují v ní procesy, které pomalu přečerpávají ionty a připravují tak nerv na přenesení dalšího impulzu. Tak se dovídáme, co děláme (nebo aspoň kde jsme). Elektrické jevy provázející tento nervový impulz je možné zaznamenat elektrickými zařízeními a jde-li o elektrické efekty, bude mít fyzika elektrických jevů značný vliv na pochopení tohoto úkazu.

Opačný je jev, při němž je odkudsi z mozku vyslána zpráva podél nervu. Co se stane na konci nervu? Tam se nerv rozvětluje na jemná vlákna, spojená se zvláštní strukturou v blízkosti svalu, jež se nazývá ukončovací destička. Z důvodů, jež nejsou přesně známy, se tehdy, kdy impulz dosáhne konce nervu, vystřelují malá množství chemické látky nazývané acetylcholin (pět až desetimolekulová dávka) a ovlivňují svalovou tkáň tak, že se smršťuje. Jak je to jednoduché! Co nutí sval se stáhnout? Sval představuje velmi velký počet těsně uložených vláken, obsahujících dvě různé látky: myozín a aktomyozín. Mechanismus, jímž chemická reakce, vyvolaná acetylcholinem, může pozměnit rozměry molekul, zatím neznáme. Proto neznáme základní proces ve svaly, který vykonává mechanický pohyb.

Biologie je velmi širokou oblastí, a proto v ní existuje mnoho jiných problémů, o nichž se nemůžeme ani zmínit – jak pracuje zrak (jak působí světlo v oku), jak sluch atd. (Způsob, kterým probíhá *myšlení*, připomeneme později u psychologie.) Věci, o nichž jsme právě mluvili, nejsou z biologického hlediska těmi nejzákladnějšími, jdoucími k podstatě života, a jejich pochopením bychom stále ještě nechápali samotný život. Pro dokreslení uvedme, že ten, kdo studuje nervy, považuje svou práci za velmi důležitou, vřdyť neexistuje živočich bez nervů; jenomže *život existuje* i bez nervů. Rostliny nemají ani nervy ani svaly a přece pracují a žijí. Abychom pochopili základní biologické problémy, musíme nahlédnout hlouběji, a jestliže to uděláme, zjistíme, že všechny živé objekty mají mnoho společného. Nejobecnějším rysem je skutečnost, že se skládají z *buněk* a každá buňka představuje celý komplex, v němž probíhají chemické procesy. V rostlinných buňkách, například, existuje mechanismus zachytávání světla a produkce cukru, který rostlina ve tmě spotřebovává a tím se udržuje při životě. Když živočich stráví rostlinu, cukr v něm vytváří řadu chemických reakcí velmi úzce spjatých s fotosyntézou rostlin (a s opačným jevem při nedostatku světla).

V buňkách živých systémů existuje mnoho složitých chemických reakcí, v nichž se jedna sloučenina mění na jinou a ta na další. K vytvoření představy o ohromném úsilí, jež bylo třeba



zapojeny. Enzymy se po dobu reakce nemění, jen umožňují atomu přejít z jednoho místa na druhé. Když enzym splnil úkol v případě jedné molekuly, je připraven udělat totéž i v případě další molekuly – jako stroj v továrně. Samozřejmě, je nutný přesun určitých atomů a způsob odstraňování jiných atomů. Pozorujme například vodík: existují enzymy obsahující speciální složky, přinášející vodík do všech chemických reakcí. Existují tři nebo čtyři enzymy redukující vodík, které se vyskytují na různých místech našeho cyklu. Je zajímavé, že mechanismus, který uvolňuje vodík na jednom místě, zachytí tento vodík a použije ho na jiném místě.

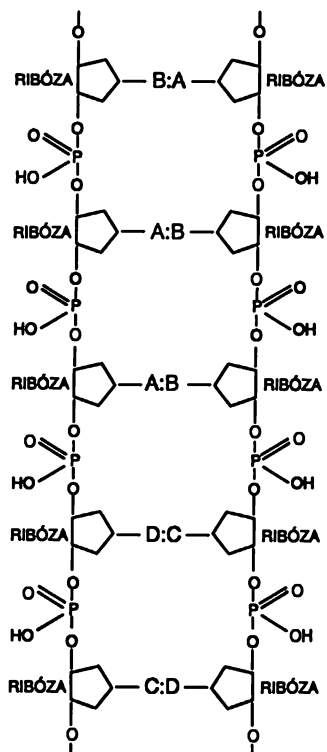
Nejdůležitější částí cyklu z obrázku 3.1 je transformace GDP a GTP (guanidin-di-fosfát na guanidin-tri-fosfát), protože jedna látka má mnohem víc energie než druhá. Tak, jak v určitých enzymech existují „krabičky“, které přenášejí vodíkový atom, existují zvláštní „krabičky“ přenášející energii, které obsahují trifosfátovou skupinu. GTP má víc energie než GDP, a proto se při průběhu cyklu v jednom směru tvoří molekuly, které mají energii navíc a mohou proto uvést do chodu jiný cyklus vyžadující energii, jako je například kontrakce svalu. Sval se nestáhne, dokud tam není GTP. Když svalové vlákno vložíme do vody a přidáme GTP, vlákno se stáhne, jestliže jsou přítomny potřebné enzymy a dochází ke změně GTP na GDP. Skutečný systém tedy spočívá v transformaci GDP–GTP; ve tmě je GTP, který byl shromažďován v průběhu dne, využit k tomu, aby uváděl cyklus do chodu obráceným směrem. Enzym se tedy nestará o to, kterým směrem reakce probíhá, protože kdyby se staral, narušoval by jeden z fyzikálních zákonů.

Fyzika má pro biologii a jiné vědy velký význam ještě z dalšího důvodu, a tím jsou *experimentální metody*. Kdyby nebylo obrovského rozvoje experimentální fyziky, tyto biochemické diagramy bychom dnes neznali. Příčina spočívá v tom, že nejužitečnějším prostředkem k analýze těchto fantasticky složitých systémů je *značkování* atomů, jež se zúčastňují reakcí. Kdybychom mohli zavést do cyklu nějaký oxid uhličitý se „zelenou značkou,“ a po třech sekundách zjistit výskyt zelené značky, a toto měření po deseti sekundách zopakovat a tak postupovat dále, vystopovali bychom vývoj reakcí. Co jsou to ty zelené značky? Jsou to různé *izotopy*. Připomeňme, že chemické vlastnosti atomů jsou určovány počtem *elektronů* a ne hmotností jádra. Jenže například v uhlíku, kde je v jádru vždy šest protonů, může být šest nebo sedm neutronů. Chemicky jsou dva atomy  $^{12}\text{C}$  a  $^{13}\text{C}$  stejné, ale liší se hmotností a mají i různé jaderné vlastnosti, takže jsou rozlišitelné. Použitím izotopů s různými hmotnostmi nebo dokonce radioaktivních izotopů jako je  $^{14}\text{C}$ , který poskytuje citlivější prostředek ke stopování velmi malých množství, je možné sledovat reakce.

Nyní se vrátíme k popisu enzymů a bílkovin. Ne všechny bílkoviny jsou enzymy, ale všechny enzymy jsou bílkoviny. Je mnoho bílkovin, které samy nejsou enzymy. Jsou to: proteiny ve svaly, strukturální proteiny, jimiž jsou například chrupavka, vlas, kůže atd. Bílkoviny jsou pro život velmi charakteristickou látkou: vytvářejí především všechny enzymy a dále tvoří velkou část ostatního živého materiálu. Bílkoviny mají velmi zajímavou a jednoduchou strukturu. Jsou to řady neboli řetězce různých *aminokyselin*. Existuje dvacet různých aminokyselin, jež se mohou vzájemně kombinovat a vytvářet řetězce, jejichž páteří je CO–NH atd. Bílkoviny nejsou ničím jiným, než řetězci vytvořenými z uvedených dvaceti aminokyselin. Každá aminokyselina slouží pravděpodobně nějakému speciálnímu účelu. Některé mají například na určitém místě atom síry; když jsou dva atomy síry ve stejné bílkovině, tvoří vazbu, tj. spojují řetěz ve dvou bodech a vzniká smyčka. Některé mají přídavné kyslíkové atomy, které z nich dělají kyselé sloučeniny, jiné mají zásaditý charakter. Další z aminokyselin mají na jedné straně vyčnívající velké skupiny atomů, a proto zabírají mnoho místa. Jedna aminokyselina, nazývaná prolin, ve skutečnosti není aminokyselina ale iminokyselina. Mezi nimi je malý rozdíl, jenž spočívá v tom, že přítomnost prolinu v řetězci má za následek jeho zkroucení. Kdybychom chtěli vytvořit příslušnou bílkovinu, museli bychom vydat následující pokyny: umístí zde jeden ze sírových háčků, dále přidej něco

na vyplnění prostoru, potom připoj něco, aby se vytvořilo zkroucení řetězce. Takovýmto způsobem bychom dostali komplikovaně vypadající pletený řetězec, se složitou strukturou. Tak se pravděpodobně tvoří všechny rozmanité enzymy. Jedním z velkých úspěchů z nedávných let (1960) bylo objevení přesného prostorového uspořádání atomů určitých bílkovin, obsahujících kolem 56 nebo 60 aminokyselin v řadě. Více než tisíc atomů (téměř dva tisíce, když započítáme vodíkové atomy) bylo lokalizováno v složité struktuře dvou bílkovin. První takovou bílkovinou byl hemoglobin. Slabou stránkou tohoto objevu je, že samotný řetězec toho mnoho neřekne; neumíme z něho ještě zjistit, jak molekula funguje. To však je už další, nevyřešený problém.

Ale odkud enzymy vědí, jaké mají být? Červenooká moucha plodí červenookou mouchu, takže informace o struktuře enzymů k vytvoření červeného pigmentu musí přejít z jedné mouchy na další. To se děje prostřednictvím látky v jádru buňky, která není bílkovinou a která se nazývá DNK (zkratka pro deoxyribonukleovou kyselinu). Je to klíčová látka, která přechází z jedné buňky do druhé (např. spermiové buňky se skládají převážně z DNK) a přenáší informaci, jak je třeba vytvořit enzymy. DNK je něco jako rozmnožovací blána, „přepisovač“. Jak přepisovač vypadá a jak pracuje? Především musí být schopný autoreprodukce. Dále musí být schopný předat instrukci bílkovině. Buňky prostě rostou do velikosti a potom se rozdělí na dvě části. Musí tedy i molekula DNK růst a pak se rozdělit na dvě části? Žádný atom určité neroste, ani se nerozdělí na dvě části! Reprodukce molekuly takto nebude možná; bude muset probíhat nějakým důmyslnějším způsobem.



Obr. 3.2 Schéma DNK

Struktura DNK je už dlouho předmětem studia, nejprve chemického – aby se zjistilo její složení, pak rentgenologického – aby se zjistilo její prostorové uspořádání. Výsledkem je následující pozoruhodné zjištění: molekula DNK je párem řetězců, které jsou navzájem spleteny. Páteří každého z těchto řetězců, podobných řetězcům bílkovin, ale chemicky zcela odlišných, je řada cukrových a fosfátových skupin, jež jsou vidět na *obr. 3.2*. Z obrázku je vidět, jak může řetězec obsahovat instrukce. Kdybychom mohli rozštípnout takovýto řetěz podélně uprostřed, dostali bychom řadu BAADC... a každá živá věc by mohla mít jinou řadu. Snad takto, nebo podobně, jsou prostřednictvím specifické řady v DNK obsaženy zvláštní instrukce pro tvorbu bílkovin.

Podél řetězce se každý cukr váže dvojicí příčných článků, které spojují dva řetězce. Ne všechny tyto články jsou stejné; existují jich čtyři druhy nazývané adenin, thymin, cytosin a guanin, ale my je nazveme *A, B, C, D*. Je zajímavé, že jen některé z nich mohou být proti sobě, např. *A* a *B*, *C* a *D*. Tyto dvojice jsou uloženy ve dvou řetězcích tak, že „do sebe zapadají“ a mají velkou interakční energii. Jenže *C* se nehodí k *A* a *B* se nehodí k *C*; k sobě se hodí jen ve dvojici *A* proti *B* a *C* proti *D*. Je-li tedy jedním článkem *C*, druhým musí být *D* atd. Ať jsou písmena jednoho řetězce jakákoli, každé musí mít svůj doplňkový protipól v druhém řetězci.

Co je však možné říci o reprodukci? Předpokládejme, že rozštípneme spletený řetězec na dvě části. Jak můžeme ke každé z nich udělat druhou, stejnou? Když v látkách buněk existuje „výrobní“ oddělení, které vyrábí fosfát, cukr a jednotky *A, B, D, C* nespojené do řetězu, pak budou pro rozštěpený řetězec vhodné jen korespondující doplňky k *ABBCD*..., jmenovitě *BAADC*... Stane se tedy to, že řetězec se v průběhu dělení buněk rozštěpí podélně na dvě poloviny, jedna část bude v jedné buňce a druhá v druhé buňce. Po oddělení se v každé buňce vytvoří řetězec komplementární ke každé půlce řetězce.

Dále nás zajímá, jak pořadí jednotek *A, B, C, D* určuje uspořádání aminokyselin v bílkovině. To je ústřední a zatím nevyřešený problém biologie. První stopy, či zlomky informací však známe: V buňce existují drobné částice nazývané mikrozómy, o nichž už víme, že se v nich tvoří bílkoviny. Jenže mikrozómy nejsou v jádru, kde je DNK a její instrukce. Zdá se, že něco není v pořádku. Ale víme i to, že z DNK se oddělují malé molekulární kousky – ne tak velké jako molekula DNK, jež sama nese celou informaci, ale takové jako její malá část. Nazýváme je RNK, ale to teď není podstatné. RNK je jakousi kopií DNK – krátkou kopií. Víme, že RNK, jež vlastně nese zprávu o tom, jaká bílkovina se má vytvořit, přechází do mikrozómu. Když se do mikrozómu dostane, je tam syntetizována bílkovina. I to je známo. Podrobnosti o tom, jak aminokyseliny přicházejí do mikrozómů a jak budou uspořádány podle kódu, který nese RNK, dosud neznáme. Tento kód zatím neumíme přečíst. Kdybychom, například znali pořadí *A, B, C, C, A*, neuměli bychom říci, jaká bílkovina se má vytvořit.

V současnosti se určitě žádný předmět nebo oblast nerozvíjí rychleji a tolika směry jako biologie. Kdybychom měli stanovit nejdůležitější ze všech předpokladů vedoucích k pochopení života, byl by to předpoklad, že všechny věci skládají se z atomů a vše, co dělají živé organizmy, je možné pochopit na základě pohybujících se a kmitajících atomů.

### 3.4 ASTRONOMIE

V tomto bleskovém vysvětlování celého našeho světa se teď musíme vrátit k astronomii. Astronomie je starší než fyzika. Ve skutečnosti dala podnět ke vzniku fyziky tím, že ukázala nádhernou jednoduchost pohybu hvězd a planet a pochopení tohoto pohybu bylo začátkem

fyziky. Nejpozoruhodnějším objevem celé astronomie je však skutečnost, že hvězdy se skládají z takových atomů, jaké se nacházejí na Zemi.<sup>6)</sup>

Jak se na to přišlo? Atomy emitují světlo, které má určité frekvence, podobně jako barva tónu hudebního nástroje, který má určité výšky neboli frekvence zvuku. Když slyšíme směs rozličných tónů, můžeme je sluchem rozlišit. Když se však díváme na směs barev, nerozeznáme jednotlivé složky, neboť oko nemá takovou rozlišovací schopnost jako ucho. Pomocí spektroskopu *můžeme* analyzovat frekvence světelných vln a tedy i poznat všechny tóny atomů nacházejících se v různých hvězdách. Dva chemické prvky byly dokonce objeveny na hvězdách dříve než na Zemi. Helium bylo objeveno na Slunci, odtud pochází i jeho jméno, a technecium bylo objeveno na jistých studených hvězdách. Objev, že hvězdy se skládají ze stejných atomů jako Země, nám umožní udělat pokrok v jejich studiu. Teď už o atomech víme mnoho, zejména o jejich chování při vysokých teplotách a nevelkých hustotách, takže pomocí statistické mechaniky můžeme analyzovat chování hvězdné hmoty. Ačkoli na Zemi neumíme napodobit hvězdné podmínky, pomocí základních fyzikálních zákonů často umíme přesně, nebo téměř přesně říci, co se stane. Tak fyzika pomáhá astronomii. Může se zdát divné, že lépe chápeme rozložení hmoty uvnitř Slunce než uvnitř Země. O tom, co se děje *uvnitř* hvězdy, víme víc, než by se zdálo možné, uvážíme-li, že v dalekohledu pozorujeme jen malé svítící body. Je to proto, že umíme *vypočítat*, jak se atomy hvězdy musí chovat za daných okolností.

Mezi nejpůsobivější objevy patří vysvětlení původu energie hvězd, která jim umožňuje stále „hořet“. Jeden z těch, kteří se o tento objev zasloužili, byl se svou přítelkyní večer na procházce krátce po té, co pochopil, že hvězdy září proto, že na nich probíhají *jaderné reakce*. Na přítelkynino zvolání: „Podívej, jak krásně svítí hvězdy!“ odpověděl: „Vidím to a v této chvíli jsem jediným člověkem na světě, který ví, *proč* svítí.“ Jen se na něho usmála. Vůbec na ni nezapůsobilo, že zná muže, který v tu chvíli jediný znal příčinu hvězdného světla. Nuže, je smutné, když je člověk osamocen, ale tak to už na světě bývá.

Za zásobu energie vděčí Slunce jadernému „hoření“ vodíku; vodík se proměňuje na helium. Navíc, uprostřed hvězd vznikají v konečném důsledku z vodíku různé chemické prvky. To, z čeho se skládáme *my*, bylo jednou „uvařeno“ v hvězdě a vymrštěno ven. Jak to víme? Existuje k tomu klíč. Poměr různých izotopů – kolik je <sup>12</sup>C, kolik je <sup>13</sup>C atd. se nikdy nezmění v *chemických reakcích*, neboť chemické reakce jsou pro tyto dva izotopy úplně stejné. Tyto poměry jsou jen výsledkem *jaderných reakcí*. Sledováním poměrů izotopů ve studené, mrtvé hromadě žhavého popela, jíž jsme *my*, můžeme zjistit, jaká byla *pec*, v níž se vytvořilo to, z čeho se skládáme. Tato *pec* byla jako hvězdy a tak je velmi pravděpodobné, že naše prvky byly „vytvořeny“ ve hvězdách a vyvrhnuty při explozích, které nazýváme novy a supernovy. Astronomie je tak blízká fyzice, že v průběhu našeho vyprávění budeme sledovat mnoho astronomických poznatků.

<sup>6)</sup> Jak tu spěchám! Jak mnoho v sobě skrývá každá věta tohoto stručného vyprávění. „Hvězdy jsou tvořeny stejnými atomy jako Země“. Obvykle volím jeden malý námět, podobný tomuto, jako téma své přednášky. Básníci tvrdí, že věda vzala hvězdám jejich nádheru – zůstaly pouhými koulemi atomového plynu. „Pouhými“? I já vidím hvězdy v noci nad pouští a cítím je. Vidím však více či méně? Rozsáhlost nebes naplná mou představivost – při pohledu na tuto klenbu zachytává moje oko světlo staré miliony let. Je to obrovský obraz, jsem jeho částí a látka, z níž je mé tělo, snad jednou vyvěřela z jakési zapomenuté hvězdy, takové, jaké dnes vybuchují v dálce. Vidím ty hvězdy velkým okem Palomarského dalekohledu, jak se vzdalují od společného bodu, z něhož snad kdysi vyšly. Co je to za obraz, jaký má smysl a proč to všechno? Ta trocha poznání neublíží tajemství. Vždyť pravda je nádhernější než kterákoli představa umělce minulosti. Proč o ní básníci dneška nemluví? Jací jsou to lidé – básníci, kteří dokáží hovořit o Jupiterovi jako o člověku, a zmlknou, když jde o ohromnou rotující kouli metanu a čpavku?



### 3.5 GEOLOGIE

Nyní věnujme pozornost tomu, čemu říkáme *nauka o Zemi* nebo *geologie*. Nejprve si všimněme meteorologie a počasí. Samozřejmě, meteorologické *přístroje* jsou fyzikální přístroje a jak jsme již uvedli, byly výsledkem rozvoje experimentální fyziky. Jenže teorie meteorologie nebyla nikdy fyziky uspokojivě rozpracována. „No“, řeknete, „je to přece jen vzduch a my známe rovnice pro pohyb vzduchu.“ To je pravda, známe je. „Když tedy známe stav vzduchu dnes, proč nemůžeme vypočítat stav vzduchu zítra?“ V první řadě, my neznáme dnešní skutečný stav, neboť vzduch se víří a točí všude. Ukazuje se, že je velmi choulostivý a nestabilní. Když jste viděli vodu, jak snadno plyne nad přehradou a pak se roztříští na vodopád kapek, pochopíte, co rozumíme pod nestabilitostí. Znáte stav vodní hladiny před tím, než se dostane k vodopádu; je dokonale hladká; ale v okamžiku pádu vlastně neumíme říci, kdy se objevily kapky. Co určuje množství vody v kapce a její polohu? To nevíme, neboť voda je nestabilní. I plynule se pohybující vzdušná hmota se při přechodu přes horský masív mění na komplex vírů. S takovýmto *turbulentním prouděním* se setkáváme v mnohých oblastech a zatím ho neumíme analyzovat. Opusťme rychle meteorologii a věnujme se geologii

Proč je Země taková, jaká je? To je základní otázka geologie. Nejvíce zřejmé procesy probíhají před vaším zrakem; jsou to procesy eroze řekami, větrem atd. Tyto procesy je jednoduché pochopit, jenže při každé trošce eroze probíhá ještě něco dalšího. Hory, v průměru, nejsou dnes nižší než byly v minulosti. Musí tedy existovat proces *tvorby horstev*. Kdybyste studovali geologii, zjistili byste, že *existuje* proces tvorby horstev a sopečná činnost, kterým vlastně nikdo nerozumí, a přece představují polovinu geologie. Sopečná činnost skutečně není vysvětlena. V konečném důsledku nechápeme ani příčinu zemětřesení. Víme, že když něco tlačí na něco jiného, odtrhne se to a bude to klouzat – to je v pořádku. Jenže co tlačí a proč? Podle teorie existuje uvnitř Země proudění hmoty vyvolané rozdílem vnitřní a vnější teploty – a tyto proudy mírně tlačí na povrch. Setkají-li se tedy někde dva opačné proudy, bude se na jejich rozhraní shromažďovat hmota a vytvoří se pás hor nacházející se v podmínkách napětí, a tak dochází k zemětřesení a vzniku sopek.

Co je možné říci o nitru Země? Víme hodně o rychlosti šíření vln zemětřesení a o rozložení hustoty Země. Fyzici však nedokázali formulovat uspokojivou teorii o hustotě látek při tlacích, které je možné očekávat ve středu Země. Jinými slovy, neumíme dostatečně dobře vypočítat vlastnosti hmoty v těchto podmínkách. Mnohem méně úspěšní jsme při určování stavu hmoty v Zemi než ve hvězdách. Zatím to vypadá, že potřebná matematika je příliš komplikovaná, ale snad si někdo včas uvědomí důležitost tohoto problému a vyřeší ho. Jiná věc je, že i kdybychom znali hustotu, nedokázali bychom vypočítat cirkulující proudy, a neumíme určit ani vlastnosti hornin při velkých tlacích. Neumíme říci, jak rychle se budou poddávat těmto tlakům; to vše se musí zjistit experimentem.

### 3.6 PSYCHOLOGIE

Dále budeme hovořit o *psychologii*. Mimochodem, psychoanalýza není věda: je to přinejlepším léčebný proces a snad se dokonce více podobá čarodějnickému lékařství. Má teorii o příčinách chorob – způsobuje je mnoho rozličných duševních stavů. Lékař – čaroděj se řídí teorií, podle níž je nemoc jako malárie, způsobena duchem, který se dostává do vzduchu; nezbavíme se jí tím, že bychom ji vyhnali potřásáním hadem, ale malárii lze vyléčit lékem – chininem. Když jste nemocní, doporučoval bych vám jít k lékaři – čarodějovi, neboť on jediný z kmene ví hodně

o nemocech; jenže jeho znalosti nejsou vědou. Psychoanalýza nebyla dostatečně ověřena experimentem a není k dispozici seznam případů, ve kterých byla a ve kterých nebyla účinná.

Další odvětví psychologie, zahrnující disciplíny jako je fyziologie pocitů (co se děje v oku a co v mozku) jsou snad méně zajímavé. Při jejich studiu bylo dosaženo jen malého, ale přece jen určitého pokroku. Jeden z nejzajímavějších „technických“ problémů můžeme, ale nemusíme nazývat psychologií. Ústřední problém myslí, nebo vlastně nervového systému, spočívá v následujícím: když se zvíře něčemu naučí, umí něco dělat jinak než dříve, a proto se musely změnit i jeho mozkové buňky, jestliže se skládají z atomů. *V čem se vlastně změnily?* Nevíme, kde nebo co je třeba hledat při zapamatování. Nevíme, co to vlastně znamená, nebo jaké změny proběhly v nervovém systému, když jsme se něčemu naučili. To je velmi důležitý problém, který zatím nebyl vůbec vyřešen. Předpokládáme-li však, že existuje určitý druh paměti, mozek bude ohromným množstvím různých spojovacích vedení, nervů, a proto asi nebude možná jeho přímá analýza. Množstvím spojení a existencí jakéhosi prvku podobného synapsu nebo vzájemnému propojení nervů, je mozek podobný počítačové stroji. Ačkoli vztah mezi myšlením a počítačem je velmi zajímavý předmět, nebudeme mít čas na jeho další rozbor. Je však třeba přiznat, že nám řekne jen velmi málo o skutečné složitosti běžného lidského chování. Lidé jsou tak různí! Uplyne ještě velmi mnoho času, než se dostaneme až do takového stádia. Musíme začít s něčím mnohem jednodušším. Kdyby se nám alespoň podařilo vysvětlit, jak „funguje“ pes, dostali bychom se dost daleko. Ačkoli reakce psa jsou jednodušší pro pochopení, dodnes nikdo neví, jak vlastně probíhají.

### 3.7 JAK VŠECHNO VZNIKLO?

Aby fyzika *teoreticky* pomohla jiným vědám (jinak než vynalézáním přístrojů), musí příslušná věda poskytnout fyzikovi popis objektů ve fyzikálním jazyce. Na otázku „proč žába skáče?“ nebude fyzik umět odpovědět. Když se však dozví, co je to žába, kolik obsahuje molekul, nebo jestli má na tom nebo onom místě nerv atd., bude to zcela jiné. Jakmile se dozvíme, čemu se asi Země nebo hvězdy podobají, budeme moci o nich říci více. Aby mohla být fyzikální teorie užitečná, musíme vědět, kde jsou atomy umístěny. Abychom pochopili chemii, musíme přesně vědět, které atomy jsou přítomny, protože jinak nemůžeme provést analýzu. To je, samozřejmě, jen jedno omezení.

V sesterských vědách existuje ještě *jiný* problém, který neexistuje ve fyzice a který pro nedostatek vhodnějších pojmenování můžeme nazvat historickou otázkou. Jak to všechno vzniklo? Jakmile budeme vědět všechno o biologii, bude nás dále zajímat, kde se všechny věci na Zemi vzaly. Odpovědí na tuto otázku se zabývá důležitá část biologie – evoluční teorie. V geologii se nespokojíme s poznatkem, jak se tvoří hory, ale chceme vědět, jak vypadala celá Země na začátku, jaký je původ sluneční soustavy atd. To nás, samozřejmě, vede k přání poznat, jaký druh hmoty existoval ve světě. Jak se vyvinuly hvězdy? Jaké byly počáteční podmínky? To je problém astronomické historie. Mnoho jsme se již dozvěděli o složení hvězd, o prvcích, ze kterých se skládají a o malý krůček jsme postoupili v poznání i o počátku vesmíru.

V současnosti se fyzika nezajímá o historickou otázku. Neptáme se: „Jak se vyvinuly fyzikální zákony do dnešní podoby?“. V současnosti nepředpokládáme, že by se fyzikální zákony měnily s časem a byly v minulosti jiné než dnes. Samozřejmě ty zákony *mohly* být jiné, a v okamžiku, kdy to zjistíme, stane se historická otázka fyziky součástí historie vesmíru a fyzici se budou zabývat stejnými problémy jako astronomové, geologové a biologové.

Nakonec, existuje fyzikální problém, který je společný mnoha oblastem, který je velmi starý

a zatím nevyřešený. Není to hledání nových základních částic, ale něco, co nám zůstalo už z doby před více než sto lety. Nikdo ho ve fyzice uspokojivě matematicky neanalyzoval, přestože je tak důležitý pro sesterské vědy. Je to analýza *turbulence tekutin*. Sledujeme-li vývoj hvězdy, dospějeme k okamžiku, v němž je možné usuzovat na začátek její konvekce, ale potom už neumíme dedukovat, co se stane. Za několik milionů let hvězda exploduje, a neumíme říci proč. Neumíme analyzovat počasí. Neznáme modely pohybů, které se uskutečňují v nitru Země. Nejjednodušším modelem tohoto problému je proudění vody velkou rychlostí velmi dlouhou trubicí. Ptáme se: Jaký tlak je potřebný k tomu, aby trubicí protéklo určité množství vody? Nikdo neumí odpovědět na tuto otázku pouze na základě základních principů a znalostí vlastností vody. Jestliže voda teče velmi pomalu, nebo použijeme-li tekutinu hustou jako med, známe na otázku odpověď. Najdete ji ve svých učebnicích. Neumíme si však poradit se skutečnou, mokrou vodou, proudící trubicí. To je hlavní problém, který jsme již měli dávno vyřešit, ale nepodařilo se nám to.

Jakýsi básník řekl: „Celý vesmír je v poháru vína.“ Nikdy se asi nedozvíme, co tím chtěl básník říci; básníci nepíší proto, aby jim bylo rozuměno. Pravdou však je, že při pozorném pohledu na pohár vína uvidíme celý vesmír. Jsou v něm věci, jimiž se zabývá fyzika: vrtkává tekutina, která se vypařuje v závislosti na větru a počasí, odrazy na skle a naše představivost přidává atomy. Sklo je destilátem zemských hornin a v jeho skladbě vidíme tajemství vesmírného věku a vývoj hvězd. Jak divná směs chemikálií je ve víně? Jak se tam dostaly? Jsou tam kvasinky, enzymy, substráty a sloučeniny. Ve víně nalézáme velké zobecnění: všechn život je kvasením. Nikdo nemůže objasnit chemii vína aniž by podobně jako Luis Pasteur neobjevil příčinu mnohých chorob. Jak živé je červené víno vtiskující svou existenci do vědomí, jež ho pozoruje! Jestliže naše chabá mysl z jakýchsi praktických důvodů rozdělí tento pohár vína, tento vesmír, na části – fyziku, biologii, geologii, astronomii, psychologii atd. – pamatujme, že příroda o tom neví! Proto složme to všechno zpět dohromady a nezapomeňme nakonec, čemu má sloužit. Ať nám připraví ještě jedno, závěrečné potěšení: vypijme ho a na všechno zapomeňme!

# Zachování energie

## 4.1 CO JE TO ENERGIE?

## 4.2 GRAVITAČNÍ POTENCIÁLNÍ ENERGIE

## 4.3 KINETICKÁ ENERGIE

## 4.4 JINÉ FORMY ENERGIE

### 4.1 CO JE TO ENERGIE?

Skončili jsme s obecným popisem věcí, a proto v této kapitole začneme podrobněji studovat různé aspekty fyziky. Pro ilustraci myšlenek a způsobů argumentace používaných v teoretické fyzice budeme zkoumat jeden z nejzákladnějších zákonů fyziky, zákon zachování energie.

Existuje skutečnost nebo chcete-li *zákon*, kterým se řídí všechny přírodní jevy. Pokud víme, tento zákon je přesný a neexistuje z něho žádná výjimka. Je to *zákon zachování energie*. Říká, že existuje veličina nazývaná energií, která se nemění v průběhu mnoha změn, jež podstupuje příroda. To je velmi abstraktní myšlenka, vždyť jde o matematický princip; hovoří o existenci číselné veličiny, která se v průběhu procesů nemění. Není to popis mechanismu, ani něčeho konkrétního; je to jen podivuhodná skutečnost, když spočítáme nějakou veličinu, pak pozorujeme, jak příroda provádí své kousky, nakonec provedeme výpočet znovu a dostaneme totéž číslo. (Něco jako střelec na černém poli, který po určitém počtu kroků – které detailně neznáme – se stále nachází na černém poli. To je zákon této hry.) Protože jde o abstraktní myšlenku, ilustrujeme její smysl pomocí analogie.

Představme si dítě, například nějakého Cipíška, který má kostky. Jsou nezničitelné, nelze je rozdělit na části a všechny jsou stejné. Předpokládejme, že Cipíšek má 28 kostek. Matka ho ráno nechá i s 28 kostkami v pokoji a každý večer ze zvědavosti starostlivě spočítá všechny kostky. Tak objeví fenomenální zákonitost – bez ohledu na to, co chlapec s kostkami dělal, zůstane vždy 28 kostek. Takováto situace se opakuje několik dní, až jednou zůstane jen 27 kostek. Krátké hledání však ukáže, že jedna kostka je pod kobercem, že se počet kostek nezměnil. Jednoho dne se však počet kostek změnil – zůstalo jich jen 26. Pečlivý průzkum, který matka provedla, však ukázal, že bylo otevřené okno a tím se dostaly dvě kostky ven. Jednoho dne však napočítala 30 kostek, což vyvolalo značné překvapení. Potom si však matka uvědomila, že Cipíšek měl na návštěvě kamaráda, který si s sebou přinesl své kostky a několik jich u Cipíška zapomněl. Když matka vrátila přebytečné kostky, zavřela okno a nepustila kamarády, všechno bylo zase v pořádku, až jednou při počítání zjistila, že je jen 25 kostek. V pokoji byla krabice na hračky a když se matka do ní chtěla podívat, chlapec to nechtěl dovolit a dal se do křiku. Matka však byla velmi zvědavá

## ZACHOVÁNÍ ENERGIE

a dost vynalézavá, a proto si vymyslela trik. Věděla, že každá kostka váží 100 g, a tak zvažila krabici, když bylo všech 28 kostek venku. Zjistila, že váží 500 g, a proto při další kontrole kostek zvažila opět krabici, odečetla 500 g a dělila stem. Tak objevila zákonitost

$$\left( \frac{\text{počet kostek}}{\text{venku}} \right) + \frac{(\text{hmotnost krabice}) - 500 \text{ g}}{100 \text{ g}} = \text{konstanta}. \quad (4.1)$$

Později se objevily nové odchylky, ale ukázalo se, že špinavá voda ve vaně změnila svou hladinu. Dítě házelo kostky do vody a matka je tam nemohla vidět, neboť voda byla špinavá. Přidáním dalšího členu do vzorce však zjistila, kolik kostek je ve vodě. Protože původní výška vody byla 15 cm a každá kostka zvedala hladinu o 0,5 cm, nový vzorec má tvar

$$\left( \frac{\text{počet kostek}}{\text{venku}} \right) + \frac{(\text{hmotnost krabice}) - 500 \text{ g}}{100 \text{ g}} + \frac{(\text{výška vody}) - 15 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = \text{konstanta}. \quad (4.2)$$

Při postupném narůstání složitosti svého světa našla matka celou řadu členů odpovídajících počtu kostek nacházejících se na místech, do nichž nesměla nahlédnout. Tak našla komplexní vzorec pro veličinu, kterou je třeba vypočítat a která v podmínkách jejího světa zůstává stálá.

Čím je tento příklad podobný zákonu zachování energie? Musíme udělat jednu důležitou abstrakci musíme si *odmyslet kostky*. Odstraníme-li první členy v (4.1) a (4.2), zjistíme, že počítáme víceméně abstraktní věci. Podobnost spočívá především v tom, že počítáme-li energii, dostáváme se do situace, že někdy část energie odchází ze systému a někdy zase do systému přichází. Abychom ověřili zákon zachování energie, musíme dávat pozor, aby nic nepřišlo ani neodešlo. Dále, energie má mnoho různých forem a pro každou z nich máme zvláštní vzorec. Jsou to: gravitační energie, kinetická energie, tepelná energie, elastická energie, elektrická energie, chemická energie, radiační energie, jaderná energie, energie vázaná na hmotnost. Když sčítáme příspěvky od jednotlivých energií, součet se nezmění, nebude-li nějaká energie dodána nebo odebrána.

Je důležité si uvědomit, že současná fyzika vlastně neví, co je to energie. Nepředstavujeme si, že by se energie vyskytovala v určitém počtu malých kapiček. Tak to není. Existují však vztahy pro výpočet určité číselné veličiny a při sčítání všech příspěvků dostáváme „28“ – vždy stejné číslo. Je to abstraktní věc v tom smyslu, že to neříká nic o mechanismu nebo *příčinách* jednotlivých vztahů.

## 4.2 GRAVITAČNÍ POTENCIÁLNÍ ENERGIE

O zákonu zachování energie můžeme mluvit až poté, co budeme znát vyjádření všech forem energie. Nejdříve se budeme zajímat o vyjádření gravitační energie v blízkosti zemského povrchu a vztah pro tuto energii odvodíme způsobem, který nemá nic společného s historií, ale byl vymyšlen speciálně pro tuto kapitolu, abychom zdůraznili tu pozoruhodnou skutečnost, že důkladným uvažováním můžeme o přírodě mnoho poznat i z malého množství faktů. Tento postup je ilustrací práce teoretických fyziků. Za vzor slouží vynikající argumentace Carnota o účinnosti parních strojů. Naším cílem není ani tak výsledek (4.3), který již možná znáte, ale možnost jeho získání teoretickým uvažováním.

Mějme zařízení na zvedání, jež má tu vlastnost, že zvedá jedno závaží spouštěním druhého. Přitom předpokládejme, že v případě tohoto zařízení neexistuje něco takového jako je *neustálý*

*pohyb.* (Fakt, že vůbec neexistuje neustálý pohyb, je obecným tvrzením zákona zachování energie.) Při definování neustálého pohybu musíme být opatrní. Udělejme to nejdříve pro zvedací zařízení. Jestliže jsme při zvedání a spouštění množství závaží dostali zařízení do původního stavu a zjistíme, že čistým výsledkem je *zvednutí určité hmotnosti*, pak máme zařízení na stálý pohyb, protože tuto zvednutou hmotnost můžeme použít jako pohon něčeho jiného. Přitom musí být *splněna podmínka*, že zařízení zvedající závaží se přivádí přesně do původního stavu a dále, že zařízení je úplně *uzavřené*, že nezískává energii na zvedání závaží z nějakého vnějšího zdroje – tak jak to bylo v případě, kdy Cipískovi nechal v pokoji kostky jeho přítel.



Obr. 4.1 Jednoduchý stroj na zvedání

Velmi jednoduché zařízení na zvedání je znázorněno na *obr. 4.1*. Toto zařízení zvedá závaží sestávající ze tří jednotek. Tři jednotky položíme na jednu misku a jednu jednotku na druhou. Abychom zařízení skutečně uvedli do činnosti, musíme z levé misky odebrat část závaží. Naopak, můžeme zvedat jednotkové závaží spouštěním závaží sestávajícího ze tří jednotek takovým trikem že z jednotkového závaží trochu ubereme. Uvědomujeme si, samozřejmě, že v případě *skutečných* vah musíme něco dodat, abychom je uvedli do činnosti. To budeme *dočasně* ignorovat. Ideální zařízení, která však neexistují, si nevyžadují nic dodatečného. Zařízení, které skutečně používáme, může být v určitém smyslu *téměř* vratné: tj. zvedne-li hmotnost tří jednotek tím, že nechá klesnout hmotnost jedné jednotky, pak také stejně zvedne hmotnost jedné jednotky tím, že nechá klesnout hmotnost tří jednotek.

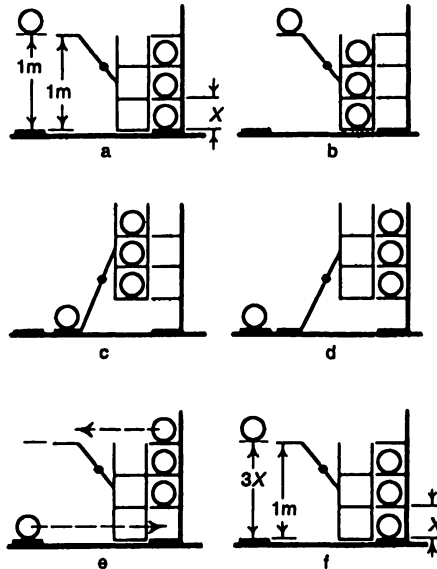
Představme si, že existují dva druhy strojů. Takové, které *nejsou* vratné (k nim patří všechny skutečné stroje) a také takové, které *jsou* vratné (samozřejmě nedosažitelné bez zřetele na pečlivost, již věnujeme návrhu jejich ložisek, pák atd.). Předpokládejme však, že existuje takové zařízení – vratný stroj – které spouští jednotkové závaží (kilogramu nebo jiné jednotky) o jednotkovou vzdálenost a současně zvedá tři jednotková závaží. Nazveme ho vratným strojem, strojem A. Předpokládejme, že tento speciální vratný stroj zvedá tři jednotková závaží o výšku  $X$ . Dále předpokládejme, že máme jiné zařízení, stroj B, který nemusí být vratný, a ten rovněž nechá klesnout jednotkové závaží o jednotkovou vzdálenost, ale zvedne tři jednotková závaží o výšku  $Y$ . Lze dokázat, že  $Y$  není větší než  $X$ , tj. že není možné sestavit zařízení, které by zvedalo závaží výše než ho zvedá vratný stroj. Řekněme si proč. Předpokládejme, že  $Y$  je větší než  $X$ . Vezmeme jednotkové závaží a nechme ho klesnout o jednotkovou výšku na stroji B, což způsobí zvednutí tří jednotkových závaží o výšku  $Y$ . Potom můžeme závaží spustit z výšky  $Y$  do výšky  $X$ , získat tak výkon „zadarmo“ a použít vratný stroj A při zpětném chodu ke spuštění tří jednotkových závaží o výšku  $X$  a zvednutí jednotkového závaží o jednotkovou výšku. To vrátí jednotkové závaží do původního stavu a oba stroje budou připraveny k opětovnému použití! Kdyby bylo  $Y$  větší než  $X$ , dostali bychom neustálý pohyb, ale ten považujeme za nemožný. Z toho usuzujeme, že  *$Y$  není větší než  $X$* , takže ze všech strojů je nejlepší vratný stroj.

Je vidět, že všechny vratné stroje musejí zvedat *přesně do stejné výšky*. Předpokládejme, že i stroj B by byl skutečně vratný. Tvrzení, že  $Y$  není větší než  $X$ , zůstává, samozřejmě, v platnosti, ale tvrzení můžeme obrátit, použijeme-li stroje v opačném pořadí a dokážeme, že  $X$  není větší než  $Y$ . To je zajímavý poznatek, neboť umožňuje zkoumat výšku, do níž různé stroje zvednou závaží,

## ZACHOVÁNÍ ENERGIE

bez ohledu na jejich vnitřní mechanismus. Ihned víme, že velmi složitá soustava pák, která zvedá tři jednotková závaží do určité výšky za současného poklesu jednotkového závaží o jednotkovou výšku, nebude lepší, spíše horší než jednoduchá páka konající totéž, když je v podstatě vratná. Je-li složitá soustava vratná, víme přesně do jaké výšky zvedá závaží. Závěrem je možné říci, že každý vratný stroj, bez ohledu na způsob jeho činnosti, který spouští jeden kilogram o jeden metr a zvedá tři kilogramy, zvedá tuto hmotnost vždy o stejnou výšku  $X$ . To je obecný zákon, který má široké užití. Další otázkou samozřejmě je, jak velké je  $X$ ?

Předpokládejme, že máme vratný stroj, který zprostředkuje zvednutí tří jednotkových závaží do výšky  $X$  pomocí jednotkového závaží. Tři míčky umístíme do pevných polic tak, jak znázorňuje obr. 4.2. Jeden míček stojí na stojanu ve výšce jednoho metru nad zemí. Zařízení může zvednout tři míčky tím, že jeden míček klesne o jeden metr. Uspořádání pokusu je takové, že police, ve kterých jsou míčky, jsou ve vertikálním směru vzájemně vzdálené o  $X$  a plošina, která bude míčky zvedat, má také vertikálně uspořádané přihrádky vzájemně vzdálené o  $X$  (a). Nejdříve překutálíme míčky horizontálně z polic do přihrádek (b), přičemž nepředpokládáme změnu energie, neboť se nemění výška.



Obr. 4.2 Vratný stroj  
 a) počáteční poloha      c) 1 kg zvedá 3 kg do výšky  $X$       e) přeskupení  
 b) nakládání míčků      d) vykládání míčků      f) konečná poloha

Pak se uvede do činnosti vratný stroj: spustí jeden míček až k podlaze a zvedne plošinu o vzdálenost  $X$  (c). Zvedací plošinu jsme navrhli tak důmyslně, že její přihrádky stojí opět proti policím. Míčky pak odkutálíme do polic (d). Po odkutálení míčků můžeme stroj vrátit do jeho původního stavu (e). Tak jsme dostali tři míčky do horních polic a jeden na podlahu. Zvláštností je, že jsme vlastně *dva* z nich vůbec nezvedali, neboť v policích 2 a 3 byly i předtím. Výsledný efekt tedy je, že se zvedl *jeden míček* do výšky  $3X$ . Kdyby  $3X$  přesahovalo jeden metr, mohli bychom dát míček níže, aby se stroj dostal do původního stavu (f), a mohl znovu začít činnost. Proto  $3X$  nemůže přesáhnout jeden metr, neboť v opačném případě bychom měli perpetuum mobile. Podobným způsobem můžeme dokázat, že *jeden metr nemůže převyšit  $3X$* , stačí, když necháme stroj

pracovat naopak, jde-li o vratný stroj.  $3X$  tedy není ani více, ani méně než jeden metr a tímto zdůvodněním jsme zjistili, že  $X = 1/3$  metru. Zobecnění je jasné: klesne-li při činnosti vratného stroje jednokilogramové závaží o určitou vzdálenost, zvedne stroj  $p$ -kilogramové závaží o vzdálenost  $1/p$ . Jiný způsob vyjádření výsledku je následující: tři kilogramy vynásobené výškou zdvihu, v našem případě  $X$ , jsou rovny jednomu kilogramu vynásobenému velikostí poklesu, v našem případě jedním metrem. Vezmeme-li tíhy všech těles a vynásobíme je výškami, v nichž se nacházejí, pak necháme pracovat stroj a násobíme opět všechny tíhy výškami, *nenastane změna*. (Musíme zobecnit příklad, v němž jsme pohybovali jen jedním závažím na případ, kdy snížením jednoho zvedáme několik různých závaží – ale to je jednoduché).

Součet tíh násobených výškami nazýváme *gravitační potenciální energii* – energii, kterou má objekt díky své poloze v prostoru vzhledem k Zemi. Vyjádření gravitační energie, nejsme-li příliš vzdáleni od Země (síla slábne se vzrůstající výškou), je následující:

$$\left( \begin{array}{l} \text{gravitační potenciální} \\ \text{energie objektu} \end{array} \right) = \text{tíha} \cdot \text{výška}. \quad (4.3)$$

Je to krásný způsob důkazu. Zůstává však otázka, zda není nepravdivý. (Nakonec, příroda se nemusí chovat podle našeho důkazu.) Co kdyby perpetuum mobile přece jen existovalo? Některé z našich předpokladů mohou být nesprávné, nebo jsme se mohli dopustit chyby při argumentaci, takže je vždy potřebná zkouška. Experiment však ukazuje, že tento zákon je správný.

Obecný název pro energii, která souvisí s polohou vůči něčemu jinému, je potenciální energie. V našem speciálním případě ji nazýváme gravitační potenciální energii. Máme-li místo gravitačních sil co činit s elektrickými silami, proti nimž konáme práci oddalováním jedné náboje od druhé soustavou pák, mluvíme o elektrické potenciální energii. Obecným principem je, že změna energie je vyjádřena součinem síly a vzdálenosti, na které tato síla působí – to platí pro změnu energie obecně:

$$\text{změna energie} = \text{síla} \cdot \left( \begin{array}{l} \text{vzdálenost na} \\ \text{kteřou působí síla} \end{array} \right). \quad (4.4)$$

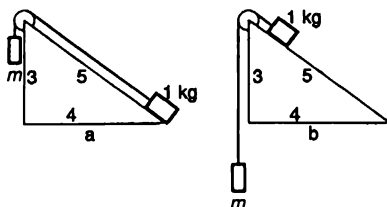
V průběhu tohoto kurzu se vrátíme k mnoha z jiných druhů energie.

Princip zachování energie nám v řadě případů velmi pomáhá při úvahách o tom, co se se systémem stane. Na střední škole jsme se učili mnoho zákonů o kladkách a pákách použitých různými způsoby. Teď vidíme, že tyto „zákony“ představují *vlastně jediný zákon* a není proto třeba pamatovat si 75 pravidel k jeho vyjádření. Jednoduchým příkladem je hladká nakloněná rovina, pro kterou jsme šťastně zvolili trojúhelník s poměrem stran 3 : 4 : 5 (*obr. 4.3*). Na nakloněnou rovinu s kladkou zavěsíme závaží jednoho kilogramu a na druhou stranu kladky těleso o hmotnosti  $m$ . Zajímá nás, jak velké musí být  $m$ , aby vyvážilo jeden kilogram na nakloněné rovině. Jak to můžeme vypočítat? Říkáme-li, že soustava je právě vyvážená, pak je vratná, a proto se může pohybovat nahoru a dolů. Můžeme si představit následující situaci. V počátečním stavu (a) je kilogramové závaží dole a těleso o hmotnosti  $m$  nahoře. Sklouzlo-li  $m$  vratným způsobem dolů, je kilogramové závaží nahoře a těleso se šikmo vzdálilo o pět metrů od roviny, v níž bylo původně (b). Zvedli jsme kilogramové závaží jen o tři metry a těleso o hmotnosti  $m$  klesalo po dráze pět metrů; proto  $m = 3/5$  kilogramu. Všimněte si, že v naší úvaze jsme použili jen *zákon zachování energie* a nebrali jsme v úvahu složky sil. Naše šikovnost je však jen relativní. Dedukci je možné provést ještě důmyslnějším způsobem, na který přišel Stevinus a který je vyrytý na jeho náhrobním kameni. *Obr. 4.4* vysvětluje, že to musí být  $3/5$  kilogramu, neboť řetěz se nebude

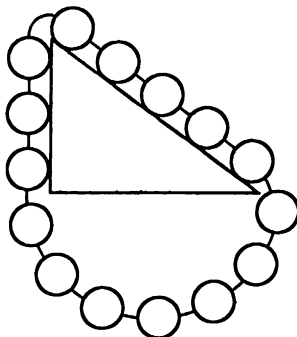


## ZACHOVÁNÍ ENERGIE

pohybovat kolem dokola. Je zřejmé, že dolní část řetězu je vzájemně sama vyvážená, takže tah pěti závaží na jedné straně musí vyvážit tah tří závaží na druhé straně; všechno závisí na poměru stran. Z pohledu na tento obrázek zjišťujeme, že  $m$  musí být  $3/5$  kilogramu. (Zasloužíte-li si takový epitař na náhrobek, žili jste dobře.)

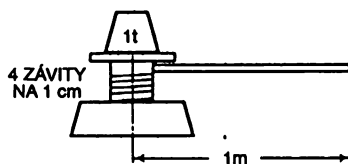


Obr. 4.3 Nakloněná rovina



Obr. 4.4 Stevinův epitař

Ilustrujme nyní energetický princip na složitějším problému, na šroubovém zvedáku znázorněném na *obr. 4.5*. K otáčení šroubu slouží rukojeť dlouhá 1 m a šroub má 4 závity na 1 centimetr. Zajímá nás, jakou silou musíme působit na rukojeť, abychom zvedli břemeno o hmotnosti 1 tuna. Chceme-li zvednout tunu o jeden centimetr, musíme otočit rukojeť čtyřikrát. Při jednom okružním pohybu opíše konec rukojeti dráhu přibližně 628 cm. Rukojeť tedy musí projít 2512 cm. Použijeme-li různé kladky apod., budeme zvedat jednu tunu neznámým malým závažím o hmotnosti  $m$  působícím na konec rukojeti. Tak zjistíme, že  $m$  je asi 4 kg. Takový je následek zákona zachování energie.

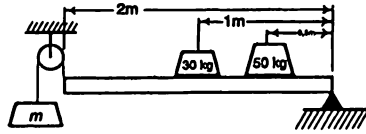


Obr. 4.5 Hever

Vezměme si teď ještě složitější příklad znázorněný na *obr. 4.6*. Tyč dlouhá 2 m je upevněna na jednom konci. Uprostřed tyče je 30 kilogramové a ve vzdálenosti 0,5 m od opory je 50

## KINETICKÁ ENERGIE

kilogramové závaží. Jak velkou silou musíme zvedat konec tyče, aby byla vyvážená, neuvažujeme-li její vlastní hmotnost?



Obr. 4.6 Zatížená tyč podepřená na jednom konci

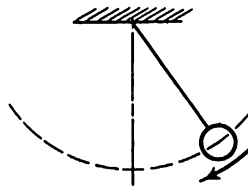
Předpokládejme, že na jeden konec jsme dali kladku, na níž visí závaží. Jak velkou hmotnost  $m$  má mít závaží, aby nastala rovnováha? Představme si, že závaží klesne o libovolnou vzdálenost. Abychom si situaci zjednodušili, předpokládejme, že klesne o 10 cm. Ptáme se, jak se zvednou uvedené závaží. Střed tyče se zvedne o 5 cm a bod, který je ve čtvrtině vzdálenosti od opory se zvedne o 2,5 cm. Potom princip, že součet součinů výšek a hmotností těles se nemění, říká: hmotnost  $m$  krát 10 cm dolů, plus 30 kg krát 5 cm nahoru, plus 50 kg krát 2,5 cm nahoru je roven nule

$$-10 m + 5 \cdot 30 + 2,5 \cdot 50 = 0, m = 27,5 \text{ kg.} \quad (4.5)$$

K vyvážení tyče je tedy třeba závaží o hmotnosti 27,5 kg. Takovým způsobem můžeme produkovat zákony „rovnováhy“ – statiku složitých mostních konstrukcí apod. Tento přístup se nazývá *princip virtuální práce*, neboť v úvahách jsme si museli *představit*, že systém se trochu pohybuje – ačkoli se ve *skutečnosti* nepohybuje, nebo je dokonce *nepohyblivý*. Tento nepatrný neskutečný pohyb jsme použili proto, abychom mohli aplikovat princip zachování energie.

### 4.3 KINETICKÁ ENERGIE

Pro objasnění jiného druhu energie uvažujme kyvadlo (obr. 4.7). Když kuličku vychýlíme a pak uvolníme, bude se kývat z jedné strany na druhou. Po dobu svého pohybu z krajní polohy do středu ztrácí výšku. Kam se poděje potenciální energie? Gravitační energie mizí v dolní poloze, ale těleso opět stoupá vzhůru. Gravitační energie musela přejít do jiné podoby. Je zřejmé, že příčinou opětovného vzestupu je *pohyba* tak se gravitační energie přeměnila v dolním bodě na nějakou jinou formu.



Obr. 4.7 Kyvadlo

Musíme odvodit vztah pro energii pohybu. Připomeneme-li si naše úvahy o vratných strojích, je nám jasné, že při pohybu v nejnižším bodě musí být množství energie, které umožňuje kuličce kyvadla dosahovat určité výšky a které nezávisí na *mechanizmu*, jímž se vzestup uskuteční, ani na

## ZACHOVÁNÍ ENERGIE

*dráze*, po níž bude kulička stoupat. Tak dostáváme vztah ekvivalence, podobný vztahu, který jsme odvodili pro dětské kostky. Jednoduchým způsobem najdeme jiný vztah pro vyjádření energie. Kinetická energie dole je rovna součinu tíhy  $G$  a výšky  $h$ , jíž může kulička v závislosti na rychlosti dosáhnout:  $W_k = G \cdot h$ . Co potřebujeme, je vztah, který by určil výšku pomocí pravidla souvisejícího s pohybem předmětů. Uvedeme-li nějaké těleso do pohybu určitou rychlostí, směřující řekněme přímo nahoru, pak dosáhne určité výšky; zatím nevíme jaké, ale tato výška závisí na rychlosti a lze ji vypočítat. Abychom našli vztah pro kinetickou energii předmětu, který se pohybuje rychlostí  $v$ , musíme vypočítat výšku, jíž může dosáhnout a násobit ji tíhou tělesa. Brzy zjistíme, že vztah můžeme zapsat takto:

$$W_k = \frac{Gv^2}{2g}, \quad (4.6)$$

kde  $g$  je tíhové zrychlení.

Skutečnost, že pohyb má energii, nemá samozřejmě nic společného s tím, že jsme v gravitačním poli. Vůbec nazáleží na tom, odkud pohyb pochází. Toto je obecný vztah pro různé rychlosti. (4.3) i (4.6) jsou přibližné vztahy. První proto, že je nesprávný při velkých výškách, takových, že přitažlivost slábne. Druhý proto, že při velkých rychlostech se uplatňují relativistické korekce. Kdybychom však nakonec získali přesný vztah pro energii, potvrdila by se platnost zákona zachování energie.

### 4.4 JINÉ FORMY ENERGIE

Abychom ukázali existenci jiných forem energie, můžeme pokračovat tak jako v předcházejících případech. Uvažujme nejprve *energií pružnosti*. Stlačíme-li pružinu, konáme určitou práci a stlačenou pružinou můžeme zvednout těleso určité hmotnosti. Stlačená pružina má tedy schopnost konat práci. Kdybychom sčítali součiny hmotností těles a jejich výšek, nevycházelo by nám to. Něco musíme přidat, abychom vystihli skutečnost, že pružina je napnutá. Vyjádříme to slovy: Napnutá pružina má energii pružnosti. Jak velká je tato energie? Když pružinu uvolníme, energie pružnosti se při průchodu rovnovážnou polohou mění na kinetickou energii. Energie pružnosti roste nebo klesá v závislosti na stlačení (roztážení) pružiny na jedné straně a kinetické energii tělesa na straně druhé. (Bylo by třeba vzít v úvahu i gravitační energii, stačí však, když experiment provedeme ve vodorovném směru).

Pohyb pružiny by neustal, kdyby nebylo ztrát! Dosud jsme se vždy dopouštěli malého podvodu tím, že jsme přidávali malý impulz, abychom zařízení uvedli do pohybu, nebo jsme hovořili o vratných strojích, nebo o jejich stálém pohybu. My však víme, že pohyb nakonec ustane. Kam se poděje energie, když pružina přestane kmitat? Tak docházíme k další formě energie, k *tepelné energii*.

V pružině nebo páce jsou krystaly sestávající z ohromného množství atomů. Jednotlivé části našich zařízení se pokoušíme sestavit s velkou přesností tak, aby při valivém pohybu částí nedocházelo k rozkmitání atomů. To by si však vyžadovalo úžasnou pečlivost. Při valivém pohybu dochází obvykle k nárazům v důsledku nepravidelností materiálu a atomy se v materiálu rozkmitají. Tak se nám ztrácí stopa této energie; zjišťujeme jenom, že atomy v materiálu se při zpomalování pohybu zařízení dostávají do neuspořádaného, zmateného pohybu. Je pravda, že zůstává kinetická energie, ale již ne ve formě viditelného pohybu. Je to vůbec skutečnost? Jak

víme, že atomy mají kinetickou energii? Teploměrem je možné zjistit, že pružina nebo páka jsou *teplejší*, a kinetická energie tedy skutečně vzrostla o určitou hodnotu. Tento druh energie nazýváme *tepelnou energií*, jenže to není nový druh energie, je to jen kinetická energie vnitřního pohybu. Při experimentech, které provádíme, máme co činit s velkými hmotami a tak nemůžeme demonstrovat zachování energie a sestavit vratné stroje, neboť při pohybu velkých celků nezůstávají atomy v klidu a určité množství náhodného pohybu vždy přechází na atomární systém. Tento pohyb není možné vidět, ale je možné ho měřit teploměry apod.

Existuje mnoho dalších forem energie, které teď samozřejmě nemůžeme podrobně popsat. Známe *elektrickou energii*, u níž jde o přitahování a odpuzování elektrických nábojů. Známe *zářivou energii*, *světelnou energii*, o níž víme, že je formou elektrické energie, neboť světlo jsou vlastně kmity elektromagnetického pole. Existuje *chemická energie*, energie, která se uvolňuje při chemických reakcích. Energie pružnosti je vlastně do jisté míry podobná chemické energii, neboť chemická energie je energií vzájemného přitahování atomů a tak je tomu i v případě energie pružnosti. Naše moderní chápání je následující: chemická energie má dvě části – kinetickou energii elektronů uvnitř atomů, neboli část chemické energie je kinetická a dále elektrickou energii interakce elektronů a protonů – zbytkem je tedy elektrická energie. Dále docházíme k *jaderné energii*, která souvisí s uspořádáním částic uvnitř jádra a ačkoli známe její vyjádření, neznáme její základní zákony. Víme, že není elektrická ani gravitační ani čistě chemická, ale nevíme, jaká vlastně je. Zdá se, že jde o další formu energie. Nakonec, v souvislosti s teorií relativity, se objevuje modifikace zákonů kinetické energie (ať už to nazveme jakkoliv), a tak je kinetická energie kombinována s tzv. *energií vázanou na hmotnost*. Předmět má energii v důsledku své samotné *existence*. Kdybych měl pozitron a elektron, které by klidně stály a nic nedělaly – odhlédneme od gravitace a čehokoli jiného – a potom by se srazily a zmizely, uvolnila by se *zářivá energie* v určitém množství, které je možné spočítat. K výpočtu potřebujeme znát jen hmotnost předmětu. Nezáleží na tom, o jaký předmět jde, – stačí, když necháme zaniknout dvě věci a získáme určité množství energie. Příslušný vztah jako první zformuloval Einstein a zní:  $E = mc^2$ .

Z naší diskuze je zřejmé, že zákon zachování energie je velmi užitečný, když provádíme analýzu; ilustrovali jsme to na několika příkladech, aniž bychom znali všechny vztahy. Kdybychom poznali všechny vztahy pro všechny druhy energie, mohli bychom analyzovat (bez zacházení do podrobností), které procesy budou probíhat a které ne. Zákony zachování jsou proto velmi zajímavé. Vzniká otázka, jaké jiné zákony zachování existují ve fyzice. Známe další dva zákony zachování, které jsou podobné zachování energie. Jeden se nazývá zákon zachování hybnosti a druhý zákon zachování momentu hybnosti. Později si o těchto zákonech řekneme více. Naše poslední úvahy neposkytovaly hlubší pohled na zákony zachování. Nerozumíme úplně zachování energie. Energií totiž nechápeme jako určitý počet malých množství. Už jste možná slyšeli, že fotony přicházejí v takovýchto množstvích – kvantech a energie fotonu je součinem Planckovy konstanty a frekvence záření. To je sice pravda, ale protože frekvence záření může být jakákoli, neexistuje zákon, který by říkal, že energie musí být určitým množstvím. Na rozdíl od Cipískových kostek můžeme mít libovolné množství energie, alespoň ve světle současného chápání. Energií tedy nechápeme jako součet něčeho v daném okamžiku, ale jako matematickou veličinu, jež je abstraktním a více méně svérázným faktem. V kvantové mechanice se ukazuje, že zachování energie úzce souvisí s jinou důležitou vlastností světa, v jejímž smyslu *věci nezávisí na absolutním čase*. Experiment provedený v daném časovém okamžiku bude mít stejný výsledek jako stejný experiment uskutečněný později. Je-li nebo není toto tvrzení zcela pravdivé, to nevíme. Předpokládáme-li však, že je pravdivé a použijeme principy kvantové mechaniky, dospějeme

## ZACHOVÁNÍ ENERGIE

k zákonu zachování energie. Je to důvtipná a zajímavá věc a není snadné ji vysvětlit. Také ostatní zákony zachování mají podobné souvislosti. Zachování hybnosti je v kvantové mechanice výsledkem předpokladu, že nezávisle na tom, *kde* provádíte experiment, jeho výsledek bude vždy stejný. Tak jako nezávislost na místě souvisí se zákonem zachování hybnosti, nezávislost na čase se zákonem zachování energie, tak *otočení* našeho zařízení nemění nic na výsledku experimentu a invariance světa vůči orientaci souřadné soustavy souvisí se zachováním *momentu hybnosti*. Kromě těchto zákonů zachování existují tři další, o nichž můžeme v dnešním chápání světa říci, že jsou přesné, a které jsou na pochopení mnohem jednodušší, neboť mají podobnou povahu jako zákony při počítání kostek.

Prvním z nich je *zákon zachování náboje* a znamená jen to, že když sečtete kladné a odečtete záporné náboje, dostanete číslo, které se nemění. Kladné náboje se mohou zrušit zápornými, ale nevytvoříte žádný čistý přebytek kladných nábojů nad zápornými. Dva další zákony jsou podobné. Jeden z nich se nazývá *zákon zachování baryonů*. Existuje řada zvláštních částic, jež se nazývají baryony (neutron a proton jsou jejich příklady). V jakékoli reakci libovolného druhu je počet baryonů vstupujících do procesu roven počtu baryonů vystupujících z procesu (antibaryon počítáme jako  $-1$  baryon). Dalším zákonem je *zákon zachování leptonů*. Za leptony považujeme následující částice: elektron, mezon a neutrino.<sup>7)</sup> Existuje antielektron, jímž je pozitron, a ten je  $-1$  lepton. Při počítání celkového počtu leptonů v reakcích zjišťujeme, že počet vstupujících a vystupujících leptonů se nemění, aspoň podle našich současných znalostí.

Hovořili jsme o šesti zákonech zachování. Tři z nich byly rafinované a týkaly se prostoru a času a další tři jednoduché v tom smyslu, že šlo o sčítání něčeho.

V souvislosti se zachováním energie musíme poznamenat, že otázka přístupné energie je něco zcela jiného. V mořské vodě je mnoho chaotického pohybu atomů, neboť moře má určitou teplotu, ale je nemožné usměrnit pohyb těchto atomů, aniž bychom použili nějakou další energii odjinud. I když víme, že energie se zachovává, energie, kterou chce člověk využít, se nezachovává tak snadno. Zákony hovořící o tom, jaké množství energie je využitelné, nazýváme *zákony termodynamiky*. Tyto zákony zahrnují pojem entropie popisu nevratných termodynamických procesů.

Závěrem můžeme odpovědět na otázku, jaké jsou naše dnešní zdroje energie. Pocházejí ze Slunce, vody, uhlí, uranu a vodíku. Slunce způsobuje dešť a ovlivnilo i vznik uhlí, takže i tyto zdroje pocházejí ze Slunce. Ačkoli se energie zachovává, přírodu to příliš nezajímá; uvolňuje množství energie ze Slunce, ale jen jedna část ze dvou miliard se dostane na Zemi. Příroda má zákon zachování energie, ale málo se o něj stará; plýtvá energií ve všech směrech. Už jsme získali energii z uranu a můžeme získat energii i z vodíku, zatím jen nebezpečnou cestou výbuchu. Kdyby se podařila řízená termionukleární reakce, mohlo by se z tekoucí vody o průtoku 12 litrů za sekundu získávat tolik energie, kolik dnes vyrábějí všechny elektrárny v USA. Je proto úkolem fyziků, aby vymysleli způsob, jak nás osvobodit od energetické krize. A to lze udělat.

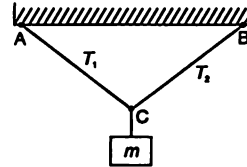
---

<sup>7)</sup> Později byl objeven další, těžký lepton zvaný tauon. (Pozn. red.)

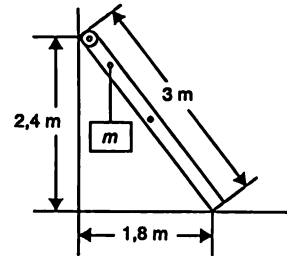
# PŘÍKLADY A CVIČENÍ

Řešte následující úlohy pomocí zákona zachování energie a principu virtuálních posunutí.

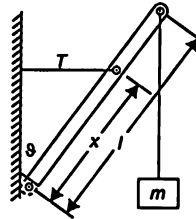
- 4.1 ■ Závaží o hmotnosti  $m = 50 \text{ kg}$  je zavěšeno uprostřed drátu  $ABC$ , jak je vidět na obrázku;  $AC = CB = 5 \text{ m}$ ,  $AB = 5\sqrt{2} \text{ m}$ . Určete napěťové síly drátu  $T_1$  a  $T_2$ .



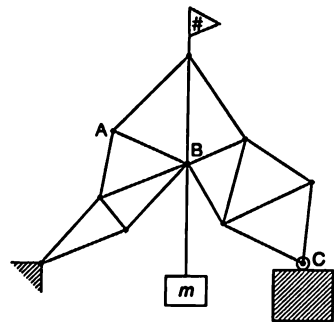
- 4.2 ■ Žebřík dlouhý  $3 \text{ m}$  je opřen šikmo o hladkou svislou stěnu. Na horním konci žebříku jsou upevněny válečky (viz obrázek). Žebřík váží  $12 \text{ kg}$  a ve vzdálenosti  $0,75 \text{ m}$  od jeho horního konce visí závaží o hmotnosti  $24 \text{ kg}$ . Určete sílu, kterou válečky tlačí na stěnu a vodorovnou a svislou složku síly, kterou žebřík působí na zem.



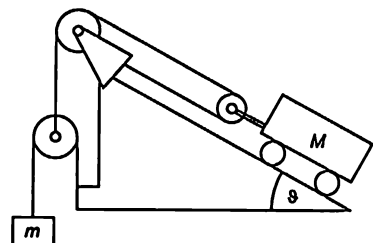
- 4.3 ■ Zvedací zařízení je tvořeno homogenní tyčí délky  $l$  a hmotnosti  $M$ , která je svým dolním koncem kloubově spojena se svislou stěnou. Ve vzdálenosti  $x$  od dolního konce tyče je upevněn vodorovný napjatý drát, který přidržuje tyč pod úhlem  $\vartheta$  ke stěně. Na horním konci tyče visí závaží o hmotnosti  $m$ . Určete sílu, která napíná vodorovný drát.



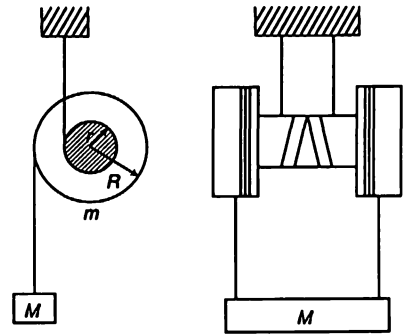
- 4.4 ■ Konstrukce je složena z lehkých hliníkových tyčí, jejichž konce jsou kloubově spojeny. V bodě  $C$  se konstrukce opírá o váleček, který se může pohybovat po hladké rovině. Při svařování se tyč  $AB$  zahřívá a prodlužuje o délku  $x$ . V důsledku toho se závaží o hmotnosti  $m$  posune ve svislém směru o vzdálenost  $y$  (viz obrázek). Posune se závaží nahoru nebo dolů? Jaká síla bude působit na tyč  $AB$ ? Bude ji roztahovat nebo stlačovat?



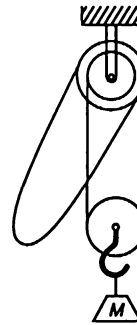
- 4.5 ■ Vozík je udržován na nakloněné rovině závažím o hmotnosti  $m$ , které je zavěšeno, jak vidíme na obrázku. Tření všech částí můžeme zanedbat. Určete hmotnost vozíku  $M$ .



- 4.6 ■ Cívka má hmotnost  $m$ , její velký a malý poloměr jsou rovny  $R$  a  $r$ . Pomocí vlákna navinutého na části cívky menšího poloměru je cívka zavěšena na nehybném trámci. Na vlákne navinutém na části o větším poloměru visí závaží o hmotnosti  $M$  (viz obrázek). Jaká musí být hmotnost závaží, aby cívka byla v rovnováze?



- 4.7 ■ U diferenciálního kladkostroje znázorněného na obrázku je použit řetěz, který má  $N$  článků na jeden metr. Pevná kladka je tvořena dvěma spojenými ozubenými koly, z nichž větší má  $n$  zubů, menší  $n - 1$  zubů; na tyto zuby se navlékají články řetězu. V soustavě působí takové tření že síly potřebné ke zvedání a ke spouštění břemene o hmotnosti  $M$  se liší  $R$ -násobně. Určete tyto síly za předpokladu, že tření nezávisí na směru pohybu.



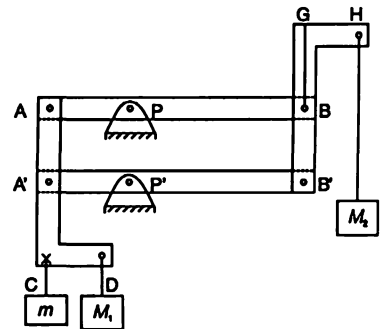
- 4.8 ■ Na hladkém přímém kuželi výšky  $h$  a kruhové podstavy poloměru  $r$  je navlečena smyčka z těžkého ohebného řetězu o hmotnosti  $M$ . Řetěz je v klidu ve vodorovné rovině, osa kužele je svislá. Určete napětovou sílu řetězu.

- 4.9 ■ Pohyblivý rám  $AA'BB'$  je upevněn ve svislé rovině v kloubových ložiscích  $P$  a  $P'$  podle obrázku. Tření všech pohyblivých částí je zanedbatelně malé. Všechny rozměry pevných úhelníků  $AA'CD$  a  $B'BGH$  jsou stejné. Dále

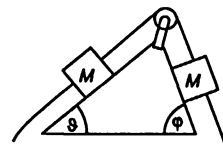
$$AP = A'P' = \frac{1}{2} PB = \frac{1}{2} P'B',$$

$$CD = GH = \frac{1}{2} AP$$

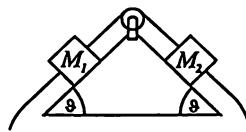
Protiváha závaží  $m$  upevněného v bodě  $C$  v nepřítomnosti závaží  $M_1$  a  $M_2$  udržuje rám v rovnováze. Zavěsíme-li v bodě  $D$  závaží  $M_1$  o hmotnosti 0,5 kg, rovnováha se poruší. Jaké závaží  $M_2$  musíme zavěsit do bodu  $H$ , aby se rovnováha opět obnovila?



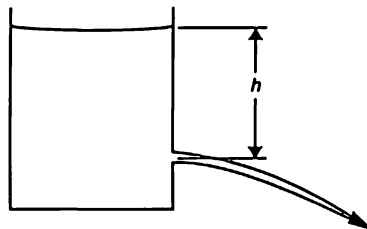
- 4.10 ■ Dvě nakloněné dokonale hladké roviny, které svírají s vodorovnou rovinou úhly  $\vartheta$  a  $\varphi$  tvoří nehybný klín. Na těchto rovinách leží hranoly o stejné hmotnosti spojené vlákem přes kladku podle obrázku. Jakou rychlost budou mít hranoly, projdou-li od začátku pohybu vzdálenost  $d$ ?



- 4.11 ■ Řešte předchozí úlohu za předpokladu, že hmotnosti hranolů jsou různé ( $M_1 > M_2$ ) a úhly, které svírají nakloněné roviny s vodorovnou rovinou jsou stejné.



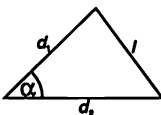
- 4.12 ■ V nádobě konstantního vodorovného průřezu  $S$  je ideální kapalina hustoty  $\rho$ . Kapalina vytéká malým otvorem průřezu  $s$  v hloubce  $h$ . Jakou rychlostí kapalina z nádoby vytéká?



- 4.13 ■ Z řešení předchozích úloh je zřejmé, že problém statické rovnováhy soustav bez tření lze pomocí principu virtuálních posunutí převést na čistě geometrickou úlohu: kam se posune jeden bod, známe-li malé posunutí jiného. Často můžeme na tuto otázku odpovědět, použijeme-li následující vlastnosti trojúhelníků.

- I. Svírají-li strany trojúhelníka o neměnných délkách  $d_1$  a  $d_2$  úhel  $\alpha$ , jenž se změní o malou hodnotu  $\Delta\alpha$ , změní se délka protější strany  $l$

$$\Delta l = \frac{d_1 d_2}{l} \sin \alpha \Delta \alpha.$$

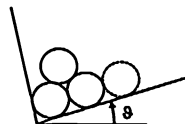


- II. Změní-li se délky stran pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami  $a$ ,  $b$  a přeponou  $c$  o  $\Delta a$ ,  $\Delta b$  a  $\Delta c$ , bude pro tyto změny platit vztah

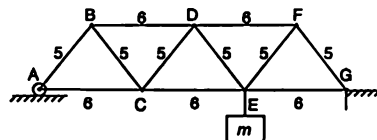
$$a \Delta a + b \Delta b = c \Delta c.$$

Můžete to dokázat?

- 4.14 ■ Nákladní auto naložené stejnými hladkými kládami zajelo zadními koly do strouhy, takže jeho korba se naklonila a svírá úhel  $\vartheta$  s vodorovnou rovinou. Při vykládání nákladu zůstaly na korbě poslední čtyři klády v poloze, kterou vidíme na obrázku. Odstráníme-li kládu vyznačenou čárkovaně, zbylé tři klády se při malém zmenšení úhlu  $\vartheta$  rozvalí. Najděte úhel  $\vartheta$ .



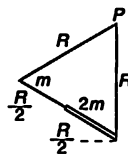
- 4.15 ■ Lehká konstrukce je tvořena vodorovnými a šikmými tyčemi volně spojenými klouby podle obrázku. Délky šikmých a vodorovných tyčí jsou v poměru 5:6. V bodě  $E$  je zavěšeno závaží o hmotnosti  $m$ .



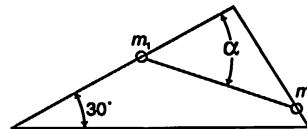
- a) Které z tyčí můžeme nahradit ohebnými vazbami?  
b) Jakou silou je namáhána tyč  $BD$ ?



- 4.16 ■ Tyč délky  $R$  je složena ze dvou stejně dlouhých částí, z nichž jedna je dvakrát těžší než druhá. Tyč je uvázána na koncích ke dvěma vláknům délky  $R$ , jejichž druhé konce jsou upevněny v bodě  $P$ . Jaký úhel bude tyč v rovnováze svírat s vodorovnou přímkou?



- 4.17 ■ Rámeček tvaru pravoúhlého trojúhelníka je zhotoven z pevného drátu a umístěn ve svislé rovině (viz obrázek). Po drátě kloužou bez tření dvě závažíčka o hmotnostech  $m_1=100\text{ g}$ ,  $m_2=300\text{ g}$  spojená vláknem. Určete, jakou silou je napínáno vlákno a jaký svírá úhel se stranou trojúhelníka v rovnovážné poloze.



# Č

# 5

# Čas a vzdálenost

## 5.1 POHYB

## 5.2 ČAS

## 5.3 KRÁTKÉ ČASY

## 5.4 DLOUHÉ ČASY

## 5.5 JEDNOTKY A STANDARDY ČASU

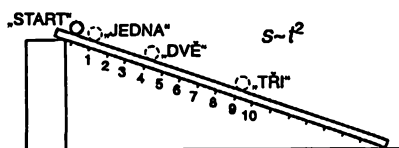
## 5.6 VELKÉ VZDÁLENOSTI

## 5.7 KRÁTKÉ VZDÁLENOSTI

### 5.1 POHYB

V této kapitole si všimneme některých představ o *čase a vzdálenosti*. Již jsme zdůraznili, že fyzika – právě tak jako další vědy – závisí na *pozorování*. Je možné říci, že vývoj fyzikálních věd do jejich dnešní podoby závisel do značné míry na důrazu, který se kladl na *kvantitativní* pozorování. Jen pomocí kvantitativních pozorování je možné dospět ke kvantitativním vztahům, jež jsou srdcem fyziky.

Podle názoru mnohých se začátky fyziky datují od výzkumů Galileových před 350 lety, a Galileo je vlastně považován za prvního fyzika. Do té doby mělo studium pohybu jen filozofický charakter a spočívalo na argumentech, k nimž bylo možno dospět pouhým uvažováním. Většina argumentů pocházela od Aristotela a jiných řeckých filozofů a tyto argumenty byly považovány za „dokázané“. Galileo však byl v tomto směru skeptický a pustil se do následujícího experimentu při zkoumání pohybu: Nechal kuličku koulet po nakloněné rovině a pozoroval pohyb. Nejen že se díval, ale i měřil, *jak daleko kulička za jaký čas* dojde.



Obr. 5.1 Pohyb po nakloněné rovině

Způsob měření vzdálenosti byl dobře znám dávno před Galileem, neexistovaly však přesné způsoby měření času, zejména krátkých časů. Ačkoli sám později vynalezl spolehlivější hodiny (ne však takové, jaké známe dnes), prováděl Galileo své první experimenty tak, že pomocí vlastního pulzu určoval stejné časové intervaly. Udělejme nyní totéž:

Počítejme údery tepu po dobu pohybu kuličky: „raz... dva... tři... čtyři... pět... šest... sedm... osm...“. Požádejme kolegu, aby označil polohu kuličky při každém tepu. Tak můžeme *změřit vzdálenost*, kterou kulička urazila od vypuštění za jeden, dva, tři atd. stejné intervaly času. Galileo vyjádřil výsledek svých pozorování následujícím způsobem: Když si polohu kuličky značíme po 1, 2, 3, 4... jednotkách času od jejího vypuštění, pak jsou tyto značky vzdáleny od počátečního bodu úměrně číslům 1, 4, 9, 16... Dnes bychom řekli, že vzdálenost je úměrná druhé mocnině času

$$s \sim t^2.$$

Studium *pohybu*, které je základem všech fyzikálních disciplín, se zabývá dvěma otázkami: kde? a kdy?

## 5.2 ČAS

Nejprve se zamysleme nad tím, co chápeme jako *čas*. Co je čas? Bylo by krásné, kdyby se nám podařilo najít dobrou definici času. Ve slovnících nacházíme „čas“ definovaný jako „období“ a „období“ zase jako „čas“, což se nezdá být příliš použitelné. Snad bychom mohli říci: „Čas je to, co se děje, když se nic jiného neděje.“ To nás však nedovede příliš daleko. Je snad právě tak dobré, když si přiznáme, že čas je jedna z těch věcí, kterou pravděpodobně nemůžeme definovat (v slovníkovém smyslu), a říkat o něm jen to, co už víme: Čas je to, jak dlouho čekáme!

Skutečně důležité však není to, jak čas *definujeme*, ale jak ho *měříme*. Jedním ze způsobů měření času je využití něčeho, co se neustále děje, a to pravidelným způsobem – něčeho, co je *periodické*. Například den. Den, ten se stále opakuje. Když však o tom uvažujete, můžete si položit otázku: „Jsou dny periodické, jsou pravidelné? Mají všechny dny stejnou délku?“ Určitě máte dojem, že letní dny jsou delší než zimní. Ovšem, když se moc nudíte, připadají vám i některé zimní dny velmi dlouhé. Již jste určitě slyšeli někoho zvolat: „Ach, to byl dnes dlouhý den!“

Zdá se však, že dny jsou v *průměru* téměř stejně dlouhé. Existuje způsob, jak prověřit, jsou-li dny stejně dlouhé, buď dva za sebou následující nebo alespoň v průměru? Jedním ze způsobů je porovnání s jiným periodickým jevem. Všimněme si, jak je možné takové porovnání provést pomocí přesýpacích hodin. Pomocí přesýpacích hodin „vytvoříme“ periodičnost, budeme-li je ve dne v noci překlápět, jakmile se přesype poslední zrno písku.

Potom nám stačí spočítat počet překlopení hodin od jednoho do druhého rána. Tak zjistíme, že počet „hodin“, tj. překlopení, není každý „den“ stejný! Mohli bychom podezřít Slunce nebo přesýpací hodiny nebo oboje. Po jistých úvahách by nás mohlo napadnout, že „hodiny“ je třeba počítat od poledne do poledne. (Poledne tu *nedefinujeme* jako 12.00 hodin, ale jako okamžik, kdy Slunce vrcholí.) Tentokrát bychom zjistili, že každý den má stejný počet „hodin“. Získali jsme jakousi důvěru, že jak „hodina“, tak „den“ se pravidelně opakují, tj. vyznačují po sobě následující stejné časové intervaly, ačkoli jsme *nedokázali*, že jsou „skutečně“ periodické. Je možné si položit otázku, zda by nemohla jakási zázračná bytost zpomalovat pohyb písku v noci a urychlovat ho ve dne. Náš experiment na takovou otázku odpověď nedává. Můžeme říci jen tolik, že jsme zjistili, že pravidelnost jednoho druhu je ve shodě s pravidelností jiného druhu. Můžeme říci, že naše *definice* času spočívá v opakování se určité zřejmě periodické události.

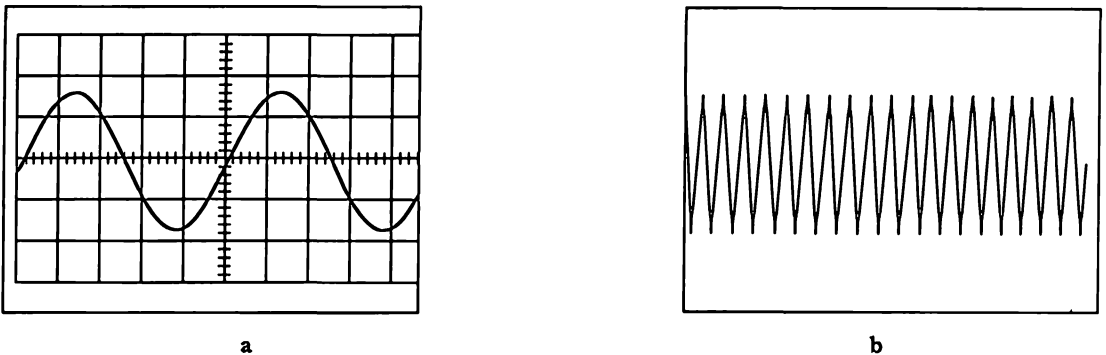
### 5.3 KRÁTKÉ ČASY

Měli bychom si uvědomit, že při zkoušce opakování dne jsme získali i další důležitý poznatek. Našli jsme způsob přesnějšího měření *části* dne. Našli jsme způsob měření kratších časových úseků. Můžeme v tomto postupu pokračovat a tak měřit ještě kratší časové intervaly?

Galileo zjistil, že kyvadlo vykoná každý kyv za stejnou dobu, zůstává-li velikost rozkvyvu malá. Potvrzuje to test určující počet kyvů kyvadla za jednu „hodinu“. Takto můžeme vytvořit značky zlomků hodiny. Použijeme-li mechanické zařízení na počítání kyvů a na udržení chodu kyvadla – získáme kyvadlové hodiny našich dědečků.

Dohodněme se, že jestliže naše kyvadlo kmitá 3600-krát za hodinu (a je-li takových hodin 24 za den), nazveme periodu kyvadla jednou „sekundou“. Tak jsme naši původní časovou jednotku rozdělili přibližně na  $10^5$  částí. Stejně můžeme sekundu rozdělit na menší a menší intervaly. Zjistíme, že není praktické konstruovat mechanická kyvadla, která kývají libovolně rychle, ale můžeme konstruovat *elektrická* kyvadla, nazývaná oscilátory, která nám poskytnou periodicitu s velmi krátkými periodami kmitů. V takových elektronických oscilátorech je to elektrický proud, který kmitá podobným způsobem jako kyvadlo.

Můžeme sestavit celou řadu takových elektronických oscilátorů, každý s periodou desetkrát kratší, než má předcházející. Každý oscilátor můžeme „kalibrovat“ vůči sousednímu pomalejšímu oscilátoru určením počtu kmitů, jež vykoná za dobu jednoho kmitu pomalejšího oscilátoru. Je-li perioda kmitů našich hodin kratší než zlomek sekundy, nemůžeme určovat kmity bez pomocného zařízení, které rozšiřuje naši pozorovací schopnost. Jedním z takových zařízení je osciloskop s elektronovým paprskem, jenž pracuje jako jakýsi mikroskop pro krátké časy. Toto zařízení zakresluje na fluorescenční stínítko graf elektrického proudu (nebo napětí) v závislosti na čase. Připojíme-li osciloskop ke dvěma sousedním oscilátorům z naší posloupnosti tak, že nejprve zakresluje proud jednoho a potom proud druhého oscilátoru, dostáváme dva grafy podobné těm, které jsou znázorněny na *obr. 5.2*. Tak můžeme pohotově určit počet period rychlejšího oscilátoru po dobu jedné periody pomalejšího oscilátoru.



Obr. 5.2 Dva pohledy na obrazovku osciloskopu

a) osciloskop je připojen k jednomu oscilátoru

b) osciloskop je připojen k oscilátoru, jehož perioda je desetinou periody předcházejícího oscilátoru

Pomocí moderních elektronických metod byly zkonstruovány oscilátory s periodou krátkou kolem  $10^{-12}$  sekund a byly kalibrovány (porovnávacími metodami podobnými metodě, kterou

jsme popsali) v naší standardní časové jednotce – sekundě. Vynalezení a zdokonalení „laseru“ neboli zesilovače světla umožnilo v nedávných letech konstrukci oscilátorů s ještě kratšími periodami než  $10^{-12}$  sekundy, ale zatím je nebylo možné kalibrovat popsáním způsobem, ačkoli i k tomu nepochybně dojde.

Časy kratší než  $10^{-12}$  sekundy byly měřeny, ale jinými způsoby. Ve skutečnosti byla použita jiná definice „času“. Jedním ze způsobů bylo pozorování vzdálenosti mezi dvěma událostmi, jež se stanou s pohybujícím se předmětem. Jestliže například zapneme a pak vypneme reflektory pohybujícího se auta, můžeme určit, jak dlouho byla světla zapnutá, jestliže víme, kde byla zapnuta a vypnuta a jakou rychlostí se auto pohybovalo. Čas určíme tak, že vzdálenost, po kterou byla světla zapnutá, dělíme rychlostí.

Nedávno byla taková metoda použita pro měření doby života  $\pi^0$  mezonu. Mikroskopickým pozorováním drobných stop zanechaných ve fotografické emulzi, v níž byl  $\pi^0$  mezon vytvořen, se zjistilo, že  $\pi^0$  mezon (pohybující se rychlostí téměř rovnou rychlosti světla) urazil v průměru vzdálenost  $10^{-7}$  metrů dříve, než se rozpadl. Žil jen přibližně  $10^{-16}$  sekundy. Je třeba však zdůraznit, že jsme použili trochu jinou definici „času“ než předtím. Dokud však není rozpor v našem chápání, věříme, že tyto definice jsou dostatečně rovnocenné.

Dalším rozšířením našich metod – a je-li to nevyhnutelné i našich definic – můžeme určit trvání ještě rychlejších fyzikálních jevů. Můžeme hovořit o periodě jaderných kmitů. Můžeme hovořit o délce života nově objevených podivných rezonancí (částic), o nichž se hovoří v kapitole 2. Jejich celková délka života je pouze  $10^{-24}$  sekundy, což je přibližně doba, kterou potřebuje světlo (pohybující se největší ze známých rychlostí) k průchodu jádrem vodíku (což je nejmenší známý předmět).

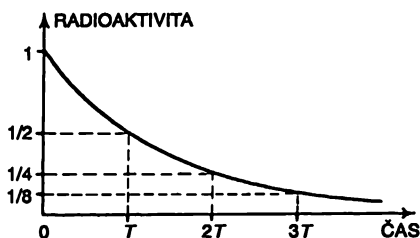
Co je možné říci o ještě kratších časech? Existuje čas v ještě menším měřítku? Má vůbec smysl hovořit o ještě kratších časech, když neumíme měřit – nebo dokonce si rozumně představit – něco, co se odehrává v kratším čase? Snad ne. Toto jsou některé otevřené otázky, které si budete klást a na které snad naleznete odpověď za dalších dvacet nebo třicet let.

## 5.4 DLOUHÉ ČASY

Nyní uvažujme časy delší než jeden den. Měření dlouhých časů je jednoduché; budeme prostě počítat dny – dokud bude existovat někdo, kdo to bude moci dělat. Tak docházíme k další přirozené periodicitě: roku, který má přibližně 365 dní. Zjišťujeme i to, příroda nám někdy poskytuje počítadlo let, a to v podobě letokruhů stromů nebo říčních naplavenin. V některých případech můžeme využít těchto přírodních časových značek k určení času, který uplynul od nějaké dávné události.

Nemůžeme-li při měření dlouhých časů počítat roky, musíme hledat jiný způsob měření. Jedním z neúspěšnějších je použití radioaktivního materiálu jako „hodin“. V tomto případě nemáme periodický proces tak jako v případě dne nebo kyvadla, ale máme nový druh „pravidelnosti“. Zjišťujeme, že radioaktivita jistého vzorku materiálu klesá o stejné procento, jestliže ji určíme ve dvou stejných po sobě jdoucích přírůstcích jeho věku. Nakreslíme-li graf radioaktivity v závislosti na čase (měřeného např. ve dnech), dostaneme křivku jako na obr. 5.3. Vidíme, že v případě poklesu radioaktivity na jednu polovinu za  $T$  dní ( $T$  nazýváme „poločasem rozpadu“) dochází k poklesu na jednu čtvrtinu za dalších  $T$  dní atd. V libovolném časovém intervalu  $t$  je obsaženo  $t/T$  „poločasů rozpadu“ a podíl aktivity, která zbývá po čase  $t$  je roven  $(1/2)^{t/T}$ .

## DLOUHÉ ČASY



Obr. 5.3 Pokles radioaktivity s časem; aktivita klesne o polovinu za dobu „poločasu rozpadu“  $T$

Víme-li, že kousek materiálu, například dřeva, obsahoval při svém vzniku množství  $A$  radioaktivního materiálu a přímým měřením zjistíme, že nyní obsahuje množství  $B$ , můžeme vypočítat věk předmětu  $t$  řešením rovnice

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T} = \frac{B}{A}.$$

Naštěstí existují případy, v nichž známe množství radioaktivity přítomné při vzniku předmětu. Víme například, že oxid uhličitý ve vzduchu obsahuje malý zlomek radioaktivního izotopu uhlíku  $^{14}\text{C}$  (neustále doplňovaný působením kosmického záření). Když měříme celkový obsah uhlíku v předmětu, víme, že určitý zlomek tohoto množství byl původně radioaktivní  $^{14}\text{C}$ , a proto známe počáteční množství  $A$  vystupující v uvedeném vztahu. Uhlík  $^{14}\text{C}$  má poločas rozpadu 5 000 let. Pečlivým měřením můžeme zjistit množství, které zůstalo po 20 poločasech rozpadu nebo jiném podobném čase a můžeme proto stanovit stáří předmětů z organických látek, které rostly už před 100 000 lety.

Zajímá nás však i věk ještě starších věcí a zdá se, že ho umíme určit. Mnohé z našich poznatků jsou založeny na měření jiných radioaktivních izotopů, jež mají různé poločasy rozpadu. Použijeme-li izotop, jenž má delší poločas rozpadu, můžeme měřit delší časy. Například uran má izotop, jehož poločas rozpadu je asi  $10^9$  let, takže když nějaký materiál při svém vytvoření před  $10^9$  lety obsahoval uran, zůstane dnes z tohoto uranu jen polovina. Uran se při rozpadu mění na olovo. Uvažujme kousek horniny, jenž vznikl před mnoha lety nějakým chemickým procesem. Olovo, jež se chemicky liší od uranu, by mělo být v jedné části horniny a uran v jiné části horniny. Uran a olovo jsou tedy při vzniku horniny odděleny. Jestliže však tentýž kousek horniny zkoumáme dnes, pak na místě, kde byl původně uran, najdeme určitou část uranu a určitou část olova. Porovnáním těchto částí můžeme určit, kolik procent uranu zaniklo a přeměnilo se na olovo. Touto metodou bylo stáří některých hornin určeno na několik miliard let. Zobecněním této metody, kdy místo v horninách byly uran a olovo sledovány v mořích a byly uvažovány celosvětové průměry, se podařilo (v průběhu nedávných let) určit stáří Země na přibližně 5,5 miliardy let.

Povzbuzující je zjištění, že podle uranové metody je Země stejně stará jako meteority, které na ni dopadají. Vypadá to tedy tak, že Země byla vytvořena z kusů skal létajících prostorem a meteority jsou pravděpodobně zbytky tohoto materiálu. Někdy před více než pěti miliardami let měl vesmír svůj počátek. Dnes se domníváme, že alespoň část vesmíru měla počátek před deseti nebo dvanácti miliardami let. Nevíme, co se stalo předtím. Mohli bychom se vlastně ptát: „Má taková otázka smysl? Má dávno minulý čas vůbec nějaký smysl?“

## ČAS A VZDÁLENOST

Tabulka časů

Roky	Sekundy		Střední doba života
		????????????????	
10 <sup>9</sup>	10 <sup>18</sup>	Stáří vesmíru	238U
		Stáří Země	
10 <sup>6</sup>	10 <sup>15</sup>		
		První člověk	
10 <sup>3</sup>	10 <sup>12</sup>	Stáří pyramid	226Ra
		Stáří Spojených států	
1	10 <sup>9</sup>	Stáří člověka	3H
	10 <sup>6</sup>		
		Jeden den	
	10 <sup>3</sup>	Světlo projde od Slunce k Zemi	neutron
	1	Jeden úder srdce	
	10 <sup>-3</sup>	Perioda zvukové vlny	
	10 <sup>-6</sup>	Perioda rádiové vlny	mion π <sup>±</sup> mezon
	10 <sup>-9</sup>	Světlo urazí 25 cm	
	10 <sup>-12</sup>	Perioda rotace molekul	
	10 <sup>-15</sup>	Perioda atomových kmitů	
	10 <sup>-18</sup>	Světlo projde atomem	π <sup>0</sup> mezon
	10 <sup>-21</sup>		
		Perioda jaderných kmitů	
	10 <sup>-24</sup>	Světlo projde jádrem	podivné částice
		????????????????	

### 5.5 JEDNOTKY A STANDARDY ČASU

Již jsme naznačili, že je vhodné vycházet z nějaké standardní časové jednotky a ostatní časy vztahovat k jejím násobkům nebo zlomkům. Co máme vzít jako základní standard času? Máme za něho zvolit tep lidského srdce? Porovnáme-li tepy, zjistíme, že se značně liší. Porovnáme-li dvě hodiny zjistíme, že se jejich údaje tak mnoho neliší. Proto by bylo možné vzít za standard hodiny. Jenže čím hodiny. Existuje pohádka o švýcarském chlapci, který chtěl, aby všechny hodiny v jeho městě zvonily poledne ve stejnou chvíli. Tak se vydal na cestu, aby přesvědčil lidi o užitečnosti této myšlenky. Každý vlastník hodin považoval tuto myšlenku za vynikající, ale jen v případě, kdy by se všechny ostatní hodiny přizpůsobily jeho hodinám. Je dost těžké rozhodnout, které hodiny je třeba vzít za standard. Naštěstí všichni uznáváme jedny hodiny – Zemi. Perioda otáčení Země byla dlouho považována za časový standard. Když však byla měření stále přesnější, zjistilo se, že rotace Země není dokonale periodická, měříme-li ji nejpřesnějšími hodinami. Těmi

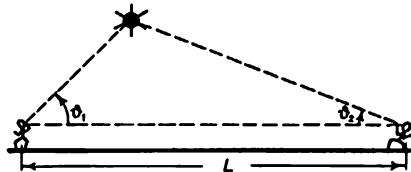
„nejpřesnějšími“ hodinami jsou ty, jejichž přesnosti důvěřujeme proto, že jejich údaje navzájem souhlasí. Dnes víme, že z různých důvodů jsou některé dny kratší, jiné delší a v průměru se s postupem času perioda otáčení Země trochu prodlužuje.

Až donedávna jsme nenašli nic lepšího, než periodu zemské rotace, takže všechny hodiny se vztahovaly k délce dne a sekunda byla definována jako  $1/86\,400$  středního slunečního dne. Nedávno jsme však získali zkušenosti s některými přírodními oscilátory, o nichž dnes předpokládáme, že poskytují stálejší časový normál než Země a jsou také založeny na přírodním jevu přístupném všem. Jsou to tzv. „atomové hodiny“. Jejich základní vnitřní periodou je perioda atomových kmitů, jež téměř nezávisí na teplotě a jiných vnějších vlivech. Tyto hodiny měří čas s přesností lepší než  $10^{-9}$ . Profesor Norman Ramsey na Harvardské univerzitě nedávno navrhl a postavil zdokonalené atomové hodiny využívající kmitů vodíkového atomu. Je přesvědčen, že tyto hodiny mohou být ještě stokrát přesnější. Měření, která probíhají, ukáží, je-li to pravda.

Protože se podařilo sestavit hodiny, udávající čas mnohem přesněji než astronomické metody, vědci se skoro jistě dohodnou na definici časové jednotky pomocí některých z atomových hodin.<sup>8)</sup>

## 5.6 VELKÉ VZDÁLENOSTI

Nyní věnujme pozornost otázce *vzdáleností*. Jak vzdálené, nebo jak velké jsou věci? Každý ví, že při měření vzdáleností vezmeme tyč, postupně ji přikládáme a počítáme. Nebo si pomůžeme palcem a počítáme. Začneme tedy s jednotkou a počítáme. Jak se však měří menší věci? Jak rozdělujeme vzdálenosti? Stejně tak jako jsme rozdělovali čas: Vezmeme menší jednotku a počítáme, kolik takových jednotek vytvoří větší jednotku. Tak můžeme měřit menší a ještě menší délky.



Obr. 5.4 Výška družice určená triangulací

Vzdáleností však nerozumíme vždy to, co můžeme měřit metrovou tyčí. Bylo by těžké měřit horizontální vzdálenost mezi dvěma vrcholy hor jen pomocí dřevěného metru. Ze zkušeností víme, že vzdálenost je možné měřit i jiným způsobem – triangulací. To sice znamená použít jinou definici vzdálenosti, ale v případech, kdy jsou obě dvě definice použitelné, dávají shodný výsledek. Prostor je více méně tím, za co ho považoval Euklides, a proto jsou uvedené definice shodné. Protože jsou shodné na Zemi, máme k triangulaci určitou důvěru i při použití pro ještě větší vzdálenosti. Například pomocí triangulace jsme mohli změřit výšku první umělé družice. Zjistili jsme, že byla asi  $5 \cdot 10^5$  metrů vysoko. Při pečlivém měření můžeme podobně změřit vzdálenost k Měsíci. Dva teleskopy na různých místech Země nám poskytnou dva úhly, které potřebujeme. Takto se zjistilo, že Měsíc je od Země vzdálen  $4 \cdot 10^8$  metrů.

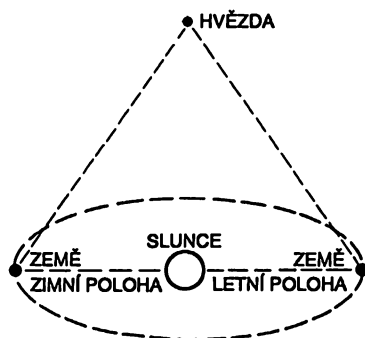
<sup>8)</sup> Sekunda je dnes definována jako doba trvání 9 192 631 770 period záření, které odpovídá přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu atomu cesia 133. (Pozn. red.)



Tímto způsobem však nemůžeme měřit vzdálenost ke Slunci, nebo alespoň dosud se to ještě nikomu nepodařilo. Přesnost zaostření na daný bod na Slunci a měření úhlů není dostatečná pro určení vzdálenosti ke Slunci. Jak tedy můžeme měřit vzdálenost ke Slunci? Musíme vymyslet zobecnění myšlenky triangulace. Měříme relativní vzdálenosti všech planet astronomickými pozorováními míst, kde planety vidíme, a tak dostáváme obraz sluneční soustavy se správnými *relativními* vzdálenostmi, ale bez *absolutní* vzdálenosti. Potom potřebujeme jedno absolutní měření, což lze provést různými způsoby. Jedním ze způsobů, o němž se až donedávna předpokládalo, že je nejpřesnější, je měření vzdálenosti od Země k Erosu, jedné z malých planetek, jež se čas od času pohybuje v blízkosti Země. Triangulací na tento malý objekt je možné získat požadované cejchovací měření. Známe-li ostatní relativní vzdálenosti, můžeme určit například vzdálenost od Země ke Slunci nebo od Země k Plutu.

V posledních letech se velmi zdokonalily naše poznatky o rozměrech sluneční soustavy. V laboratorických firmy Jet Propulsion byla přesně změřena vzdálenost od Země k Venuši přímým radarovým pozorováním. To je, samozřejmě, další způsob určování vzdáleností. Známe rychlost, jakou se šíří světlo (a tedy i radarové vlny) a předpokládáme, že ta rychlost je stejná všude mezi Zemí a Venuší. Vyšleme rádiovou vlnu a měříme čas, dokud se odražená vlna nevrátí zpět. Z času odvodíme *vzdálenost* za předpokladu, že známe rychlost. Máme tedy skutečně jinou definici měření vzdálenosti.

Jak měříme vzdálenost k hvězdě, která je mnohem dále? Naštěstí se můžeme vrátit k triangulační metodě, neboť Země nám při svém pohybu kolem Slunce poskytuje velkou základnu pro měření předmětů mimo sluneční soustavu. Zaostříme-li teleskop na hvězdu v létě a v zimě, máme naději určit dva potřebné úhly dostatečně přesně a můžeme změřit vzdálenost k hvězdě.



Obr. 5.5 Vzdálenost blízkých hvězd je možné změřit triangulací, když se jako základnu použije průměr zemské oběžné dráhy.

Co je však možné dělat tehdy, když jsou hvězdy příliš vzdáleny pro použití triangulace? Astro-  
nomové vždy objevují nové způsoby měření vzdáleností. Zjistili například, že je možné odhadnout velikost a jasnost<sup>9)</sup> hvězdy pomocí její barvy. Byly měřeny barva a jasnost mnoha blízkých hvězd – jejichž vzdálenosti známe pomocí triangulace – a bylo zjištěno, že existuje jednoznačný vztah mezi barvou a vlastní jasností hvězd (ve většině případů). Změříme-li barvu vzdálené hvězdy, můžeme využít tohoto vztahu a určit vlastní jasnost hvězdy. Měřením jasnosti hvězdy, kterou *pozorujeme* na Zemi (mohli bychom říci, jak tmavá se nám hvězda jeví), můžeme vypočítat, jak je hvězda vzdálená. (Při dané vlastní jasnosti klesá pozorovaná jasnost se čtvercem vzdálenosti.) Pěkným

<sup>9)</sup> V astronomii se pozorovaná jasnost hvězdy udává jako její hvězdná velikost (magnituda). (Pozn. red.)

potvrzením správnosti této metody měření hvězdných vzdáleností jsou výsledky získané pro skupinu hvězd známých jako kulové hvězdokupy. Fotografie takové skupiny je znázorněna na obr. 5.6. Hned při prvním pohledu na fotografii je člověk přesvědčen, že tyto hvězdy jsou pohromadě. Tentýž výsledek je možné získat i z měření vzdáleností pomocí metody jasnost-barva.



Obr. 5.6 Hvězdokupa v blízkosti centra naší galaxie. Tyto hvězdy jsou od Země vzdáleny 30 000 světelných let, tedy asi  $3 \cdot 10^{20}$  m.

Studium mnoha kulových hvězdokup poskytuje další důležitou informaci. Bylo zjištěno, že v určité části oblohy je vysoká koncentrace takových shluků a většina z nich je od nás téměř stejně vzdálena. Spojením této informace s jinými důkazy docházíme k závěru, že tato koncentrace hvězdokup označuje střed naší Galaxie. Tak víme, že vzdálenost do středu Galaxie je asi  $10^{20}$  metrů.



Obr. 5.7 Spirální galaxie podobná naší. Za předpokladu, že její průměr je stejný jako průměr naší Galaxie, můžeme z její zdánlivé velikosti určit její vzdálenost. Od Země je vzdálena 30 milionů světelných roků ( $3 \cdot 10^{23}$  m).

Poznání velikosti naší vlastní Galaxie nám dalo do ruky klíč k měření ještě větších vzdáleností – vzdáleností k jiným galaxiím. Obr. 5.7 je fotografie galaxie, jež má tvar velmi podobný naší Galaxii. Pravděpodobně je i stejně velká. (Jiné důkazy hovoří ve prospěch myšlenky, že všechny galaxie jsou přibližně stejně velké.) Je-li stejně velká jako naše Galaxie, pak můžeme určit její vzdálenost. Změříme úhel, který vytíná na obloze a když zjistíme její průměr, vypočteme její vzdálenost opět triangulací.

Pomocí obrovského teleskopu na Mt. Palomar byly nedávno získány fotografie velmi vzdálených galaxií. Jedna z nich je na obr. 5.8. Dnes se domníváme, že některé z těchto galaxií jsou v přibližně poloviční vzdálenosti k hranicím vesmíru – vzdáleny  $10^{26}$  metrů, což je největší vzdálenost, kterou můžeme uvažovat!



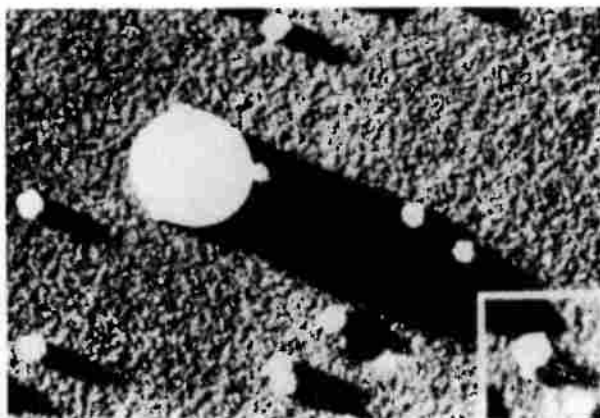
Obr. 5.8 Od nás nejvzdálenější objekt, 3C295 v souhvězdí pastýře (označený šipkou), jenž byl v roce 1960 změřen 5 metrovým teleskopem.

## 5.7 MALÉ VZDÁLENOSTI

Uvažujme nyní menší vzdálenosti. Dělení metru na části je jednoduché. Bez větších problémů můžeme vyznačit tisíc stejných částí, které dohromady dávají jeden metr. S trochu většími obtížemi, ale podobným způsobem (pomocí dobrého mikroskopu), můžeme vyznačit tisíc stejných částí milimetru a vytvořit tak stupnici mikrometrů (miliontin metru). Je těžké pokračovat k menším stupnicím, protože nemůžeme „vidět“ předměty, jež jsou menší než vlnová délka viditelného světla (kolem  $5 \cdot 10^{-7}$  metru).

Omezovat se jen na to, co můžeme vidět, však není nevyhnutelné. Pomocí elektronového mikroskopu můžeme pokračovat v našem postupu a můžeme získat fotografie v ještě menším měřítku, asi tak  $10^{-8}$  metru (obr. 5.9). Nepřímými měřeními – jistým druhem triangulace v mikroskopických rozměrech – můžeme pokračovat v měření menších a menších předmětů. Především ze způsobu odrazu světla krátkých vlnových délek (rentgenových paprsků) na systému bodů se známými rozestupy určíme vlnovou délku světelného vlnění. Potom z rozptylových

obrazců téhož světla na krystalu můžeme určit relativní polohy atomů v krystalu. Tak získáme výsledky, jež souhlasí s rozložením atomů určeným chemickými prostředky. Tímto způsobem zjistíme, že atom má průměr asi  $10^{-10}$  metru.



Obr. 5.9 Fotografie virových molekul zhotovená pomocí elektronového mikroskopu. „Velká“ koule slouží ke kalibraci a má průměr  $2 \cdot 10^{-7}$  m.

Mezi typickým atomovým rozměrem  $10^{-10}$  metru a jadernými rozměry  $10^{-15}$  metru řádově  $10^5$ -krát menšími je velká „mezera“ ve fyzikálních rozměrech. Pro jaderné rozměry se stává výhodným jiný způsob měření velikosti. Měříme *zdaňlivou* plochu  $\sigma$  nazývanou *účinným průřezem*. Chceme-li zjistit poloměr, získáme ho ze vztahu  $\sigma = \pi r^2$ , neboť jádro je téměř kulové.

Jaderný průřez je možné měřit při dopadu svazku vysokoenergetických částic na tenkou vrstvu materiálu sledováním počtu částic, jež jsou odchýleny. Tyto vysokoenergetické částice proniknou řídkým oblakem elektronů a zastaví se nebo se vychýlí jen tehdy, narazí-li na soustředěnou hmotu jádra. Předpokládejme, že máme kousek materiálu, který je 1 cm tlustý. V takovém kousku bude asi  $10^8$  atomových vrstev. Jádra jsou však tak malá, že je málo pravděpodobné, že se dvě jádra ocitnou za sebou. Můžeme si tedy *představit*, že velmi zvětšený pohled na situaci – hledíme-li ve směru svazku částic – vypadá tak jako na obr. 5.10.

Pravděpodobnost, že velmi malá částice se na své cestě destičkou srazí s jádrem, je dána podílem celkové plochy jader a celkové plochy vzorku. Předpokládejme, že na ploše  $A$  našeho kousku materiálu se nachází  $N$  atomů (samozřejmě, každý s jedním jádrem). Pak celková plocha „pokrytá“ jádry je rovna  $N\sigma$ . Necht' je počet částic svazku, jež dopadají na kousek materiálu, roven  $n_1$  a počet částic, jež na druhé straně z materiálu vycházejí, roven  $n_2$ . Zlomek těch, které neprojdou materiálem, je  $(n_1 - n_2)/n_1$  a měl by být roven poměru  $N\sigma/A$  plochy pokryté jádry a původní plochy  $A$ . Poloměr jádra můžeme dostat z rovnice

$$\pi r^2 = \sigma = \frac{A}{N} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1}.$$

(Tato rovnice je správná jen tehdy, když je plocha pokrytá jádry jen malou částí celkové plochy, tj. když  $(n_1 - n_2)/n_1$  je mnohem menší než 1. V opačném případě je potřebná korekce, která bere v úvahu skutečnost, že některá jádra budou částečně zastíněna jádry stojícími před nimi.)

## ČAS A VZDÁLENOST

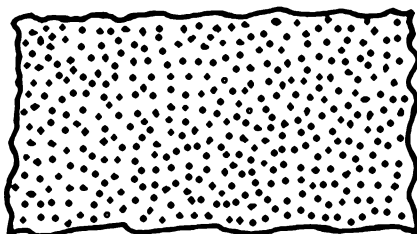
Podobnými experimenty se podařilo zjistit, že poloměr jádra je od  $10^{-15}$  m do  $6 \cdot 10^{-15}$  m. Na počest Enrica Fermiho (1901–1958) byla délková jednotka  $10^{-15}$  m nazvána fermi.<sup>10)</sup>

**Tabulka vzdáleností**

Světlené roky	Metry	
		????????????????
	$10^{27}$	Hranice vesmíru
$10^9$		
	$10^{24}$	K nejbližší susední galaxii
$10^6$		
	$10^{21}$	Ke středu naší galaxie
$10^3$		
	$10^{18}$	K nejbližší hvězdě
1		
	$10^{15}$	Poloměr dráhy Pluta
	$10^{12}$	Ke Slunci
	$10^9$	K Měsíci
	$10^6$	Výška družice
	$10^3$	Výška televizní věže
	1	Výška dítěte
	$10^{-3}$	Zrnko soli
	$10^{-6}$	Virus
	$10^{-9}$	Poloměr atomu
	$10^{-12}$	
	$10^{-15}$	Poloměr jádra
		????????????????

<sup>10)</sup> Název se již nepoužívá. Byl nahrazen femtometrem, s nímž má shodnou značku! (Pozn. red.)

## MALÉ VZDÁLENOSTI



Obr. 5.10 Tak by vypadal pohled skrz 1 cm tlustou destičku uhlíku, kdyby byla vidět pouze jádra atomů.

Co zjišťujeme, jdeme-li k ještě menším vzdálenostem? Můžeme menší vzdálenosti měřit? Na tuto otázku zatím není možné dát odpověď. Existuje hypotéza, podle níž je zatím nevyřešenou záhadu jaderných sil možno odhalit jen jakousi modifikací naší představy o prostoru nebo o měření tak malých vzdáleností.

Zdálo by se rozumné použít za jednotku délky nějakou přirozenou délku – řekněme poloměr Země nebo jeho zlomek. Metr byl původně navržen takovýmto způsobem a byl definován jako  $(\pi/2) \cdot 10^{-7}$  násobek zemského poloměru. Takové určení délkové jednotky není příliš výhodné ani příliš přesné. Dlouho byla obecně uznávána definice metru jako vzdálenosti mezi dvěma vrypy na tyči nacházející se ve speciální laboratoři ve Francii. Nedávno se však zjistilo, že ani taková definice není dostatečně přesná, stálá a univerzální. Proto se uvažuje o nové definici, která by se zakládala na určitém počtu vlnových délek zvolené spektrální čáry.<sup>11)</sup>

Měření vzdálenosti a času poskytují výsledky, které závisí na pozorovateli. Dva pozorovatelé, kteří se vzájemně pohybují, nezměří stejné vzdálenosti a časy při měření toho, co se jeví jako stejná věc. Vzdálenosti a časové intervaly mají různé velikosti v závislosti na vztažné soustavě použité při měření. Tuto otázku budeme podrobněji studovat později.

Zcela přesné měření vzdáleností a časů nedovoluje ani povaha přírody. Už dříve jsme řekli, že chyba v měření polohy předmětu musí být přinejmenším

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p},$$

kde  $h$  je malá veličina nazývaná „Planckova konstanta“ a  $\Delta p$  je nepřesnost našeho poznání hybnosti (hmotnosti násobené rychlostí) předmětu, jehož polohu měříme. Zmínili jsme se i o tom, že neurčitost v měření polohy souvisí s vlnovou povahou částic.

Relativnost prostoru a času znamená, že i měření času mají minimální chybu danou vztahem

$$\Delta t = \frac{h}{\Delta E},$$

přičemž  $\Delta E$  je nepřesnost našeho poznání energie procesu, jehož časovou periodu měříme. Chceme-li *přesněji* zjistit, kdy se něco uskutečnilo, musíme vědět méně o tom, *co* se uskutečnilo, neboť budeme méně vědět o energii takového procesu. I časová neurčitost souvisí s vlnovou povahou hmoty.

<sup>11)</sup> Taková definice metru byla v r. 1960 skutečně přijata. Od r. 1983 je však metr definován jako délka dráhy, kterou proběhne světlo ve vakuu za dobu 1/299 792 458 sekundy. (Pozn. red.)

# P

# Pravděpodobnost

„Skutečná logika tohoto světa spočívá v počtu pravděpodobnosti.“

James Clerk Maxwell

## 6.1 MOŽNOST A PRAVDĚPODOBNOST

## 6.2 FLUKTUACE

## 6.3 NÁHODNÁ PROCHÁZKA

## 6.4 ROZLOŽENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI

## 6.5 PRINCIP NEURČITOSTI

### 6.1 MOŽNOST A PRAVDĚPODOBNOST

Možnost je slovo, které se často používá v každodenním životě. V rozhlasovém zpravodajství o ztřešším počasí můžete slyšet: „Zítra odpoledne předpovídáme možnost bouřek.“ Můžete si říci: „Mám jen malou možnost dožít se sta let.“ I vědci používají slovo možnost. Seismologové si kladou otázku: „Jaká je možnost, že v příštím roce bude v jižní Kalifornii zemětřesení určité intenzity?“ Fyzik si může položit otázku: „Jaká je možnost, že určitý Geigerův počítač zaregistruje v příštích 10 sekundách 20 částic?“ Politika nebo státník může zajímat otázka: „Jaká je možnost, že v průběhu následujících deseti let dojde k jaderné válce?“ Vás může zajímat, jakou máte možnost se něco naučit z této kapitoly.

*Možnost* rozumíme něco jako odhad. Proč odhadujeme? Odhady děláme tehdy, když chceme něco posoudit, ale máme neúplné informace nebo nespolehlivé znalosti. Chceme uhádnout, jaké věci jsou, nebo co se stane. Často také děláme odhad před nějakým rozhodnutím. Například: Mám si vzít zítra plášť do deště? S jakým pohybem půdy bych měl počítat při návrhu nové stavby? Mám si vybudovat si protiatomový kryt? Mám změnit své stanovisko při mezinárodních jednáních? Mám dnes jít do školy?

Někdy děláme odhad proto, že se svými omezenými znalostmi chceme co nejvíce říci o určité situaci. V odhadu je skutečně velké zobecnění. Jakákoli fyzikální teorie je jistým druhem odhadu. Existují dobré a špatné odhady. Teorie pravděpodobnosti představuje systém pro vytváření co nejlepších odhadů. Řeč pravděpodobnosti nám dovoluje hovořit kvantitativně o určitých situacích, jež mohou být velmi proměnlivé, ale které mají určité stále průměrné chování.

Uvažujme házení mincí. Jsou-li samotný hod i mince „pocitivé“, nemůžeme vědět, jaký bude výsledek určitého jednotlivého hodu. Přece však cítíme, že při velkém počtu hodů budou

přibližně stejně zastoupeny hlavy i znaky. Proto říkáme: „Pravděpodobnost, že padne hlava, je 0,5.“

O pravděpodobnosti hovoříme jen při takových pozorováních, o nichž předpokládáme, že se uskuteční v budoucnosti. „Pravděpodobnost“ určitého výsledku pozorování rozumíme náš odhad toho, jaká část z velkého počtu provedených pozorování nejspíše dá tento očekávaný výsledek. Představíme-li si, že pozorování – takové jako pohled na právě hozenou minci – se opakuje  $N$ -krát a označíme-li  $N_A$  náš odhad počtu těch pozorování, která dávají určitý výsledek  $A$  (řekněme hlavu), pak pravděpodobnost  $P(A)$  pozorování  $A$  rozumíme

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \quad (6.1)$$

Naše definice si vyžaduje několik poznámek. O pravděpodobnosti nějaké události můžeme hovořit jen tehdy, je-li tato možným výsledkem nějakého *opakovatelného* pozorování. Není jasné, má-li smysl se ptát: „Jaká je pravděpodobnost toho, že v tomto domě straší?“

Mohli byste namítnat, že žádná situace není přesně opakovatelná. To je pravda. Každé další pozorování provádíme přinejmenším v jiném čase nebo na jiném místě. Můžeme říci jen tolik, že „opakovaná“ pozorování by se měla v souladu s naším záměrem *jevit jako ekvivalentní*. Měli bychom předpokládat alespoň to, že každé pozorování se provádělo ve stejně připravené situaci a zejména se stejným stupněm nevědomosti na počátku. (Jestliže se nám podaří nahlédnout do soupeřových karet, bude odhad naděje našeho vítězství jiný než v případě, kdy jsme soupeřovy karty neviděli!)

Je třeba zdůraznit, že  $N$  a  $N_A$  ve vztahu (6.1) *nechápe*me jako čísla založená na skutečných pozorováních.  $N_A$  je náš nejlepší *odhad* toho, co *by mělo* nastat při  $N$  *myšlených* pozorováních. Pravděpodobnost proto závisí na našich znalostech a na naší schopnosti odhadovat. Závisí na našem úsudku! Lidé našťástí uvažují o mnoha věcech do určité míry stejně, a tak i jejich odhad bude stejný. Pravděpodobnosti však nemusejí být „absolutními“ čísly. Protože závisí na naší nevědomosti, mohou se změnit se změnou našich poznatků.

Možná jste si všimli jiného, dost „subjektivního“ aspektu naší definice pravděpodobnosti. Hovořili jsme o  $N_A$  jako o „našem odhadu toho, jaká část pozorování nejspíše povede...“. Nerozumíme tím, že budeme pozorovat přesně hodnotu  $N_A$ , ale že očekáváme číslo blízké  $N_A$ , a že to číslo  $N_A$  je *pravděpodobnější* než jiná čísla v sousedství. Hodíme-li minci 30-krát, neočekáváme, že počet hlav bude přesně 15, ale že to bude spíše nějaké jiné číslo blízké 15, např. 12, 13, 14, 15, 16 nebo 17. Jestliže se však musíme pro nějaké číslo rozhodnout, pak si zvolíme 15 jako nejpravděpodobnější počet hlav. Můžeme psát  $P(\text{hlava}) = 0,5$ .

Proč jsme se rozhodli pro 15 jako nejpravděpodobnější číslo? V duchu jsme měli následující důvody: Když z celkového počtu hodů  $N$  je  $N_H$  nejpravděpodobnější počet hlav, pak nejpravděpodobnější počet znaků je  $(N - N_H)$ . (Předpokládáme, že každý hod dá buď hlavu *nebo* znak a jiná možnost neexistuje!) Je-li však mince „pocitivá“, není důvodu pro upřednostnění hlav před znaky. Pokud není důvod pro předpoklad nepocitivity mince (nebo hodu), musíme výskyt hlavy považovat za stejně pravděpodobný jako výskyt znaku. Musíme tedy položit  $N_Z = N_H$ . Pak platí

$$N_Z = N_H = \frac{1}{2} N \text{ nebo } P(H) = P(Z) = 0,5.$$



Naši argumentaci můžeme zobecnit na *jakoukoli* situaci, v níž existuje  $m$  různých, ale ekvivalentních, tj. stejně možných výsledků pozorování. Může-li pozorování vést k  $m$  různým výsledkům a máme důvod věřit, že každý z nich je stejně možný jako jiný, pak pravděpodobnost *příslušného* výsledku  $A$  je

$$P(A) = \frac{1}{m}.$$

Je-li v neprůhledné krabici sedm kuliček různých barev a jednu náhodně vybereme (aniž bychom se na ně podívali), je pravděpodobnost vytažení určité barvy  $1/7$ . Pravděpodobnost, že ze zamíchané hromady 52 karet „naslepo“ vytáhneme právě srdcové eso je rovna  $1/52$ . Pravděpodobnost hodů dvojnásobné jednotky při hře v kostky je  $1/36$ .

V kapitole 5 jsme popisovali velikost jádra pomocí jeho zdánlivé plochy neboli „průřezu“. Přitom jsme vlastně hovořili o pravděpodobnostech. Když ostřelujeme tenkou vrstvu materiálu vysokoenergetickými částicemi, existuje jistá naděje, že částice projde materiálem a jistá naděje, že narazí na jádro. (Protože jádro je tak malé, že ho nemůžeme vidět, nemůžeme na něj přímo mířit. Musíme střílet „naslepo“.) Je-li v naší vrstvě materiálu  $n$  atomů a jádro každého atomu má plochu průřezu  $\sigma$ , pak celková plocha „zastíněná“ jádry je  $n\sigma$ . Při velkém počtu  $N$  náhodných střel očekáváme, že počet nárazů  $N_c$  do *některého* jádra bude v takovém poměru k  $N$ , jaký je poměr zastíněné plochy k celkové ploše vrstvy

$$\frac{N_c}{N} = \frac{n\sigma}{A}. \tag{6.2}$$

Je proto možné říci, že pravděpodobnost srážky letící částice při průchodu vrstvou je

$$P_c = \frac{n}{A} \cdot \sigma, \tag{6.3}$$

kde  $n/A$  je počet atomů v jednotkové ploše vrstvy.

## 6.2 FLUKTUACE

Nyní si na základě našich poznatků o pravděpodobnosti podrobněji všimneme otázky: „Kolikrát skutečně očekávám, že padne hlava, budu-li házet minci  $N$ -krát?“ Dříve než odpovíme na tuto otázku, podívejme se, co se vlastně děje při takovém „experimentu“. *Obr. 6.1* obsahuje výsledky získané v prvních třech „kolech“ takového experimentu, když  $N=30$ . Posloupnosti hlav a znaků jsou znázorněny tak, jak byly získány. První hra dala 11 hlav, druhá také 11, třetí 16.

H	x x x                    xxx x xx x x	11
Z	xx x x xxxxxxxxxxx    xx xx x x	19
H	x            x x x xxx    x x x x	11
Z	xxxx xxx x x    xxxx xx x xx	19
H	x    xxx xx x    xxx xx x xx x	16
Z	x xx    x xx xx    xx x x x x	14

Obr. 6.1 Pozorované posloupnosti hlav a znaků ve třech hrách po třiceti hodech

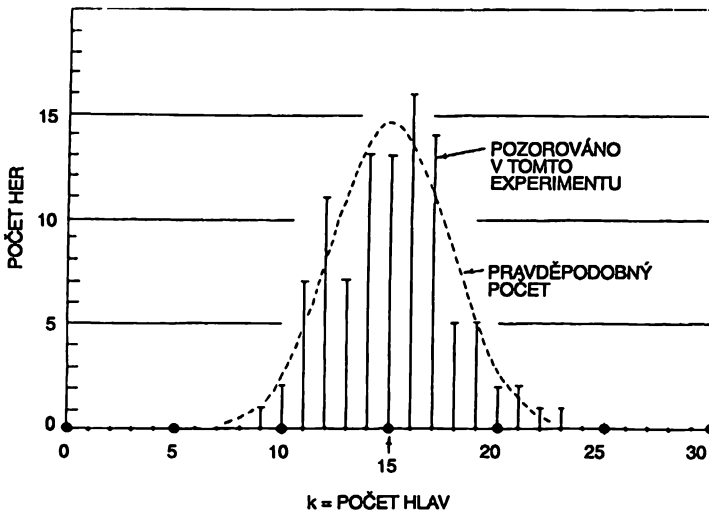
## FLUKTUACE

Ve třech pokusech jsme ani jednou nedostali 15 hlav. Je to snad vinou mince? Nebo jsme se zmýlili v úvaze vedoucí k závěru, že nejpravděpodobnější počet hlav v takové hře je 15? Abychom získali 100 experimentů, každý po 30 hodech, uskutečnili jsme dalších 97 „kol“. Výsledek experimentu ukazuje *tab. 6.1.*<sup>12)</sup>

Prohlédneme-li si čísla v *tab. 6.1*, zjistíme, že většina výsledků je blízko čísla 15 v tom smyslu, že se nacházejí mezi čísly 12 a 18. K získání lepšího citu pro chápání detailů těchto výsledků je vhodné zakreslit graf *rozložení* výsledků. Určíme počet her, v nichž jsme získali  $k$  hlav a znázorníme si je pro každé  $k$ . Takový graf je znázorněn na *obr. 6.2*. 15 hlav jsme získali ve 13 hrách. I 14 hlav jsme získali 13-krát. 16 i 17 hlav jsme získali dokonce více než 13-krát.

Tabulka 6.1

Počet hlav v posloupnosti 30 hodů mincí											
11	16	17	15	17	16	19	18	15	13	}	90 pokusů
11	17	17	12	20	23	11	16	17	14		
16	12	15	10	18	17	13	15	14	15		
16	12	11	22	12	20	12	15	16	12		
16	10	15	13	14	16	15	16	13	18		
14	14	13	16	15	19	21	14	12	15		
16	11	16	14	17	14	11	16	17	16		
19	15	14	12	18	15	14	21	11	16		
17	17	12	13	14	17	9	13	16	13		



Obr. 6.2 Souhrn výsledků 100 her po 30 pokusech. Vertikální čáry ukazují počty her, v nichž padlo  $k$  hlav. Přerušovaná čára ukazuje očekávaný počet her, v nichž padne  $k$  hlav, získaný výpočtem pravděpodobnosti

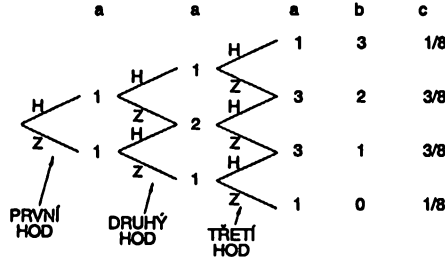
<sup>12)</sup> Po prvních třech hrách jsme experiment ve skutečnosti provedli tak, že jsme silně zatřáslí krabicí, v níž bylo 30 mincí a pak jsme spočetli všechny hlavy.

## PRAVDĚPODOBNOST

Je možné z toho odvodit, že jde o jakousi zaujatost ve prospěch hlav? Nebyl náš „nejlepší odhad“ dostatečně dobrý? Můžeme říci, že nejpravděpodobnější počet hlav pro jednu hru sestávající z 30 hodů je 16? Musíme být opatrní! Ve všech hrách se dohromady uskutečnilo 3 000 hodů. Hlav padlo celkem 1 492. Poměr počtu hlav k celkovému počtu je tedy 0,497, což je sice jen o málo, ale přece jen méně než polovina. Určitě tedy nemůžeme předpokládat, že pravděpodobnost padnutí hlavy je větší než 0,5! Skutečnost, že v určité sérii pozorování padne hlava nejčastěji 16krát, představuje *fluktuaci*. Jsme stále přesvědčeni, že *nejpravděpodobnějším* počtem hlav je 15.

Je možné položit otázku: „Jaká je pravděpodobnost, že hra s 30 hody dá 15, 16 nebo nějaký jiný počet hlav?“ Již jsme řekli, že při jednom hodu je pravděpodobnost pádu *jedné* hlavy 0,5 a i pravděpodobnost, že nepadne hlava, je 0,5. Ve hře sestávající ze dvou hodů máme *čtyři* možné výsledky: HH, HZ, ZH, ZZ. Protože každá z těchto posloupností je stejně pravděpodobná, můžeme prohlásit, že a) pravděpodobnost padnutí dvou hlav je 1/4, b) pravděpodobnost padnutí jedné hlavy je 2/4, c) pravděpodobnost, že nepadne hlava je 1/4. Existují dva způsoby získávání jedné hlavy, ale jen jeden způsob získávání dvou hlav nebo žádné hlavy.

Uvažujme nyní hru sestávající ze tří hodů. Pro třetí hod je stejně pravděpodobné, že padne hlava nebo znak. Existuje jen jeden způsob získání tří hlav: v prvních dvou hodech *musely* padnout dvě hlavy a potom hlava i po třetím hodu. Existují však *tři* způsoby získání dvou hlav. Může padnout znak po padnutí dvou hlav (jeden způsob), nebo může padnout hlava po padnutí jen jednoho znaku v prvních dvou hodech (dva způsoby). Tak pro možnosti 3, 2, 1, 0 hlav existují 1, 3, 3, 1 stejně pravděpodobné způsoby představující celkově 8 různých posloupností. Příslušné pravděpodobnosti jsou 1/8, 3/8, 3/8, 1/8.



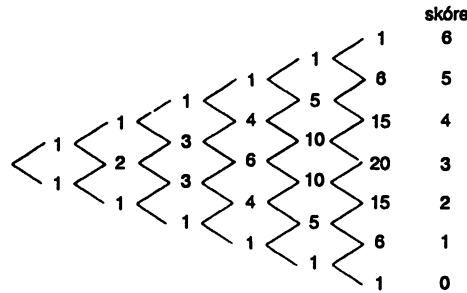
Obr. 6.3 Diagram znázorňující počet různých způsobů padnutí 0, 1, 2 nebo 3 hlav ve hře sestávající ze tří hodů (a – počet způsobů, b – skóre, c – pravděpodobnost)

To, co jsme řekli, je možno vyjádřit diagramem na *obr. 6.3*. Je jasné, že takové diagramy lze sestavit i pro hry s vyšším počtem hodů. *Obr. 6.4* znázorňuje takový diagram pro hru se šesti hody. Počet způsobů odpovídajících libovolnému bodu diagramu je vlastně počet různých cest (posloupností hlav a znaků), po nichž lze vyjít z počátečního bodu. Počet úseků šikmo vzhůru udává počet vržených hlav. Soubor čísel, které se objevují v takovém diagramu, je znám jako *Pascalův trojúhelník*. Čísla jsou známá i pod názvem *binomické koeficienty*, neboť se objevují i v rozvoji  $(a + b)^n$ . Označíme-li počet hodů  $n$  a počet vržených hlav  $k$ , pak se čísla vystupující v diagramu označují symbolem  $\binom{n}{k}$ . Bude vhodné připomenout, že binomické koeficienty lze vypočítat ve vztahu

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (6.4)$$

kde  $n!$ , nazývaný „ $n$ -faktoriál“, představuje součin  $n(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1)$ .

## NÁHODNÁ PROCHÁZKA



Obr. 6.4 Diagram jako na obr. 6.3, ale pro hru sestávající ze 6 hodů

Nyní již můžeme počítat pravděpodobnosti  $P(k, n)$  toho, že při  $n$  hodech padne hlava, pomocí definice (6.1). Celkový počet možných posloupností je  $2^n$  (neboť každý hod připouští 2 výsledky) a počet způsobů získání  $k$  hlav je  $\binom{n}{k}$ , přičemž všechny jsou stejně pravděpodobné.

Proto máme

$$P(k, n) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}. \quad (6.5)$$

Protože  $P(k, n)$  je podíl her, při nichž očekáváme, že padne  $k$  hlav, lze pak očekávat, že při 100 hrách padne  $k$  hlav  $100 \cdot P(k, n)$  krát. Přerušovaná čára na obr. 6.2 prochází body vypočítanými ze vztahu  $100 \cdot P(k, 30)$ . Vidíme, že padnutí 15 hlav jsme očekávali ve 14 nebo 15 hrách, zatímco tato událost byla pozorována ve 13 hrách. Padnutí 16 hlav jsme očekávali ve 13 nebo 14 hrách, ale 16 hlav padlo v 16 hrách. Takové fluktuace jsou „součástí hry“.

Použitou metodu je možné aplikovat i na tu nejobecnější situaci, v níž jsou jen dva možné výsledky jednoho pozorování. Označme tyto dva výsledky V („výhra“) a P („prohra“). V obecném případě pravděpodobnosti výsledku V nebo P u jedné události nemusí být stejné. Označme  $p$  pravděpodobnost výhry V. Potom  $q$ , pravděpodobnost prohry, musí být nutně  $(1 - p)$ . V souboru  $n$  pokusů je pravděpodobnost  $P(k, n)$  toho, že vyhrájeme  $k$ -krát rovna.

$$P(k, n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \quad (6.6)$$

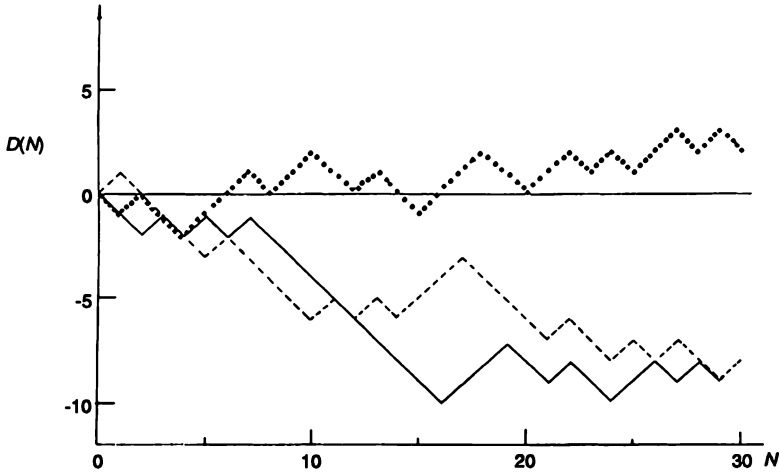
Tato pravděpodobnostní funkce se nazývá *Bernoulliho* nebo i *binomickou* pravděpodobností.

### 6.3 NÁHODNÁ PROCHÁZKA

Existuje další zajímavý problém, v němž vystupuje myšlenka pravděpodobnosti. Je to problém „náhodné procházky“. Jako nejjednodušší verzi této úlohy si představme „hru“, v níž „hráč“ startuje v bodě  $x = 0$  a při každém tahu má udělat krok *bud'* dopředu (směrem  $k + x$ ) nebo dozadu (směrem  $k - x$ ). Volba se má uskutečnit náhodně, například pomocí hodu mincí. Jak popíšeme výsledný pohyb? Ve své obecné formě se problém vztahuje na pohyb atomů (nebo jiných částic) v plynech – jde o Brownův pohyb – a i na kombinaci chyb při měřeních. Uvidíte,

že problém náhodné procházky úzce souvisí s problémem házení mincí, o němž jsme již hovořili.

Nejprve si všimněme několika příkladů náhodné procházky. Postup chodce můžeme charakterizovat čistou vzdáleností  $D_N$  ušlou v  $N$  krocích. Na obr. 6.5 jsou vidět tři příklady dráhy náhodného chodce. (Jako náhodné posloupnosti volby kroků jsme použili výsledky házení mincí z obr. 6.1.)



Obr. 6.5 Postup náhodné procházky. Horizontální souřadnice  $N$  představuje celkový počet kroků; vertikální souřadnice  $D(N)$  představuje vzdálenost, do níž se chodec dostal z počátečního bodu.

Co je možné říci o takovém pohybu? Především se můžeme ptát: „Jak daleko se chodec v průměru dostane?“ Musíme *očekávat*, že jeho průměrný postup bude nulový, protože se stejně pravděpodobně dostává dopředu nebo dozadu. Máme však takový pocit, že čím více  $N$  roste, tím je pravděpodobnější, že chodec zabloudí dále od počátku. Proto se můžeme ptát, jaká je jeho průměrná ušlá vzdálenost v *absolutní hodnotě*, tj. jaký je průměr z  $|D|$ . Je však výhodnější pracovat s jinou mírou „postupu“, se čtvercem vzdálenosti:  $D^2$  je kladné pro kladný i záporný pohyb, a je proto vhodnou *mírou* takového náhodného putování.

Je možné dokázat, že očekávaná hodnota  $D_N^2$  je právě  $N$ , tedy počet absolvovaných kroků. „Očekávanou hodnotou“ rozumíme pravděpodobnou hodnotu (náš nejlepší odhad), kterou můžeme považovat za *očekávané* průměrné chování v mnoha opakovaných posloupnostech. Takovou očekávanou hodnotu označujeme i  $\langle D_N^2 \rangle$  a nazýváme ji i „střední hodnotou čtverce vzdálenosti“. Po jednom kroku je  $D^2$  určitě rovno  $+1$ , máme tedy určitě  $\langle D_1^2 \rangle = 1$ . (Všechny vzdálenosti budou měřeny tak, aby krok představoval jednotku. Jednotky vzdálenosti už nebudeme psát.)

Očekávanou hodnotu  $\langle D_N^2 \rangle$  pro  $N > 1$  lze získat z  $D_{N-1}$ . Jestliže po  $N-1$  krocích máme  $D_{N-1}$ , pak po  $N$  krocích máme  $D_N = D_{N-1} + 1$  nebo  $D_N = D_{N-1} - 1$ . Pro druhé mocniny platí

$$D_N^2 = \begin{cases} D_{N-1}^2 + 2D_{N-1} + 1 \\ \text{nebo} \\ D_{N-1}^2 - 2D_{N-1} + 1 \end{cases} \quad (6.7)$$

Máme-li řadu nezávislých posloupností, očekáváme, že každá z těchto hodnot se objeví v polovině případů, tedy naše průměrné očekávání je právě průměr ze dvou možných hodnot. Očekávaná hodnota  $D_N$  je tedy  $D_{N-1}^2 + 1$ . Obecně můžeme očekávat pro  $D_{N-1}^2$  „očekávanou hodnotu“  $\langle D_{N-1}^2 \rangle$  (podle definice!). Proto máme

$$\langle D_N^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + 1. \quad (6.8)$$

Již jsme viděli, že  $\langle D_1^2 \rangle = 1$  a proto musí být

$$D_N^2 = N. \quad (6.9)$$

Dostali jsme tedy velmi jednoduchý výsledek!

Kdybychom při náhodné procházce chtěli „postup od začátku“ charakterizovat vzdáleností a ne čtvercem vzdálenosti, museli bychom použít „střední kvadratickou vzdálenost“  $D_{\text{stř}}$

$$D_{\text{stř}} = \sqrt{\langle D^2 \rangle} = \sqrt{N}. \quad (6.10)$$

Již jsme řekli, že náhodná procházka je z matematického hlediska velmi podobná hře házení mincí, kterou jsme uvažovali na začátku kapitoly. Uvědomíme-li si, že směr každého kroku je v souladu s padnutím hlavy nebo znaku ve hře s mincí, pak  $D$  je právě  $N_H - N_Z$ , tedy rozdíl počtu hlav a znaků. Protože je  $N_H + N_Z = N$ , kde  $N$  je celkový počet kroků (a tedy i hodů), pak máme  $D = 2N_H - N$ . Již dříve jsme odvodili výraz pro očekávané rozdělení  $N_H$  (nazývané i  $k$ ) a dostali jsme výsledek (6.5). Protože  $N$  je konstanta, máme vlastně rozdělení odpovídající  $D$ . (Protože pro každou hlavu navíc proti  $N/2$  „chybí“ znak, máme faktor 2 mezi  $N_H$  a  $D$ ). Grafy na obr. 6.2 představují rozdělení vzdáleností, jichž můžeme dosáhnout třiceti náhodnými kroky (kde  $k = 15$  znamená  $D = 0$ ,  $k = 16$ ,  $D = 2$  atd.).

Odchylka  $N_H$  od očekávané hodnoty  $N/2$  je

$$N_H - \frac{N}{2} = \frac{D}{2} \quad (6.11)$$

a dále pro střední kvadratickou odchylku máme

$$\left( N_H - \frac{N}{2} \right)_{\text{stř}} = \frac{1}{2} \sqrt{N}. \quad (6.12)$$

V souladu s výsledky, které jsme získali pro  $D_{\text{stř}}$ , očekáváme, že „typická“ vzdálenost při třiceti krocích by měla být  $\sqrt{30} = 5,5$ , tedy typické  $k$  by mělo být přibližně  $5,5/2 = 2,8$  jednotek z 15. Vidíme, že „šifka“ křivky na obr. 6.2 měřená od středu je přibližně 3 jednotky, což souhlasí s tímto výsledkem.

Dostali jsme se už tak daleko, že se můžeme zabývat otázkou, které jsme se dosud vyhýbali. Jak můžeme rozhodnout, je-li mince „pocitivá“ nebo „falešná“? Nyní můžeme na tuto otázku odpovědět alespoň částečně. V případě pocitivé mince očekáváme, že hlava se objeví v polovině případů, tj.

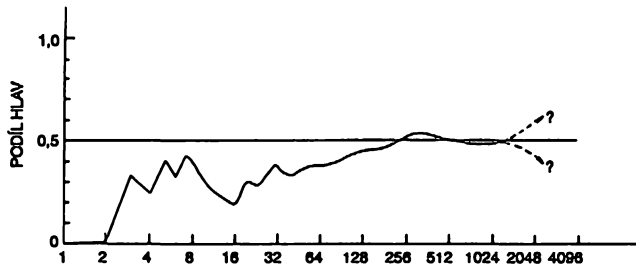
$$\frac{\langle N_H \rangle}{N} = 0,5. \quad (6.13)$$

Očekáváme také, že skutečné  $N_H$  se bude lišit od  $N/2$  přibližně o  $\sqrt{N/2}$ , nebo, že podíl se bude lišit o

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{\sqrt{N}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

Čím je  $N$  větší, tím blíže k jedné polovině bude podle našeho očekávání podíl  $N_H/N$ .

Na obr. 6.6 je vynesena podíl  $N_H/N$  pro výše uvedenou hru s mincí. Z obrázku je zřejmá snaha tohoto podílu dosáhnout hodnoty 0,5 při velkých  $N$ . Naneštěstí pro žádnou konkrétní hru nebo kombinaci her neexistuje *záruka*, že pozorovaná odchylka bude alespoň *blízko očekávané odchylky*. Vždy existuje konečná možnost, že velká fluktuace – dlouhá řada hlav nebo znaků způsobí libovolně velkou odchylku. Můžeme říci jen to, že v případě odchylky, která se jen málo liší od hodnoty  $1/2\sqrt{N}$  (řekněme v rozsahu faktoru 2 nebo 3), nemáme důvod podezřívat minci z nepoctivosti. Je-li odchylka mnohem větší, může vzniknout nedokazatelné podezření, že mince je upravena (nebo že hráč je příliš šikovný!).



Obr. 6.6 Podíl hodů, v nichž padla hlava v určité posloupnosti  $N$  hodů mincí

Nehovořili jsme ani o tom, co dělat v tom případě, kdy máme vážný důvod předpokládat, že „mince“ nebo podobný jiný „náhodně“ se chovající předmět (například plochý kámen, který může dopadnout jen na jednu nebo druhou stranu) *budou mít* různé pravděpodobnosti, že padne hlava nebo znak. Definovali jsme  $P(H) = \langle N_H \rangle / N$ . Jak se dozvíme, co je možné *očekávat* pro  $N_H$ ? To nejlepší, co je možné v některých případech udělat, je pozorovat počty hlav, které padnou při velkém počtu hodů. Z nedostatku lepší možnosti, musíme položit  $\langle N_H \rangle = N_H$  (pozorované). (Co jiného je možné očekávat?) Musíme si však uvědomit, že v takovém případě různé experimenty nebo různí pozorovatelé mohou stanovit jinou hodnotu  $P(H)$ . Je však možné *očekávat*, že tyto hodnoty by se měly lišit nejvýše odchylkou  $1/2\sqrt{N}$ , je-li  $P(H)$  blízko 0,5. Experimentální fyzik říká, že „experimentálně určená“ pravděpodobnost má „chybu“ a píše

$$P(H) = \frac{N_H}{N} \pm \frac{1}{2\sqrt{N}}. \quad (6.14)$$

U takového výrazu se předpokládá, že *existuje* „pravdivá“ nebo „správná“ pravděpodobnost, kterou by bylo možné vypočítat, kdybychom toho dost věděli, a že pozorování mohou být zatížena „chybou“ následkem fluktuace. Takovýto předpoklad však není možné logicky zdůvodnit. Je snad lepší si uvědomit, že pojem pravděpodobnosti je svým způsobem subjektivní, že je vždy založen na nejistých poznacích a že jeho kvantitativní vyjádření podléhá změnám při získávání dalších informací.

## 6.4 ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI

Vraťme se opět k náhodné procházce a uvažujme o její obměně. Předpokládejme, že kromě náhodné volby *směru* (+ nebo -) každého kroku se mění i *délka* kroku nějakým nepředvídatelným způsobem, přičemž jedinou podmínkou je to, že v *průměru* je délka kroku jednotková. Takovýto případ lépe vystihuje něco takového, jako je tepelný pohyb molekul v plynu. Je-li  $S$  délka kroku, pak  $S$  může dosáhnout jakékoli hodnoty, ale nejčastěji bude „blízko“ 1. Konkrétně budiž  $\langle S^2 \rangle = 1$ , nebo, což je totéž  $S_{\text{st}}^2 = 1$ . Při odvozování  $\langle D^2 \rangle$  budeme postupovat jako předtím, s tím rozdílem, že rovnice (6.8) se nyní změní na

$$\langle D_N^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + \langle S^2 \rangle = \langle D_{N-1}^2 \rangle + 1. \quad (6.15)$$

Stejně jako předtím, i nyní dostaneme

$$\langle D_N^2 \rangle = N. \quad (6.16)$$

Jaké bude nyní rozložení vzdáleností  $D$ ? Jaká je například pravděpodobnost toho, že  $D = 0$  po 30 krocích? Taková pravděpodobnost je nulová! Pravděpodobnost, že  $D$  bude *libovolná daná* hodnota, je nulová, neboť je zcela nepravděpodobné, že by součet všech zpětných kroků (různých délek) byl přesně stejný jako součet kroků vpřed. Nemůžeme sestrojít takový graf jako na *obr. 6.2*.

Podobné znázornění jako na *obr. 6.2* je však možné, neptáme-li se na pravděpodobnost  $D$  rovného přesně 0, 1 nebo 2, ale jestliže se zajímáme o pravděpodobnost  $D$  v *blízkosti* 0, 1 nebo 2. Definujme  $P(x, \Delta x)$  jako pravděpodobnost toho, že  $D$  bude ležet v intervalu šířky  $\Delta x$  v okolí bodu  $x$  (například od  $x$  po  $x + \Delta x$ ). Očekáváme, že pro malé  $\Delta x$  je pravděpodobnost toho, že  $D$  bude ležet v tomto intervalu, úměrná  $\Delta x$ , tj. šířce intervalu. Můžeme proto psát

$$P(x, \Delta x) = p(x) \Delta x. \quad (6.17)$$

Funkci  $p(x)$  nazýváme *hustotou pravděpodobnosti*.

Tvar  $p(x)$  závisí na počtu kroků  $N$  i na rozdělení jednotlivých délek kroků. Nemůžeme to zde dokazovat, ale pro velké  $N$  je hustota  $p(x)$  stejná pro všechna rozumná rozdělení jednotlivých délek kroků a závisí jen na  $N$ . Na *obr. 6.7* je znázorněno  $p(x)$  pro tři hodnoty  $N$ . Všimněte si, že pološířky těchto křivek (jejich rozšíření na úrovni poloviny maximální výšky) jsou  $\sqrt{N}$  v souladu s našimi předcházejícími úvahami.

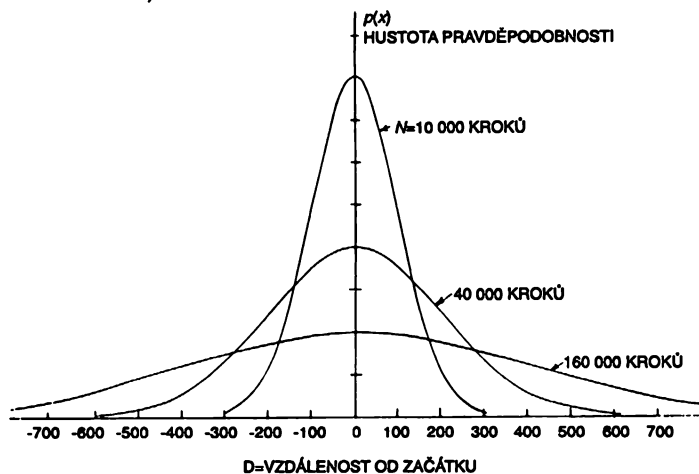
Dále si můžeme všimnout, že hodnota  $p(x)$  v blízkosti nuly je nepřímo úměrná  $\sqrt{N}$ . Je tomu tak proto, že všechny křivky mají podobný tvar a plochy pod křivkami musí být stejné. Protože  $p(x) \Delta x$  je pravděpodobnost nalezení  $D$  v  $\Delta x$  při malých hodnotách  $\Delta x$ , můžeme určit pravděpodobnost toho, že  $D$  se nachází někde uvnitř libovolného intervalu ohraničeného body  $x_1, x_2$  tak, že tento interval rozdělíme na malé části  $\Delta x$  a vypočteme součet členů  $p(x) \Delta x$  pro každou takovou část. Pravděpodobnost, že  $D$  se nachází někde mezi  $x_1$  a  $x_2$ , což můžeme zapsat  $P(x_1 < D < x_2)$ , je rovna obsahu vyšrafované oblasti na *obr. 6.8*. Čím menší jsou přírůstky  $\Delta x$ , tím přesnější bude výsledek. Proto můžeme napsat, že

$$P(x_1 < D < x_2) = \sum p(x) \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx. \quad (6.18)$$



## PRAVDĚPODOBNOST

Obsah plochy pod celou křivkou je pravděpodobnost, že  $D$  se někde nachází (tj. má nějakou hodnotu mezi  $x = -\infty$  a  $x = +\infty$ ).

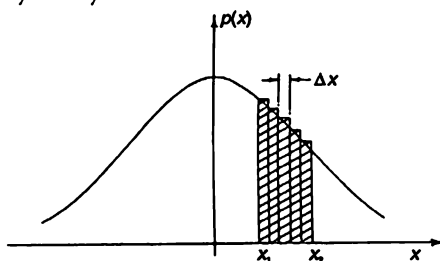


Obr. 6.7 Hustota pravděpodobnosti dosažení vzdálenosti  $D$  od počátku při náhodné procházce sestávající z  $N$  kroků ( $D$  se měří v jednotkách střední kvadratické délky kroku)

Tato pravděpodobnost je rovna 1. Musí tedy být

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1. \quad (6.19)$$

Protože křivky na obr. 6.7 se rozšiřují úměrně  $\sqrt{N}$ , musí být jejich výška úměrná  $1/\sqrt{N}$ , aby se zachoval celkový obsah plochy rovný 1.



Obr. 6.8 Pravděpodobnost, že při náhodné procházce se ušlá vzdálenost  $D$  nachází mezi body  $x_1$  a  $x_2$ , je dána obsahem plochy pod křivkou  $p(x)$  mezi  $x_1$  a  $x_2$ .

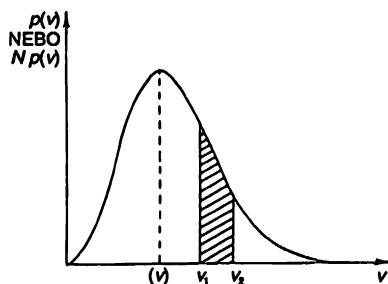
S hustotou pravděpodobnosti, o níž jsme právě hovořili, se setkáváme nejčastěji. Je známá jako normální nebo *Gaussova hustota pravděpodobnosti*. Její matematický zápis je

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (6.20)$$

přičemž veličina  $\sigma$  se nazývá *standardní odchylkou*. V našem případě je  $\sigma = \sqrt{N}$ , nebo je-li střední kvadratická délka kroku různá od 1, je  $\sigma = \sqrt{N} S_{st}$ .

Již jsme uvedli, že pohyb molekuly nebo každé jiné částice v plynu je podobný náhodné procházce. Předpokládejme, že otevřeme láhev s organickou sloučeninou a necháme část její páry uniknout do vzduchu. Existuje-li proudění vzduchu, takže vzduch cirkuluje, budou unášeny i uvedené páry. Jenže i v dokonale klidném vzduchu se budou páry postupně rozplývat – difundovat – dokud neproniknou do celé místnosti. Můžeme je registrovat podle jejich barvy nebo zápachu. Jednotlivé molekuly organických par se šíří i v klidném vzduchu v důsledku molekulárního pohybu způsobovaného srážkami s jinými molekulami. Známe-li délku „kroku“ a počet kroků za sekundu, můžeme zjistit pravděpodobnost, v jaké vzdálenosti od svého původního místa se ocitne po určitém čase jedna nebo několik molekul. Postupem času počet kroků roste a plyn se rozplývá tak, jak je znázorněno křivkami na obr. 6.7. V jedné z dalších kapitol určíme, jak závisí délka a frekvence kroků na teplotě a tlaku plynu.

Již jsme hovořili o tom, že tlak plynu je následkem srážek molekul se stěnami nádoby. Až později přejdeme ke kvantitativnímu popisu tohoto jevu, musíme znát rychlost molekul narážejících na stěnu, protože síla jejich nárazu závisí na rychlosti. Nemůžeme však hovořit o určité rychlosti molekul. Tento děj můžeme popsat jen pomocí pravděpodobností. Molekula může mít jakoukoli rychlost, ale některé rychlosti jsou pravděpodobnější než jiné. Procesy probíhající v plynu můžeme popsat pomocí pravděpodobnosti  $p(v) \Delta v$ , že daná molekula má rychlost z intervalu  $v$ ,  $v + \Delta v$ . Hustota pravděpodobnosti  $p(v)$  je přitom funkcí rychlosti  $v$ . Později se dozvíte, jak Maxwell využitím zdravého rozumu a myšlenek teorie pravděpodobnosti našel matematické vyjádření funkce  $p(v)$ . Tvar<sup>13)</sup> funkce  $p(v)$  je znázorněn na obr. 6.9. Rychlost může dosáhnout libovolné hodnoty, ale s největší pravděpodobností bude blízká nejpravděpodobnější nebo očekávané hodnotě  $\langle v \rangle$ .



Obr. 6.9 Rozložení rychlostí molekul plynu

O křivce znázorněné na obr. 6.9 často uvažujeme trochu jinak. Máme-li molekuly plynu uzavřené v typické nádobě (která má objem např. 1 l), jde vlastně o velmi velké množství  $N$  molekul ( $N \approx 10^{22}$ ). Protože  $p(v) \Delta v$  je pravděpodobnost toho, že jedna molekula bude mít rychlost z intervalu  $\Delta v$ , pak podle naší definice pravděpodobnosti bude očekávaný počet molekul  $\langle \Delta N \rangle$  s rychlostmi z intervalu  $\Delta v$

$$\langle \Delta N \rangle = N p(v) \Delta v. \quad (6.21)$$

Veličinu  $Np(v)$  proto nazýváme „rozdělením molekul podle rychlosti“. Plocha pod křivkou mezi dvěma hodnotami rychlosti  $v_1$  a  $v_2$ , např. vyšrafovaná plocha na obr. 6.9, představuje (v případě

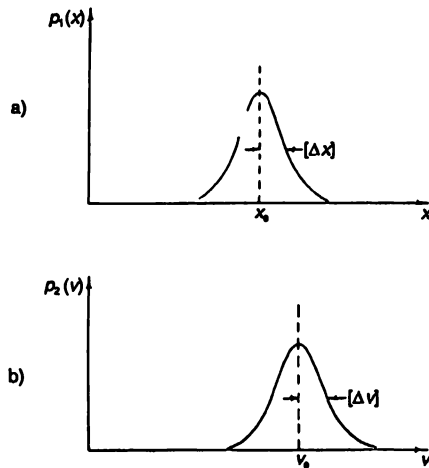
<sup>13)</sup> Maxwellův výraz je  $p(v) = Cv^2 e^{-av^2}$ , kde  $a$  je konstanta související s teplotou a  $C$  je zvoleno tak, aby celková pravděpodobnost byla rovna jedné.

křivky  $N p(v)$  očekávaný počet molekul s rychlostmi mezi  $v_1$  a  $v_2$ . Protože v případě plynu máme obvykle co činit s velkým počtem molekul, předpokládáme malé odchylky od očekávaných hodnot (jako  $1/\sqrt{N}$ ), a proto často vynecháváme slovo „očekávaný“ a říkáme: „Počet molekul s rychlostmi mezi  $v_1$  a  $v_2$  odpovídá obsahu příslušné plochy pod křivkou.“ Nesmíme však zapomenout, že takové výroky se vždy týkají *pravděpodobných* počtů.

### 6.5 PRINCIP NEURČITOSTI

Myšlenky pravděpodobnosti jsou jistě užitečné při popisu chování řádově  $10^{22}$  molekul v plynu, protože již samotný pokus o určení polohy nebo rychlosti každé molekuly by byl úžasně nepraktický. Když se poprvé na takový problém aplikovala teorie pravděpodobnosti, chápalo se to jako *vhodný* způsob popisu tak složitých situací. Dnes jsme však toho názoru, že idea pravděpodobnosti je při popisu atomových dějů *nevyhnutelná*. Podle kvantové mechaniky, matematické teorie částic, existuje vždy jistá nepřesnost při *určení* poloh a rychlostí. V nejlepším případě můžeme říci, že existuje jistá pravděpodobnost toho, že částice se bude nacházet v blízkosti určitého bodu  $x$ .

Hustotu pravděpodobnosti  $p_1(x)$  můžeme udát tak, že  $p_1(x) \Delta x$  představuje pravděpodobnost výskytu částice mezi  $x$  a  $x + \Delta x$ . Je-li částice dostatečně dobře lokalizovaná, např. v blízkosti  $x_1$ , bude mít funkce  $p_1(x)$  průběh podobný grafu na obr. 6.10 (a). Podobně musíme určit rychlost částice pomocí hustoty pravděpodobnosti  $p_2(v)$ , přičemž  $p_2(v) \Delta v$  je pravděpodobnost toho, že rychlost je v intervalu mezi  $v$  a  $v + \Delta v$ .



Obr. 6.10 Hustota pravděpodobnosti pozorování polohy a rychlosti částice

Jeden ze základních výsledků kvantové mechaniky spočívá v tom, že funkce  $p_1(x)$  a  $p_2(v)$  není možné vybrat nezávisle, zejména nemohou být obě dvě libovolně úzké. Označíme-li charakteristickou „šířku“ křivky  $p_1(x)$   $[\Delta x]$  a křivky  $p_2(v)$  zase  $[\Delta v]$ , jak je ukázáno na obrázku, potom příroda vyžaduje, aby *součin* těchto šířek nebyl menší než číslo  $h/m$ , kde  $m$  je hmotnost částice a  $h$  je základní fyzikální konstanta zvaná *Planckova konstanta*. Tento základní vztah je možné zapsat ve tvaru

$$[\Delta x] \cdot [\Delta v] \geq \frac{h}{m} \tag{6.22}$$

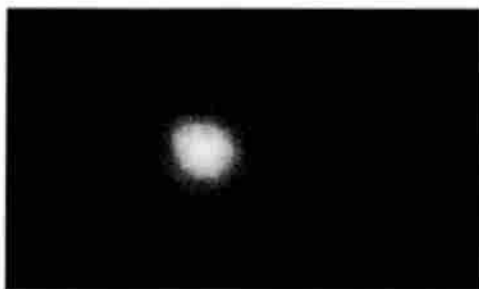
Tato rovnice je matematickým vyjádřením *Heisenbergova principu neurčitosti*, o němž jsme se již zmínili.

Protože pravá strana rovnice (6.22) je konstantní, pak „přinutíme-li“ částici zaujmout určité místo, skončí to tím, že velmi vzroste její rychlost. Nebo přinutíme-li částici pohybovat se velmi pomalu, nebo velmi přesnou rychlostí, „rozplyne se“, takže nebudeme umět říci, kde se přesně nachází. Částice se chovají velmi podivně!

Princip neurčitosti vyjadřuje přirozenou nejasnost, která musí existovat při každém pokusu popsat přírodu. Náš nejpřesnější popis přírody musí být v řeči *pravděpodobnosti*. Jsou však lidé, kteří se neumějí smířit s takovým popisem přírody. Domnívají se, že kdybychom věděli, co se s částicí *skutečně* děje, mohli bychom znát současně její přesnou rychlost a polohu. Na začátku rozvoje kvantové mechaniky tento problém velmi znepokojoval Einsteina. Často potřásl hlavou a říkal: „Vždyť Bůh neháze kostkou, aby rozhodl, jak se má pohybovat elektron!“ Dlouho se trápil s tímto problémem a pravděpodobně se nikdy nesmířil se skutečností, že je to ten nejlepší popis přírody, který dokážeme udělat. Několik málo fyziků se ještě stále zabývá tímto problémem doufajíce, že svět je možné popsat nějak jinak a vyloučit neurčitost v chování částic. Zatím však v tomto směru nikdo nebyl úspěšný.

Nevyhnutelná neurčitost při určování polohy částice nabývá významu tehdy, když chceme popsat strukturu atomů. V atomu vodíku, jenž má jádro skládající se z jednoho protonu a mimo jádro má jeden elektron, je neurčitost v poloze elektronu tak velká jako atom samotný! Proto nemůžeme dost dobře hovořit o elektronu pohybujícím se po určité dráze kolem protonu. Nanejvýš můžeme říci, že existuje určitá pravděpodobnost  $p(r) \Delta V$  pozorování elektronu v elementu objemu  $\Delta V$  ve vzdálenosti  $r$  od protonu. Hustotu pravděpodobnosti  $p(r)$  udává kvantová mechanika. Pro neporušený vodíkový atom je  $p(r) = A e^{-r^2/a^2}$ , což představuje funkci se zvonovitým grafem podobnou funkci na *obr. 6.8*. Číslo  $a$  představuje „charakteristický“ poloměr, za nímž funkce rychle klesá. Protože je malá pravděpodobnost výskytu elektronu ve větších vzdálenostech od jádra než  $a$ , můžeme  $a$  považovat za „poloměr atomu“, což je asi  $10^{-10}$  metru.

Představu o atomu vodíku můžeme získat, znázorníme-li si oblak, jehož hustota je úměrná hustotě pravděpodobnosti výskytu elektronu. Příklad takového oblaku je na *obr. 6.11*. Naš nejlepší „představou“ vodíkového atomu je tedy jádro obklopené „elektronovým oblakem“ (ve skutečnosti však máme na mysli „oblak pravděpodobnosti“). Elektron je někde tam, ale příroda nám dovoluje poznat jen *pravděpodobnost* jeho výskytu na určitém místě.



Obr. 6.11 Způsob znázornění atomu vodíku  
Hustota (bělost) oblaku představuje hustotu pravděpodobnosti výskytu elektronu.

Ve svém úsilí po co nejúplnějším poznání přírody dospěla moderní fyzika k poznání, že jisté věci není možné „poznat“ s jistotou. Mnohé z našich poznatků vždy zůstanou nejisté. Nanejvýš můžeme znát jejich pravděpodobnosti.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 6.1 ■ „Molekula vzduchu“ se při teplotě  $25^\circ\text{C}$  a tlaku  $100\text{ kPa}$  pohybuje průměrnou rychlostí  $450\text{ m/s}$ . Přitom stačí mezi dvěma po sobě následujícími srážkami proletět  $7 \cdot 10^{-6}\text{ cm}$ . Kolik času potřebuje na to, aby se vzdálila od výchozího bodu o  $1\text{ cm}$ , jestliže ve vzduchu nedochází k makroskopickému proudění?
- 6.2 ■ Školák má v brašničce tři červené, dvě zelené a jednu bílou kuličku. Aniž by se díval, vytáhne první tři kuličky, které mu přijdou pod ruku. Jaké jsou pravděpodobnosti toho, že všechny tři kuličky budou různé barvy a že všechny tři budou stejné barvy?
- 6.3 ■ Nehybná koule o poloměru  $b$  je ostřelována proudem malých kuliček poloměru  $a$ . Předpokládejme, že odraz malých kuliček je dokonale pružný a že úhel dopadu je roven úhlu odrazu. Určete poměrnou část počtu kuliček, jež se rozptylují pod různými úhly. Odvoďte výraz pro srážkový průřez rozptylu a přesvědčte se, že celkový srážkový průřez je roven očekávané veličině  $\pi(a + b)^2$ .

# T eorie gravitace

## 7.1 POHYB PLANET

## 7.2 KEPLEROVY ZÁKONY

## 7.3 ROZVOJ DYNAMIKY

## 7.4 NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

## 7.5 VŠEOBECNÁ GRAVITACE

## 7.6 CAVENDISHŮV EXPERIMENT

## 7.7 CO JE TO GRAVITACE?

## 7.8 GRAVITACE A RELATIVITA

### 7.1 POHYB PLANET

V této kapitole budeme hovořit o jednom z nejdalekosáhlejších zobecnění, které lidská mysl uskutečnila. Zatímco obdivujeme lidskou mysl, měli bychom však postát s úctou před *přírodou*, která tak dokonale splňuje skvělý a jednoduchý princip, jakým je gravitační zákon. Co to je, ten gravitační zákon? Vyjadřuje skutečnost, že každý předmět ve vesmíru přitahuje kterýkoli jiný předmět silou, která je pro libovolná dvě tělesa úměrná hmotnosti každého z nich a mění se nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti mezi nimi. Tento výrok lze matematicky vyjádřit vztahem

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Uvedeme-li navíc skutečnost, že předmět reaguje na sílu zrychlením ve směru působení síly a velikost zrychlení je nepřímo úměrná hmotnosti předmětu, poskytli jsme všechny potřebné informace a dostatečně nadaný matematik je schopen odvodit všechny důsledky těchto dvou principů.

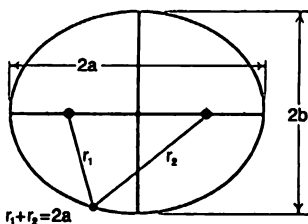
Zatím však nejste dostatečně pokročilí, a proto budeme o důsledcích hovořit podrobněji a nezůstaneme jen u samotných principů. Stručně připomeneme historii objevu gravitačního zákona a pohovoříme o některých jeho důsledcích, jeho vlivu na historii, o záhadách, které se

za tímto zákonem skrývají a o tom, jak ho upřesnil Einstein. Budeme hovořit i o jeho vztahu k jiným fyzikálním zákonům. Všechno však není možné stihnout v jedné kapitole, proto uvedeným problémům věnujeme i následující kapitoly.

Historie začíná u našich dávných předků, kteří pozorovali pohyb planet mezi hvězdami a nakonec usoudili, že planety se pohybují kolem Slunce, což později znovu objevil Koperník. Trochu více úsilí si vyžadovalo poznání toho, *jak* se planety kolem Slunce pohybují, jak jejich pohyb přesně probíhá. Na začátku patnáctého století se hodně diskutovalo o tom, jestli se planety opravdu pohybují kolem Slunce nebo ne. Tycho Brahe přišel se zcela novou myšlenkou. Spočívala v tom, že tyto diskuse mohou vyřešit jen dostatečně přesná měření poloh planet na obloze. Ukáží-li měření přesně, jak se planety pohybují, pak snad bude možné rozhodnout se pro jedno nebo druhé stanovisko. Byla to úžasná myšlenka – že něco je lépe poznávat cestou pečlivých experimentů než pokračováním v hlubokých filozofických úvahách. Při uskutečňování této myšlenky sledoval Tycho Brahe ve své observatoři na ostrově Hven u Kodaně po dlouhá léta pohyby planet. Vyhotoval rozsáhlé tabulky, které po jeho smrti studoval matematik Kepler. Kepler na základě těchto údajů objevil některé krásné, pozoruhodné a přitom jednoduché zákony planetárního pohybu.

## 7.2 KEPLEROVY ZÁKONY

Kepler především zjistil, že každá planeta obíhá kolem Slunce po křivce nazývané *elipsa*, přičemž Slunce se nachází v ohnisku elipsy. Elipsa není prostě ovál, ale představuje velmi svéráznou, přesně definovanou křivku, kterou je možné získat tak, že tužkou napíšeme nit upevněnou na dvou špendlíkách umístěných v ohniskách. Kdybychom se chtěli vyjádřit matematicky, museli bychom říci, že jde o geometrické místo bodů, které mají stálý součet vzdáleností od dvou pevných bodů (ohnisek). Nebo jestli se vám to líbí, je to kružnice, na kterou se díváme ze strany (*obr. 7.1*).

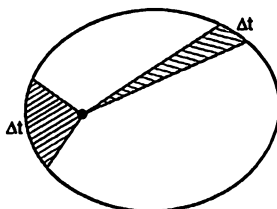


Obr. 7.1 Elipsa

Druhým Keplerovým poznatkem bylo zjištění, že planety neobíhají kolem Slunce stálou rychlostí. Když jsou ke Slunci blíže, pohybují se rychleji, a když jsou od něho vzdálenější, pohybují se pomaleji. Přesně můžeme tento pohyb popsat následujícím způsobem. Předpokládejme, že pozorujeme planetu ve dvou po sobě jdoucích časových okamžicích, například časově vzdálených o týden, a zakreslujeme průvodiče<sup>14)</sup> planety pro každou pozorovanou polohu. Přesně můžeme tento pohyb popsat následujícím způsobem. Dráhový oblouk, který planeta prošla po týdně a dva průvodiče vymezují určitou plochu. Tato plocha představuje vyšrafovanou oblast

<sup>14)</sup> Průvodič je úsečka spojující Slunce s kterýmkoliv bodem na planetární dráze.

na obr. 7.2. Uskutečnil-li se i druhé takové týdenní pozorování, a to tehdy, kdy je planeta dále od Slunce (a má tedy menší rychlost), podobným způsobem vymezená plocha je přesně stejná, jako v předcházejícím případě. Druhý Keplerův zákon tedy říká, že každá planeta obíhá kolem Slunce takovou rychlostí, že plochy opsané průvodičem za stejnou dobu jsou stejné!



Obr. 7.2 Keplerův zákon ploch

Třetí zákon Kepler objevil mnohem později a patří do jiné kategorie než první dva, neboť nehovoří jen o jedné planetě, ale dává do souvislosti jednotlivé planety. Tento zákon porovnává periody (oběžné doby) a rozměry drah jednotlivých planet a říká, že periody jsou úměrné  $3/2$  mocnině rozměrů drah. Periodou rozumíme dobu, kterou planeta potřebuje k oběhu celé dráhy a rozměr se určuje délkou největšího průměru eliptické dráhy, známého jako hlavní osa. Kdyby se planety pohybovaly po kružnicích (a tato představa je dost blízko skutečnosti), čas potřebný k opsání kružnice by byl úměrný  $3/2$  mocnině průměru (nebo poloměru) kružnice. Keplerovy zákony tedy zní:

- I. Každá planeta se pohybuje kolem Slunce po elipse, přičemž Slunce je v jednom z ohnisek.
- II. Průvodič spojující Slunce s planetou opisuje stejné plochy za stejné časové intervaly.
- III. Druhé mocniny period libovolných dvou planet jsou úměrné třetí mocninám velikých poloos jejich drah:  $T \sim a^{3/2}$ .

### 7.3 ROZVOJ DYNAMIKY

V době, kdy Kepler objevoval tyto zákony, Galileo se zajímal o zákony pohybu. Bylo třeba objasnit, co nutí planety se pohybovat. (V té době jedna z „teorií“ planetárního pohybu předpokládala, že příčinou pohybu planet jsou neviditelní andělé, kteří máváním svých křídel tlačí planety dopředu v oběhu. Uvidíte, že dnes je již tato teorie pozměněná! Ukazuje se, že k udržení planet musí neviditelní andělé působit na planety v jiném směru a nemají křídla. V ostatním jsou však obě teorie podobné!) Galileo objevil pozoruhodnou vlastnost pohybu, jež byla podstatnou pro pochopení těchto zákonů. Jde o princip *setrvačnosti* – jestliže se něco pohybuje tak, že není s ničím ve styku a nic ho neruší, pak se bude pohybovat nepřetržitě podél přímky a jeho rychlost bude konstantní. (Proč pohyb neustane, to nevíme. Víme však, že je to tak.)

Newton upravil tuto myšlenku, když říkal, že jediným způsobem jak změnit pohyb tělesa je použít sílu. Když se pohyb tělesa zrychluje, musela síla působit *ve směru pohybu*. Na druhé straně, jestliže se změnil *směr pohybu* tělesa, síla působila ze strany. Newton tedy doplnil tuto myšlenku o poznatek, že síla je potřebná ke změně velikosti rychlosti nebo směru pohybu tělesa. Například, upevníme-li kámen na provaz a roztáčíme ho po kruhové dráze, potřebujeme sílu, abychom ho na této dráze udrželi. Musíme *tahat za provaz*. Zákon ve skutečnosti říká, že zrychlení vyvolávané silou je nepřímo úměrné hmotnosti tělesa, nebo, že síla je úměrná součinu hmotnosti



a zrychlení. Čím je těleso hmotnější, tím větší síla je potřebná k dosažení daného zrychlení tělesa. (Hmotnost je možné měřit tak, že na konec stejného provazu upevňujeme různé kameny a nutíme je pohybovat se po stejné kruhové dráze stejnou rychlostí. Tak zjistíme, že k tomu je třeba větší nebo menší síly. Předměty vyžadující větší sílu, mají větší hmotnost.)

Z těchto úvah vyplývá velkolepá myšlenka, že k udržení planet na jejich drahách nejsou potřebné *tangenciální* síly (andělé nemusí letět ve směru tečny), protože planeta i tak poletí v tom směru. Kdyby planetu nic nerušilo, odletěla by *přímočaře*. Skutečný pohyb se však odchyluje od přímky, po níž by se těleso pohybovalo v nepřítomnosti sil, a tato odchylka je *kolmá* ke směru pohybu – tedy ne ve směru jeho pohybu. Jinými slovy: v důsledku principu setrvačnosti není síla potřebná k udržení pohybu planet kolem Slunce silou směřující *kolem* Slunce, ale silou směřující *ke* Slunci. (Existuje-li tu síla směřující ke Slunci, může být Slunce, samozřejmě, oním andělem!)

## 7.4 NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

Newton dokonaleji pochopil teorii pohybu a tak dospěl k přesvědčení, že *právě Slunce* by mohlo být místem nebo původcem sil, jež ovládají pohyb planet. Podařilo se mu dokázat (možná, že to brzy dokážeme i my), že opisování stejných ploch za stejnou dobu znamená, že všechna odchýlení od přímočarého pohybu jsou přesně *radiální* – že zákon je *přímým* následkem toho, že všechny síly *směřují ke Slunci*.

Dále je možné analýzou třetího Keplerova zákona dokázat, že čím dále je planeta od Slunce, tím jsou síly menší. Porovnáme-li dvě planety, různě vzdálené od Slunce, zjistíme, že síly jsou nepřímě úměrné druhé mocnině odpovídajících vzdáleností. Kombinováním těchto dvou zákonů usoudil Newton, že existuje síla, která je nepřímě úměrná druhé mocnině vzdálenosti a směřuje po přímce, jež prochází dvěma na sebe působícími objekty.

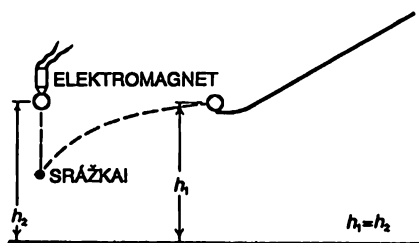
Newton, jenž měl značný smysl pro zobecnění, samozřejmě předpokládal, že tento vztah neplatí jen pro Slunce přitahující planety. Tehdy se již například vědělo, že planeta Jupiter má měsíce, které ji obíhají tak, jako zemský Měsíc obíhá Zemi a Newton si byl jistý, že každá planeta přidržuje silou svůj měsíc ve své blízkosti. Newton již znal sílu, jež nás přidržuje na Zemi, a tak předpokládal, že jde o *univerzální* sílu – že *vše je přitahováno vším*.

Dále ho zajímalo, zda Země přitahuje stejnou silou lidi i Měsíc, tj. silou, jež je nepřímě úměrná druhé mocnině vzdálenosti. Padá-li předmět na zemském povrchu 5 m za první sekundu po vypuštění, o jakou vzdálenost spadne Měsíc za stejnou dobu? Je možné namítnout, že Měsíc vůbec nepadá. Kdyby však na Měsíc nepůsobila síla, odletěl by po přímce, zatímco se pohybuje po kružnici, takže skutečně padá z místa, na kterém by byl, kdyby na něj nepůsobily síly. Protože známe poloměr jeho oběžné dráhy (asi 380 000 km) a dobu oběhu Měsíce kolem Země (přibližně 29 dnů), můžeme vypočítat, jakou vzdálenost urazí Měsíc za 1 sekundu a pak, o kolik za tuto dobu klesne.<sup>15)</sup> Tato vzdálenost je přibližně rovna 1,4 mm za sekundu. To zcela souhlasí se zákonem recipročních čtverců, neboť zemský poloměr je roven 6380 km a padá-li v této vzdálenosti těleso o 5 m za první sekundu, pak ve vzdálenosti 380 000 km, tedy 60-krát větší, by mělo spadnout jen 1/3600 z 5 m, což je zhruba 1,4 mm. Podobnými výpočty Newton prověřoval svou gravitační teorii. Výpočty provedl velmi pečlivě a zjistil tak velké odchylky, že považoval teorii za protřečící faktům a své výsledky nepublikoval. Po šesti letech byla provedena nová měření zemských rozměrů, která ukázala, že astronomové používali nesprávnou vzdálenost k Měsíci. Jakmile se o tom Newton doslechl, provedl své výpočty s opravenými údaji a dospěl k překrásné shodě.

<sup>15)</sup> Tj. jak se kružnice oběžné dráhy Měsíce odkloní od své tečny na úseku, který Měsíc urazí za 1 sekundu.

## NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

Myšlenka, že Měsíc „padá“, vyvolává rozpaky, neboť jak vidíme, Měsíc se k nám nepřibližuje. Tato myšlenka je tak zajímavá, že si zaslouhuje další vysvětlení: Měsíc padá v tom smyslu, že se *odklání od přímky, po níž by se pohyboval v nepřítomnosti sil*. Všimněme si příkladu ze zemského povrchu. Předmět vypuštěný v blízkosti zemského povrchu padá 5 m za první sekundu. I předmět vystřelený horizontálně spadne 5 m; ačkoli se pohybuje *horizontálně*, přece spadne za stejný čas o 5 m. Na *obr. 7.3* je znázorněno zařízení na ověření této skutečnosti. Na horizontálním žlábků je mříček, který se bude pohybovat dopředu. Ve stejné výšce je mříček, který bude padat vertikálně, přičemž elektrický spínač je nastaven tak, že v okamžiku, kdy první mříček opouští žlábek, uvolňuje se druhý mříček. Důkazem toho, že za stejnou dobu spadnou stejně hluboko, je jejich srážka ve vzduchu.

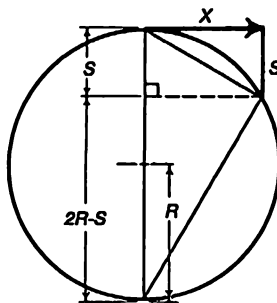


Obr. 7.3 Zařízení na demonstraci nezávislosti vertikálního a horizontálního pohybu

Kulka vystřelená horizontálně, může za 1 sekundu proletět velkou vzdálenost – snad půl kilometru – ale za ten čas spadne vždy o 5 m., byla-li vystřelena skutečně horizontálně. Co se bude dít, budeme-li kulku vystřelovat rychleji a rychleji? Nesmíme zapomenout, že zemský povrch je zakřivený. Vystřelíme-li kulku dostatečně rychle, může se stát, že ačkoli spadne o 5 m, zůstane ve stejné výšce nad zemí, jako byla předtím. Jak je to možné? Ačkoli kulka padá, Země se zakřivuje a tak se stává, že kulka padá „kolem“ Země. Je však třeba odpovědět na otázku, jak daleko se musí dostat kulka za jednu sekundu, aby země byla 5 m pod horizontem. Na *obr. 7.4* je znázorněna Země s jejím 6380 km dlouhým poloměrem a tečna – přímka, po níž by se kulka pohybovala v nepřítomnosti sil. Použijeme-li jednu z nádherných geometrických pouček, která říká, že naše tečna je geometrický průměr dvou částí průměru vyřezaných stejně dlouhou tětivou, zjistíme, že horizontální vzdálenost, kterou kulka urazí, je geometrický průměr z 5 m pádu a 12 760 km zemského průměru. Druhá odmocnina z  $(0,005 \cdot 12\,760)$  vychází přibližně 7,9 km. Pohybuje-li se tedy kulka rychlostí 7,9 km za sekundu, bude padat k Zemi každou sekundu o 5 m, ale nikdy se k Zemi nepřiblíží, neboť Země je zakřivená. Tak to bylo i s Gagarinem, který obíhal Zemi rychlostí přibližně 8 km/s po 40 000 km dlouhé oběžné dráze. (Ve skutečnosti trochu více, neboť letěl výše.)

Každý objev nového zákona je užitečný jen tehdy, když je z něho možné získat více, než bylo do něho vloženo. Newton *použil* druhý a třetí Keplerův zákon k odvození svého gravitačního zákona. Co *předpověděl*? Nejdříve to byla jeho analýza pohybu Měsíce, neboť dávala do souvislosti padání předmětů na Zemi s „padáním“ Měsíce. Druhou předpovědí byla odpověď na otázku, *zda jsou dráhy planet elipsy*. Později uvidíme, jak je možno přesně vypočítat tento pohyb a dokázat, že planety se skutečně pohybují po elipsách.<sup>16)</sup> Takže žádná jiná fakta k důkazu *prvního* Keplerova zákona nepotřebujeme. Tak Newton uskutečnil svou první velkou předpověď.

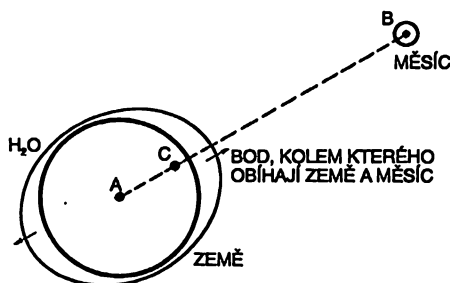
<sup>16)</sup> Samotný důkaz není v této knize.



Obr. 7.4 Dostředivé zrychlení při kruhové dráze. Z podobnosti trojúhelníků:  $x/s = (2R - s)/x \approx 2R/x$ , kde  $R$  je poloměr Země (6380 km),  $x$  je vzdálenost „prošlá horizontálně“ za jednu sekundu a  $s$  je vzdálenost „padání“ za jednu sekundu (přibližně 5 m)

Gravitační zákon vysvětluje mnoho dříve nepochopených jevů, například do té doby záhadný jev slapových pohybů – přílivu a odlivu – způsobovaných měsíční přitažlivostí. Lidé se i předtím domnívali, že Měsíc přitahuje vodu pod sebou a způsobuje příliv, ale nebyli tak bystří jako Newton, a proto si mysleli, že by měl být jen jeden příliv za den. Předpokládalo se, že Měsíc přitahuje vodu a vyvolává tak příliv a odliv a protože se Země otáčí, měl by v každém místě nastat příliv a odliv za 24 hodin. Skutečnost je však taková, že příliv a odliv nastávají každých 12 hodin. Podle jiných představ měl zase příliv nastat na opačné straně Země, neboť Měsíc odtažuje Zemi od vody! Obě dvě tyto teorie jsou nesprávné. Proces probíhá následujícím způsobem: měsíční přitažlivost Země i vody je ve středu Země, v průměru vyvážená. Avšak voda, která je blíže k Měsíci, je přitahována *více* než je průměrná přitažlivost, zatímco voda na vzdálenější straně je přitahována *méně* než je průměrná přitažlivost. Navíc, voda může téct, zatímco pevná Země ne. To, co skutečně pozorujeme, je pak kombinace těchto dvou úkazů.

Co chápeme pod slovem „vyvážený“? Co je vyvážené? Přitahuje-li Měsíc celou Zemi, proč ta nepadne „nahoru“ na Měsíc? Ze stejné příčiny, ze které Měsíc nepadne na Zemi. Země obíhá kolem bodu, jenž leží v jejím nitru, ale není v jejím středu. Měsíc neobíhá jen kolem Země, ale Země i Měsíc obíhají kolem centrální polohy a obě tělesa padají na toto společné centrum, jak je to znázorněno na obr. 7.5. Tento pohyb kolem společného centra je tím, co vyvažuje pád každého z těchto těles. Ani Země se tedy nepohybuje po přímce, ale po kružnici. Voda na vzdálenější straně je „nevyvážená“, neboť v jejím místě je měsíční přitažlivost slabší než ve středu Země, kde vyvažuje „odstředivou“ sílu. Výsledkem této nevyváženosti je, že voda se zvedá směrem od středu Země. Na bližší straně je měsíční přitažlivost silnější a nevyváženost má opačný směr v prostoru, ale opět směřuje pryč od středu Země. Výsledkem je existence dvou přílivových vzdutí.



Obr. 7.5 Slapové pohyby v soustavě Země–Měsíc

## 7.5 VŠEOBECNÁ GRAVITACE

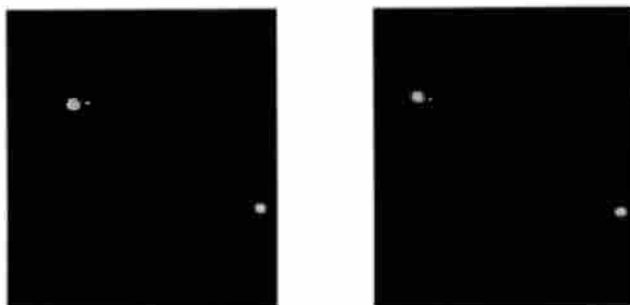
Co ještě můžeme pochopit, známe-li gravitaci? Každý ví, že Země je kulatá. Proč je Země kulatá? To je jednoduché; následkem gravitace. Země je kulatá proto, že všechno se navzájem přitahuje a tak se to, z čeho Země vznikla, přitahovalo, dokud to bylo možné! Chceme-li být přesnější, Země není přesná koule, neboť rotuje a tato rotace vede k odstředivému působení, jež zmenšuje gravitační působení v blízkosti rovníku. Země by tedy měla být elipsoidem, jehož přesný tvar dokonce umíme určit. Z gravitačního zákona tedy můžeme usoudit, že Slunce, Měsíc i Země by měly mít (přibližně) kulový tvar.

Co ještě můžeme určit z gravitačního zákona? Podíváme-li se na měsíce Jupitera, pochopíme vše o způsobu jejich pohybu kolem této planety. Mimochodem, jednou byl problém právě s měsíci Jupitera a nebude od věci něco si o tom říci. Tyto měsíce velmi podrobně studoval Roemer a všiml si, že někdy předbíhají „letový řád“ a někdy se zase opožďují. (Jejich „letový řád“ je možné sestavit po velmi dlouhém pozorování zjištěním průměrné doby obletu.) Měsíce předbíhaly řád, když byl Jupiter obzvláště *blízko* k Zemi a *opožďovaly se*, když byl Jupiter *vzdálený* od Země. Je to velmi těžké vysvětlit podle gravitačního zákona – dokonce by to mohlo pohřbit tuto nádhernou teorii, kdyby neexistovalo jiné vysvětlení. Kdyby totiž zákon nevyhovoval třeba jen *v jednom případě*, v němž by měl platit, byl by nesprávný. Tento rozpor se však dal vysvětlit velmi jednoduše a krásně: K tomu, abychom *pozorovali* měsíce Jupitera, je potřebný určitý čas, za který světlo urazí vzdálenost od Jupitera k Zemi. Je-li Jupiter blíže k Zemi, čas je kratší a je-li Jupiter dále, čas je delší. Proto se měsíce zdánlivě jednou předbíhají a jindy opožďují za letovým řádem, podle toho, zda jsou blíže nebo dále od Země. Tento úkaz, který svědčí o tom, že světlo se nešíří okamžitě, poskytl první odhad rychlosti šíření světla. Bylo to roku 1656.

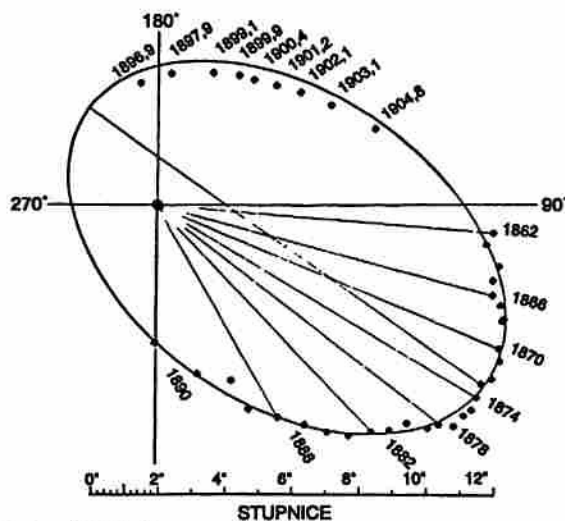
Přitahují-li se vzájemně všechny planety, pak síla, která ovládá například Jupiter na jeho cestě kolem Slunce, nepochází jen od Slunce; pochází například i od Saturnu. Ačkoli tato síla není velká, neboť Slunce má mnohem větší hmotnost než Saturn, přece to je jen *určitá* síla a dráha Jupitera by neměla být – a ani není – dokonalou elipsou; je trochu vychýlená a „kolísá“ kolem skutečně eliptické dráhy. Takový pohyb je trochu komplikovanější. Byly uskutečněny pokusy o analýzu pohybu Jupitera, Saturnu a Uranu na základě gravitačního zákona. Započítaly se vlivy jednotlivých planet, aby se zjistilo, jestli tento zákon vysvětluje drobné odchylky a nepravidelnosti v jejich pohybu. A hle – v případě Jupitera a Saturnu bylo vše v pořádku, ale Uran se choval velmi podivně. Nepostupoval po přesné elipse, jenže to se dalo pochopit jako následek přitažlivosti Jupitera a Saturnu. Když se však započítaly i tyto přitažlivosti, Uran se *stále* pohyboval nepravidelně a hrozilo, že gravitační zákon není správný. Adams v Anglii a Leverrier ve Francii přišli nezávisle na sobě na jinou možnost: možná že existuje *jiná* planeta, tmavá a neviditelná, kterou lidé zatím neobjevili. Tato planeta N by měla přitahovat Uran. Vypočítali, kde by se měla taková planeta nacházet, aby způsobovala pozorované odchylky. Pak zaslali zprávy příslušným observatořím, aby naměřily dalekohledy na vypočtené místo, kde je možné vidět novou planetu. Aby vás brali vážně, to často závisí na tom, s kým pracujete. Leverriera brali vážně, podřvali se na určené místo a planetu N skutečně našli! Za krátkou dobu i další observatoř našla tuto planetu.

Tento objev potvrzuje, že Newtonovy zákony jsou zcela správné v sluneční soustavě, ale zůstává otázka, zda jsou správné i při větších vzdálenostech, než jsou relativně malé vzdálenosti nejbližších planet. Nejprve si můžeme položit otázku: Přitahují se *hvězdy vzájemně* také tak jako planety? Přesvědčivý důkaz takové přitažlivosti máme v případě *dvojhvězd*. Na *obr. 7.6* je vidět dvojhvězdu – dvě hvězdy, jež jsou velmi blízko u sebe (je tam i třetí hvězda, a proto se můžeme přesvědčit, zda fotografie nebyla otočená). Obrázek nám ukazuje i konfiguraci hvězd po

několika letech. Je vidět, že vzhledem k „pevné“ hvězdě se osa páru pootočila, tj. hvězdy obíhají jedna kolem druhé. Obíhají podle Newtonových zákonů? Pečlivá měření relativních poloh jedné takové dvojhvězdy jsou zakreslena na obr. 7.7. Měření, která se uskutečnila mezi roky 1862 a 1904 (do dnešních dnů se musel uskutečnit už i další oběh), dávají krásnou elipsu. Vše souhlasí s Newtonovými zákony, až na to, že hvězda Sírius A *není v ohnisku*.



Obr. 7.6 Systém dvojhvězdy



Obr. 7.7 Dráha Síria B vzhledem k Síriusu A

Proč dochází k něčemu takovému? Protože rovina elipsy není v „rovině oblohy“. Na rovinu dráhy se nedíváme pod pravým úhlem a když hledíme na nakloněnou elipsu, zůstane stále elipsou, ale ohnisko nezůstane na původním místě. Tak můžeme relativní pohyb dvojhvězdy analyzovat v souladu s požadavky gravitačního zákona.

Pravdivost gravitačního zákona i na větších vzdálenostech potvrzuje obr. 7.8. Jen člověk bez představivosti na něm nevidí působení gravitace. Tento obrázek znázorňuje jednu z nejkrásnějších věcí na obloze – kulovou hvězdokupu. Každá tečka je hvězda. Ačkoli hvězdy vypadají, jako by byly pevně natlačeny k centru, jde pouze o nedokonalost našich přístrojů. Ve skutečnosti jsou i vzdálenosti mezi středovými hvězdami velmi velké a jen velmi zřídka tu dochází ke srážkám. Nejvíce hvězd je ve středu a se vzdalováním se od středu počet hvězd klesá. Je zřejmé, že mezi

těmito hvězdami existuje přitažlivost. Je jasné, že na těchto ohromných vzdálenostech, snad 100 000-krát větších než je sluneční soustava, existuje gravitační síla. Pojďme však dále a podívejme se na *celou galaxii* znázorněnou na *obr. 7.9*. Tvar této galaxie svědčí o zjevné snaze její hmoty aglomerovat. Samozřejmě, nemůžeme dokázat, že tu jde přesně o nepřímou úměrnost druhé mocnině vzdálenosti, ale jen to, že i na těchto ohromných vzdálenostech je to přitažlivost, která drží věci pohromadě. Je možné namítnout, že je to sice všechno pěkné, ale proč nemá galaxie kulový tvar? Protože rotuje a má moment hybnosti, jehož se nemůže vzdát při smrštění; musí tedy být smrštěna převážně v rovině. (Mimochodem, hledáte-li zajímavý problém, tak zatím nevíme, jak se tvoří spirální ramena galaxie a co určuje tvar galaxií.) Je ale jasné, že tvar galaxie je určen gravitací, i když složitost jeho struktury nám zatím brání úplně ho analyzovat. Rozměry galaxií jsou asi od 50 000 do 100 000 světelných let. Jak velké jsou to vzdálenosti si uvědomíte až tehdy, když uvážíte, že vzdálenost Země od Slunce je  $8 \frac{1}{3}$  světelných minut.



Obr. 7.8 Kulová hvězdokupa



Obr. 7.9 Galaxie

Zdá se, že přitažlivost existuje i ve větších vzdálenostech. *Obr. 7.10* znázorňuje shluk mnoha „drobných“ útvarů. Je to kupa *galaxií*, podobná hvězdokupě. Galaxie se tedy v takových vzdálenostech přitahují, a proto aglomerují do větších celků.



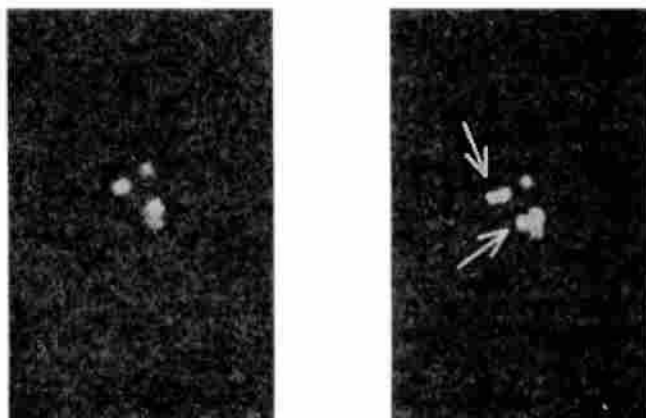
Obr. 7.10 Kupa galaxií

Gravitace snad existuje i ve vzdálenostech *desítek milionů světelných let*. Podle našich dosavadních znalostí je gravitační síla všude nepřímou úměrnou druhé mocnině vzdálenosti.



Obr. 7.11 Mezihvězdný prachový oblak

Gravitační zákon nám dovoluje pochopit nejen povahu mlhovin, ale poskytuje nám i určité představy o původu hvězd. Máme-li velký oblak prachu a plynu podobný tomu, jenž je znázorněn na obr. 7.11, vzájemná přitažlivost prachových částic může vyvolat jejich seskupení do malých hrudek. Na obrázku slabě viditelné „malé“ černé skvrnky mohou být začátkem akumulace prachu a plynů, které díky své přitažlivosti začínají tvořit hvězdy. Je diskutabilní, zda jsme vůbec někdy viděli zrod hvězdy. Na obr. 7.12 je možná důkaz toho, že ano. Na levé straně je obrázek oblasti plynu s několika hvězdami. Tento snímek pochází z roku 1947. Na pravé straně je obrázek o sedm let mladší. Na něm jsou vidět dvě nové jasné skvrny. Akumuloval se plyn, gravitace vyvolala jeho soustředění do dostatečně velké koule, takže začala hvězdná jaderná reakce a přeměnila ho na hvězdu? Možná ano, možná ne. Je však nepravděpodobné, že za pouhých sedm let bychom měli štěstí vidět přeměnu hvězdy do viditelné podoby a ještě méně pravděpodobné je vidět takové přeměny hned *dvě*



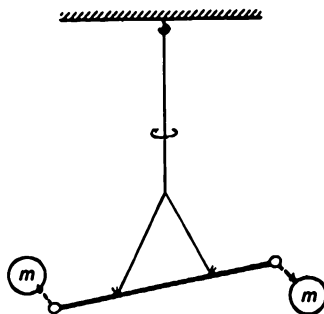
Obr. 7.12 Vznik nových hvězd?

## 7.6 CAVENDISHŮV EXPERIMENT

Gravitace tedy působí na obrovských vzdálenostech. Existuje-li však síla mezi *libovolnými* dvěma předměty, pak musí existovat možnost změřit tuto sílu působící mezi předměty v našem okolí. Nemohli bychom namísto pozorování pohybu hvězd vzít olovenou a mramorovou kuličku a pozorovat jak se bude pohybovat mramorová kulička k olovené? Obtížnost tak jednoduchého experimentu spočívá v tom, že tato síla je sama velmi malá, jemná. Pokus je třeba provádět s mimořádnou pečlivostí, což znamená vyčerpat vzduch z aparatury, vyloučit přítomnost elektrických nábojů apod., a až potom je možné tu sílu měřit. Poprvé provedl takovéto měření Cavendish na zařízení, které je schématicky znázorněno na *obr. 7.13*. Tímto pokusem se poprvé dokazovala přímá síla mezi dvěma velkými pevnými olovenými koulemi a dvěma menšími olovenými koulemi umístěnými na koncích vahadla upevněného na velmi jemném, tzv. torzním, vlákně. Měřením zkroucení vlákna je možné měřit velikost síly a přesvědčit se, že je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti. Takto je možné přesně určit koeficient  $\kappa$  ve vztahu

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Všechny hmotnosti a vzdálenosti známe. Možná namítnete, že jsme je znali i v případě Země. Ano, znali jsme vše, až na *hmotnost Země*. Určením  $\kappa$  z tohoto experimentu a poznáním zemské přitažlivosti můžeme nepřímo určit hmotnost Země! Tento experiment byl nazván „vážením Země“. Cavendish tvrdil, že vážil Zemi, ale to, co skutečně měřil, byl koeficient  $\kappa$  gravitačního zákona. To je jediný způsob jak je možné určit hmotnost Země



Obr. 7.13 Zjednodušené schéma zařízení, pomocí něhož Cavendish ověřoval gravitační zákon v případě malých objektů a měřil gravitační konstantu  $\kappa$

Koeficient  $\kappa$  je roven  $6,670 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

Je těžké přecenit důležitost vlivu velkého úspěchu gravitační teorie na historii vědy. Stačí porovnat tehdejší zmatek, neúplné poznatky, nedůvěru, nekonečné debaty a paradoxy s jasností a jednoduchostí tohoto zákona; s tím, že všechny měsíce, planety a hvězdy jsou *ovládány tak jednoduchým pravidlem, kterému člověk rozumí a umí z něho odvodit, jak se planety musí pohybovat!* V tom je třeba vidět příčinu úspěchu věd v následujících letech. Tento poznatek dal lidem naději, že i jiné jevy mohou mít tak krásně jednoduché zákony.



## 7.7 CO JE TO GRAVITACE?

Je to však skutečně tak jednoduchý zákon? Co je možné říci o jeho příčině? Dosud jsme jen popisovali, *jak* se Země pohybuje kolem Slunce, ale nehovořili jsme o tom, *co vyvolává tento pohyb*. Newton se vědomě nezabýval tímto problémem; nevymýšlel si hypotézy. Uspokojil se s poznáním toho, co se odehrává, bez poznání mechanismu. *Dosud však nikdo takový mechanismus neobjevil*. Fyzikální zákony se vyznačují právě takovýmto abstraktním charakterem. Zákon zachování energie je tvrzení týkající se veličin, jež je třeba vypočítat a sčítat, a není v něm zmínky o mechanismu. Podobně je to i s velkými zákony mechaniky, které jsou kvantitativními matematickými zákony, jejichž vnitřní mechanismus neznáme. Proč k popisu přírody můžeme používat matematiku, aniž bychom věděli, jaký mechanismus se za tím skrývá? To neví nikdo. Musíme to dělat i nadále, neboť tak se můžeme více dozvědět.

Bylo navrženo mnoho mechanismů gravitace. Bude zajímavé si všimnout jednoho z nich, k němuž se lidé čas od času vracejí. Zpočátku každý, kdo takovýto mechanismus „objeví“, je vzrušený a šťastný, ale brzy zjistí, že mechanismus není správný. Poprvé byl objeven kolem roku 1750. Představte si, že v prostoru je velké množství částic, jež se pohybují velkou rychlostí ve všech směrech a při průchodu hmotou jsou jen velmi málo absorbovány. Když jsou absorbovány Zemí, odevzdávají jí hybnost. Protože je těch, které letí jedním směrem, stejně mnoho jako těch, které letí opačným směrem, hybnosti jsou vyvážené. Když se však přiblíží Slunce, jsou částice přicházející na Zemi skrz Slunce částečně absorbovány a ve směru od Slunce přichází méně částic než z opačné strany. Země proto získá hybnost směřující ke Slunci a nedá mnoho práce zjistit, že síla bude nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti – tak se totiž se vzdáleností mění prostorový úhel, pod nímž vidíme Slunce. Co je na tomto mechanismu špatné? Zahnuje některé nové důsledky, které *nejsou správné*. Taková myšlenka totiž vede k následujícímu problému: Země by při svém pohybu kolem Slunce narážela na více částic zepředu než zezadu. (Když běžíte v dešti, je déšť do tváře silnější než déšť do týla!) Země by proto měla dostávat více hybnosti zepředu a měla by proto pocítovat *odpor* a zpomalovat se. Je možné spočítat, jaký čas by potřebovala Země k zastavení v důsledku takového odporu; ukazuje se, že Země by se už měla pomalu zastavit, takže tento mechanismus selhává. Zatím se nenašel žádný mechanismus, jenž by vysvětloval „gravitaci“ bez předpovězení jiných jevů, které však *neexistují*.

Všimněme si ještě možného vztahu gravitace k jiným silám. Zatím neexistuje vysvětlení gravitace pomocí jiných sil. Gravitace není projevem elektřiny nebo něčeho podobného, takže vysvětlení nemáme. Gravitace je však jiným silám velmi podobná a je zajímavé blíže si všimnout této podobnosti. Například elektrická síla mezi dvěma nabitými předměty připomíná gravitační zákon: je rovna záporné konstantní veličině násobené součinem nábojů a mění se nepřímo úměrně s druhou mocninou jejich vzdálenosti. Působí na opačnou stranu – způsobuje odpuzování. Není přece jen velmi pozoruhodné, že tyto dva zákony obsahují stejnou funkci vzdálenosti? Možná, že mezi gravitací a elektřinou je mnohem větší souvislost než si myslíme. Bylo skutečně mnoho pokusů o sjednocení elektřiny a gravitace, takzvaná jednotná teorie pole je pouze velmi elegantním pokusem zkombinovat elektřinu a gravitaci. Při porovnávání gravitace a elektřiny je nejzajímavější *relativní velikost* jejich sil. Každá teorie, která je obsahuje obě dvě, musí objasnit i velikost gravitace.

Určíme-li v nějakých přirozených jednotkách odpuzování dvou elektronů (univerzální náboj přírody) způsobené elektrickými silami a přitažlivost těchto elektronů způsobenou jejich hmotnostmi, můžeme určit poměr elektrického odpuzování a gravitačního přitahování. Tento



rovnováha je dokonalá. Proto Gagarin a Titov pozorovali „beztížnost“ věcí uvnitř kosmické lodě; kdyby například vypustili kousek křídly, pohyboval by se kolem Země stejným způsobem jako celá kosmická loď a jevil by se jim, jako kdyby visel před nimi v prostoru. Je velmi zajímavé, že tato síla je *přesně* úměrná hmotnosti, protože v opačném případě by musely existovat jevy, při nichž by se setrvačná a gravitační síla lišily. Takový jev neexistuje, prověřil to s velkou přesností nejprve v roce 1909 Eötvös a později Dicke. Tyto pokusy vedly u všech použitých látek k úměrnosti hmotností a tíhy s přesností 1/1 000 000 000 nebo ještě lepší. Je to skutečně pozoruhodný experiment.

## 7.8 GRAVITACE A RELATIVITA

Další problém, který si zasluhuje pozornost, je Einsteinova modifikace Newtonova gravitačního zákona. Navzdory nadšení, které Newtonův gravitační zákon vyvolal, není tento zákon správný! Einstein ho pozměnil tak, aby vyhovoval požadavkům teorie relativity. Podle Newtona je gravitační působení okamžité, tj. pohneme-li hmotností, měli bychom okamžitě pociťovat změnu síly v důsledku změněné polohy této hmotnosti. Takovýmto způsobem by bylo možné posílat signály nekonečnou rychlostí. Einstein předložil důvody, proč *nemůžeme posílat signály větší rychlostí než je rychlost světla*, takže gravitační zákon musí být chybný. Opravíme-li tento zákon tak, že vezmeme v úvahu opoždování signálu, dostaneme nový zákon – nazývaný Einsteinův gravitační zákon. Jedním snadno pochopitelným rysem tohoto nového zákona je následující skutečnost. V Einsteinově teorii relativity vše co má *energii*, má hmotnost – hmotnost v tom smyslu, že je gravitačně přitahováno. Proto i světlo, které má energii, má „hmotnost“. Když světelný paprsek májící energii prochází kolem Slunce, působí na něho přitažlivost Slunce. Světlo se proto nešíří přímo, ale ohýbá se. Například po dobu slunečních zatmění se hvězdy, které jsou kolem Slunce, zdají posunuty z míst, kde by byly, kdyby Slunce nebylo. To bylo skutečně pozorováno.

Nakonec porovnejme gravitaci s jinými teoriemi. V posledních letech se zjistilo, že každá hmota se skládá z nepatrných částic a že existují různé druhy interakcí, jako jaderné síly apod. Žádná z těchto jaderných nebo elektrických sil však zatím nevysvětluje gravitaci. Kvantověmechanické aspekty přírody ještě nebyly rozšířeny na gravitaci. U velmi malých rozměrů, kde dochází ke kvantovým jevům, je gravitační působení tak slabé, že zatím nevznikla potřeba vytvořit kvantovou teorii gravitace. Kvůli důslednosti našich fyzikálních teorií by však bylo důležité vědět, zda Newtonův zákon modifikovaný na Einsteinův zákon je možno dále upravit tak, aby byl slučitelný s principem neurčitosti. Tato poslední úprava nebyla zatím dokončena.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

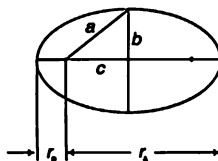
Připomeňme si některé vlastnosti elipsy. Její rozměry a tvar jsou zcela určeny libovolnou dvojicí následujících veličin: velká poloosa  $a$ , malá poloosa  $b$ , vzdálenost středu elipsy od jednoho z ohnisek  $c$ , excentricita  $e$ , vzdálenost perihelia od ohniska  $r_p$ , vzdálenost afelia od ohniska  $r_a$ . Přitom platí

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

$$r_p = a - c = a(1 - e),$$

$$e = \frac{c}{a} \text{ (podle definice),}$$

$$r_a = a + c = a(1 + e).$$



- 7.1 ■ Vzdálenost Měsíce od středu Země se mění od 363 300 km v perigeu do 405 500 km v apogeu a perioda oběhu Měsíce kolem Země je 27,322 dní. Umělá družice Země se pohybuje po eliptické trajektorii tak, že v perigeu se nachází 225 km nad povrchem Země a v apogeu 710 km. Střední průměr Země je 12 756 km. Určete periodu oběhu umělé družice.
- 7.2 ■ Družice hmotnosti  $m$  se pohybuje po kruhové trajektorii poloměru  $R$  kolem velkého kosmického tělesa hmotnosti  $M$ .
- Pomocí známého vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu  $s = at^2/2$  a obrázku 7.4 určete dostředivé zrychlení družice v závislosti na její obvodové rychlosti a poloměru trajektorie.
  - Z Newtonovy pohybové rovnice s přitažlivou gravitační silou  $ma = x M m/R^2$  pak odvoďte třetí Keplerův zákon.
- 7.3 ■ a) Porovnejte parametry trajektorie orbitálního pohybu Země kolem Slunce a Měsíce kolem Země a určete odtud poměr hmotností Slunce a Země.  
b) Jupiterův měsíc Io obíhá po trajektorii poloměru 421 800 km s periodou 1,769 dne. Určete poměr hmotností Jupitera a Země.
- 7.4 ■ Pohybují-li se dvě vzájemně se přitahující tělesa tak, že jejich vzdálenost  $R$  se nemění, můžeme to vysvětlit tím, že vlastně na sebe stále vzájemně padají a v důsledku toho obě obíhají kolem společného nehybného těžiště. Ukažte, že v takovém případě jejich oběžná doba závisí jen na součtu hmotností obou těles a nikoli na jejich poměru. Platí to i pro eliptické trajektorie a můžete se pokusit to dokázat.
- 7.5 ■ Dvě složky dvojhvězdy  $a$  a  $b$  obíhají jedna kolem druhé pod vlivem vzájemné gravitační přitažlivé síly. Velká poloosa trajektorie tohoto vzájemného pohybu je  $R$  astronomických jednotek (AU) a doba oběhu  $T$  roků. Najděte výraz pro poměr součtu hmotností obou složek dvojhvězdy  $m_a + m_b$  k hmotnosti Slunce.
- 7.6 ■ Trigonometrická paralaxa Síría (tj. úhel, pod nímž je ze Síría vidět poloměr trajektorie Země) je 0,378". S použitím číselných údajů na obr. 7.7 vyjádřete co nejpřesněji hmotnost dvojhvězdy Síría v jednotkách hmotnosti Slunce.
- Předpokládejte, že rovina trajektorií složek Síría je kolmá ke směru k Zemi.

b) Vzhledem k tomu, že rovina těchto trajektorií svírá se směrem k Zemi úhel rozdílný od pravého, uvažte zda vámi zjištěná hodnota hmotnosti Síría je limitní. Jestliže ano, je to horní limita nebo dolní?

- 7.7 ■ Excentricita zemské trajektorie je 0,0167. Najděte poměr maximální a minimální orbitální rychlosti Země.
- 7.8 ■ Zatím poslední návrat Halleyovy komety připadl na rok 1986. Bylo to po sedmé od roku 1456, kdy se vylekaní lidé modlili v kostelích za spásu před ďáblem, Turkem a kometou. Když Halleyova kometa procházela periheliem 19. dubna 1910, byla naměřena její vzdálenost od Slunce 0,60 AU. a) Jak daleko je Halleyova kometa od Slunce v afeliu? b) Jaký je poměr její největší a nejmenší orbitální rychlosti?
- 7.9 ■ Jak lze určit hmotnost Měsíce?
- 7.10 ■ Poloměr Země je 6 378 km, Měsíce 1 378 km a jejich hmotnosti jsou v poměru 81,3:1. Určete zrychlení volného pádu na Měsíci, je-li na Zemi rovno  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
- 7.11 ■ S jakou experimentální přesností bychom museli změřit tíhové zrychlení  $g$  abychom mohli pozorovat denní kolísání této veličiny způsobené přitažlivostí Měsíce? Pro jednoduchost budeme předpokládat, že zeměpisná poloha laboratoře, v níž provádíme měření, je taková, že Měsíc nad ní prochází v zenitu a pod ní v nadiru. Vliv slapů zanedbejte.

# 8 Pohyb

## 8.1 POPIS POHYBU

## 8.2 RYCHLOST

## 8.3 RYCHLOST JAKO DERIVACE

## 8.4 VZDÁLENOST JAKO INTEGRÁL

## 8.5 ZRYCHLENÍ

### 8.1 POPIS POHYBU

Abychom našli zákony, podle nichž probíhají změny s tělesy v průběhu času, musíme umět *popisat* tyto změny a nějakým způsobem je zaznamenat. Nejjednodušší změna, již je možno pozorovat v případě tělesa, je zjevná změna jeho polohy s časem, a tu nazýváme pohybem. Uvažujme nějaký tuhý předmět se stálou značkou, kterou nazveme bodem a kterou můžeme pozorovat. Budeme si všimnout pohybu této malé značky, již může být ozdoba na kapotě automobilu nebo střed padající kuličky, a budeme se snažit popsat tu skutečnost, že se pohybuje a jakým způsobem se to děje.

Tyto příklady se možná zdají příliš jednoduché, ale popis změny zahrnuje mnoho detailů. Některé změny jsou obtížněji popsatelné než pohyb bodu na tuhém tělese. Takovými jsou například pohyb mraku, který nejenže pomalu postupuje, ale rychle mění svůj tvar, nebo se odpařuje a takové jsou i vrtochy ženské mysli. Neznáme jednoduchý způsob analýzy změn mysli, ale mrak si můžeme představit jako množství molekul, a tak snad v principu můžeme popsat pohyb mraku pomocí pohybu jednotlivých molekul. Možná i změny v mysli jsou odrazem změn atomů v mozku, ale zatím o tom nic nevíme.

Začneme proto pozorovat pohyb bodů; můžeme je považovat za atomy, ale snad bude lepší, budeme-li zpočátku méně přesní a budeme je považovat za nějaké malé předměty – malé v porovnání se vzdálenostmi, na nichž se uskutečňuje pohyb. Například při popisu pohybu automobilu, který ujel 100 km, nemusíme rozlišovat, jestli jde o přední nebo zadní nárazník. Máme-li být přesní, jsou v tom drobné rozdíly, ale pro běžné účely stačí hovořit o „automobilu“ a nevádat nám, že naše body nejsou skutečnými body – pro naše účely nemusíme být až tak přesní. Při prvním pohledu na náš předmět zapomeneme i na trojrozměrnost světa. Soustředíme se jen na pohyb v jednom směru, jako když jede automobil po silnici. Budeme-li vědět, jak popisovat jednorozměrný pohyb, vrátíme se k trojrozměrnému prostoru. Nyní možná namítnete, že to jsou všechno samozřejmosti a budete mít pravdu. Jak je možné popsat takový jednorozměrný pohyb – například pohyb auta? Nic nemůže být jednodušší. Z mnoha možných způsobů vybereme násle-

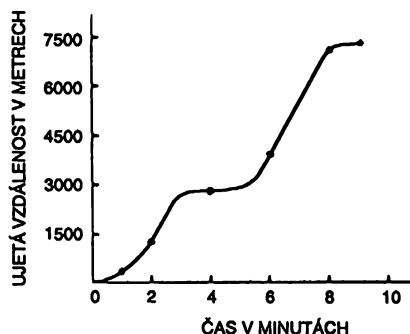
dující. Abychom určili polohu auta v různých časových okamžicích, budeme měřit jeho vzdálenost od počátečního bodu a zaznamenávat všechna pozorování. V *tab. 8.1* představuje  $s$  vzdálenost auta od počátečního bodu v metrech a  $t$  představuje čas v minutách.

První řádek představuje nulovou vzdálenost a nulový čas – auto ještě neodstartovalo. Za jednu minutu od startu ujelo 360 metrů. Po dvou minutách od startu se dostalo ještě dále – všimněte si, že větší vzdálenost ujelo v druhé minutě – jeho pohyb se zrychlil. Mezi třetí a čtvrtou minutou se však něco stalo a v páté minutě auto snad i zastavilo na červenou. Potom se jeho pohyb opět zrychlil a dostalo se do vzdálenosti 3 900 metrů na konci šesté minuty, do vzdálenosti 5 400 metrů na konci sedmé minuty, do vzdálenosti 7 050 metrů na konci osmé minuty a v deváté minutě se dostalo jen do vzdálenosti 7 200 metrů, neboť ho zastavil policista.

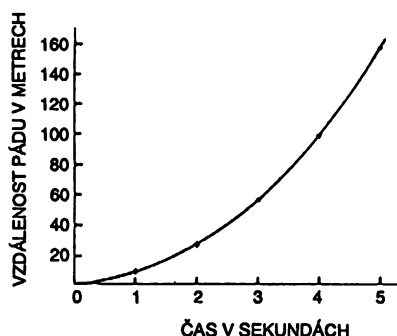
To je jeden způsob popisu pohybu. Druhým způsobem je popis pomocí grafu. Nanášíme-li čas horizontálně a vzdálenost vertikálně, dostaneme křivku jako na *obr. 8.1*. S rostoucím časem roste i vzdálenost, zpočátku velmi pomalu, potom rychleji a ve čtvrté minutě opět velmi pomalu; potom několik minut roste a nakonec v deváté minutě přestane růst. Tyto údaje je možno vyčíst z grafu bez použití tabulky. K úplnému popisu bychom samozřejmě potřebovali i údaje o poloze auta při půlminutových značkách, ale zakreslujeme-li graf jako spojitou křivku, děláme to proto, že předpokládáme, že auto i v mezích musí mít nějakou polohu.

Pohyb auta je složitý. Proto si za další příklad vybereme něco, co se pohybuje jednodušeji, co vyhovuje jednodušším pohybovým zákonům – vybereme si padající míček. V *tab. 8.2* je pro padající těleso čas vyjádřený v sekundách a vzdálenost v metrech. V nulové sekundě míček začíná padat z nulové vzdálenosti a na konci první sekundy se dostal do vzdálenosti 5 metrů. Na konci druhé sekundy je 20 metrů pod úroveň začátku, na konci třetí sekundy 45 metrů atd. Vyneseme-li čísla z tabulky do grafu, získáme krásnou parabolu znázorněnou na *obr. 8.2*, kterou je možné vyjádřit vztahem

$$s = 5 t^2. \tag{8.1}$$



Obr.8.1 Graf závislosti autem ujeté vzdálenosti na čase



Obr.8.2 Časová závislost vzdálenosti padajícího tělesa

Tento vztah nám umožňuje vypočítat vzdálenost v kterémkoli časovém okamžiku. Snad namítnete, že by měl existovat vztah i pro první graf. Takový vztah je možné zapsat obecně ve tvaru

$$s = f(t), \tag{8.2}$$

což znamená, že  $s$  je veličinou, která závisí na  $t$ , nebo v matematickém jazyku je  $s$  funkcí  $t$ . Protože nevíme, jaká ta funkce je, nemůžeme ji vyjádřit v konkrétním algebraickém tvaru.

Tabulka 8.2

$t$ [s]	$s$ [m]
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80
5	125
6	180

Poznali jsme dva příklady pohybu, jež byly popsány velmi jednoduchým způsobem bez zvláštní důmyslnosti. Avšak tyto příklady v sobě přece jen skrývají několik jemností. Především, co rozumíme časem a prostorem? Ukazuje se, že jde o hluboké filozofické otázky, jež si ve fyzice vyžadují důkladnou analýzu a ta nebývá snadná. Teorie relativity ukazuje, že představy prostoru a času nejsou tak jednoduché, jak by se zdály na první pohled. Jenže zatím v našich prvních úvahách nemusíme být příliš úzkostliví při definování těchto pojmů. Některým z vás se to bude zdát divné, neboť jste se učili, že ve vědě je třeba *vše* přesně definovat. Jenže *vše* přesně definovat nemůžeme! Kdybychom se o to pokusili, dostali bychom se do podobné situace jako ti dva filozofové, kteří v diskusi říkají jeden druhému: „Sám nevíte, o čem hovoříte!“ Druhý odpovídá: „A

co to znamená *vědět*? Co znamená *hovořit*? Co znamená *sám*?“ Abychom mohli hovořit konstruktivně, musíme se dohodnout, že mluvíme zhruba o stejné věci. O čase už víte vše, co teď potřebujeme. Musíte si však být vědomi toho, že existuje řada detailů, jež bude třeba prodiskutovat, ale to uděláme až později.

Jednou z takových diskutabilních věcí je již uvedený fakt, že pozorovaný pohybující se bod se vždy nachází na nějakém místě. (Samozřejmě, když na něj hledíme, je tam, ale bude tam i tehdy, kdy se na něj nedíváme?) Ukazuje se, že v případech pohybujících se atomů není možné takto uvažovat – na atomu si nemůžeme zvolit značku a pozorovat její pohyb. S tímto problémem se setkáme v kvantové mechanice. Nejprve se však budeme zajímat o problémy, v nichž ještě neuvažujeme takové komplikace, a až *později* provedeme korekce, které si vynucují nejnovější poznatky. Uspokojíme se proto s jednoduchým pohledem na čas a prostor. Víme, co tyto pojmy v hrubých rysech představují a ti, kteří již řídili auto, vědí, co znamená rychlost.

## 8.2 RYCHLOST

Ačkoli zhruba víme, co „rychlost“ znamená, přece tu existují určité rafinované záležitosti; vždyť jen uvažme, že učení Řekové nebyli schopni přiměřeně popsat problémy související s rychlostí. Taková záležitost se objeví, když se snažíme přesně pochopit, co je třeba rozumět pod „rychlostí“. Řekové z toho byli velmi zmateni a muselo být objeveno nové odvětví matematiky (vedle geometrie a algebry Řeků, Arabů a Babylóňanů). Pro ilustraci problémů se pokusme řešit tento problém jednoduchou algebrou: Balón nafukujeme tak, že jeho objem roste rychlostí  $100 \text{ cm}^3$  za sekundu; jakou rychlostí roste jeho poloměr, když má balón  $1000 \text{ cm}^3$ ? Řeky jaksi zmátl takovýto problém zejména zásluhou některých úmyslně matoucích Řeků. Aby poukázal na těžkosti související se studiem rychlosti, Zenon uvedl několik paradoxů, ze kterých uvedeme jeden pro ilustraci problémů, jež se vyskytly při zkoumání pohybu. V tomto paradoxu Zenon říká, že Achilles, ačkoli běží 10krát rychleji než želva, přece ji nikdy nedoběhne. Argumentuje následujícím způsobem: „Předpokládáme-li, že na začátku běhu má želva stometrový náskok, pak než Achilles uběhne 100 metrů a dostane se na místo, kde byla původně želva, bude želva, která leze desetkrát pomaleji, 10 metrů před ním. Achilles proto musí běžet dalších 10 metrů, aby želvu chytil, ale po deseti metrech zjistí, že želva je 1 metr před ním. Když uběhne i ten metr, najde želvu 10 cm před sebou a tak to půjde *donekonečna*. Proto je v kterémkoli okamžiku želva



před Achillem a ten ji nikdy nedoběhne“. Co je na této argumentaci nesprávné? Je to skutečnost, že konečný čas se dělí na nekonečně mnoho částí, právě tak jako konečná délka se dá rozdělit na nekonečně mnoho částí opakovaným dělením dvěma. A tak, ačkoli (při této argumentaci) máme nekonečný počet kroků k bodu, v němž Achilles dostihne želvu, neznamená to, že jde o nekonečně dlouhý *časový* interval. Na tomto příkladu je vidět, že při studiu rychlosti je možné narazit na problémy.

Abyste si mohli ještě jasněji představit tyto problémy, připomeneme vám vtíp, který jste již určitě slyšeli. Již jsme hovořili o autě, které zastavil policista. Nyní si představte, že v tomto autě sedí dáma a policista ji napomíná: „Paní, jela jste rychlostí 90 km za hodinu!“ Dáma odpovídá: „To přece není možné, vždyť cestuji jen sedm minut! Je to směšné – jak mohu jet rychlostí 90 km za hodinu, když jsem hodinu nejela?“ Jak byste odpověděli, kdybyste byli policistou? Samozřejmě, kdybyste skutečně byli policistou, vše by bylo bez problémů. Prostě byste té dámě řekli, že svoje argumenty může přednést u soudu. Vyloučíme-li však takové řešení a uspokojíme se s poctivým intelektuálním přístupem k tomuto problému, v němž chceme této dámě vysvětlit, co znamená jet rychlostí 90 km za hodinu, co musíme udělat? Té dámě bychom vysvětlili, že kdyby pokračovala v cestě a jela stále stejnou rychlostí, ujela by za hodinu 90 kilometrů. Mohla by však namítnout: „Dala jsem nohu z plynu a auto zpomalovalo, a proto bych neujela 90 km, kdybych takto pokračovala.“ Nebo uvažujme padající míček a předpokládejme, že bychom chtěli znát jeho rychlost za dobu tří sekund, kdyby se dále pohyboval tak, jak se pohybuje nyní. Znamenalo by to snad, že si udržuje *zrychlení* a pohybuje se stále rychleji? Ne, znamenalo by to, že si udržuje stejnou *rychlost*. A to právě chceme definovat! Kdyby totiž míček setrval v původním pohybu, pohyboval by se tak, jak se pohybuje. Rychlost proto musíme lépe definovat. Co se má vlastně zachovat? Ta dáma by také mohla argumentovat následujícím způsobem: „Kdybych pokračovala v pohybu bez změny další hodinu, narazila bych do zdi na konci ulice!“ Není tedy tak jednoduché říci, co vlastně máme na mysli.

Mnozí fyzici zastávají názor, že měření je jedinou definicí kterékoli veličiny. Pak bychom, samozřejmě, použili zařízení na měření rychlosti – tachometr – a upozornili bychom dámu, že její tachometr ukazuje 90. Dáma by však opět mohla namítnat, že její tachometr je pokazený a vůbec neukazuje. Znamená to ale, že se auto nepohybuje? Jsme přesvědčeni, že existuje něco, čím je možné změřit rychlost dříve, než zkonstruujeme tachometr. Jen tehdy je možné říci například: „Tachometr nepracuje správně“ nebo „tachometr je rozbitý“. Kdyby nebylo možné měřit rychlost jinak než tachometrem, byla by tato věta nesmyslem. Máme tedy na mysli něco, co je nezávislé na tachometru a tachometr slouží jen k měření této myšlenky. Uvažme, zda je možné lépe definovat rychlost. Jako policista byste řekli: „Milá paní, kdybyste jela hodinu, narazila byste na zeď, ale kdybyste jela jednu sekundu, ujela byste 25 metrů. Jela jste tedy rychlostí 25 metrů za sekundu a další sekundu byste ujela dalších 25 metrů a ta zeď je mnohem dále.“ Dáma však namítná: „Neexistuje ale takový zákon, který by říkal, že není dovoleno jet 25 metrů za sekundu! Zákon zakazuje jet 90 km za hodinu.“ Vy potom řeknete, že je to přece totéž. Je-li to však totéž, pak by asi nedošlo k takové tahanici o 25 metrů za sekundu. Padající míček se ve skutečnosti nemůže pohybovat stejně v průběhu ani jedné sekundy, protože stále mění rychlost, a tak budeme muset rychlost nějak definovat.

Zdá se, že se dostáváme na správnou stopu. Kdyby dáma pokračovala v cestě další tisícinu hodiny, ujela by tisícinu z 90 km. Jinými slovy: nemusela by jet celou hodinu, důležité je, že v *daném okamžiku* jede takovou rychlostí. To znamená, že kdyby jela jen o nepatrný okamžik déle, ujela by navíc takový úsek, jaký by ujelo auto jedoucí *stálou* rychlostí 90 km za hodinu. Myšlenka o 25 metrech za sekundu je možná správná; sledujeme, kolik auto ujelo za poslední sekundu,

dělíme to 25 metry a když dostaneme 1, rychlost byla 90 km za hodinu. Jinými slovy, rychlost můžeme zjistit tímto způsobem: zjistíme, jak daleko dojdeme ve velmi krátkém čase, pak tuto vzdálenost dělíme časem, a tak dostaneme rychlost. Čas je však třeba zvolit co nejkratší, neboť v průběhu tohoto času by se mohla stát nějaká změna. Kdybychom v případě padajícího tělesa zvolili za takový časový interval hodinu, bylo by to absurdní. Kdybychom zvolili jednu sekundu, dostali bychom docela dobrý výsledek v případě auta, kdy je změna rychlosti malá, ale taková volba by nebyla dostatečná pro padající těleso. Chceme-li zjistit rychlost co nejpřesněji, musíme zvolit časový interval co nejkratší. Měli bychom tedy zvolit milióntinu sekundy a vzdálenost ujetou za tento čas dělit tou milióntinou sekundy. Tak bychom dostali vzdálenost za sekundu, neboli to, co rozumíme jako rychlost a takovýmto způsobem vlastně definujeme rychlost. Takto by bylo třeba odpovědět dříve v automobilu, taková je definice, kterou budeme používat.

Definice rychlosti obsahuje novou myšlenku, jež ve své obecné podobě nebyla dostupná starým Řekům. Tato myšlenka spočívá v tom, že uvažujeme *nekonečně malou vzdálenost* odpovídající *nekonečně malý čas*, uvedeme je do poměru a sledujeme chování tohoto poměru při zmenšování časového intervalu. Jinak řečeno, zajímáme se o limitu ujeté vzdálenosti dělenou odpovídajícím časem při *nekonečném* zmenšování tohoto času. Na tuto myšlenku přišli nezávisle na sobě Newton a Leibniz a představovala zrod nové matematické disciplíny nazývané *diferenciální počet*. Tento počet vznikl v souvislosti s popisem pohybu a jeho první aplikací byl vlastně náš problém související s otázkou: Co znamená jet „90 km/hod“?

Pokusme se definovat rychlost trochu přesněji. Předpokládejme, že za krátkou dobu  $\varepsilon$  urazí auto nebo jiné těleso krátkou vzdálenost  $x$ . Pak definujeme rychlost  $v$  jako

$$v = \frac{x}{\varepsilon},$$

přičemž přesnost bude tím větší, čím bude  $\varepsilon$  menší. Chceme-li to vyjádřit matematicky, můžeme říci, že rychlost je limita podílu  $x / \varepsilon$  při  $\varepsilon$  blízkém se k nule, tj.

$$v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{\varepsilon}. \quad (8.3)$$

V případě dámy s autem nemůžeme provést totéž, neboť naše tabulka je neúplná. Víme jen to, kde se dáma nachází na hraničních minutových intervalech. Proto si můžeme vytvořit jen přibližný obraz o její rychlosti z toho, že například po dobu sedmé minuty ujela 1500 metrů, ale nevíme, jaká byla její rychlost přesně na začátku sedmé minuty. Nevíme, zda zrychlovala a na začátku šesté minuty měla rychlost 1400 m/min a nyní má rychlost 1600 m/min, nebo zda pohyb probíhal jinak. Nevíme to proto, že nám chybí údaje uvnitř intervalu. Z takové tabulky bychom mohli vypočítat rychlost jen tehdy, kdyby obsahovala nekonečně mnoho údajů. Máme-li však matematický vztah úplný – takovým je v případě padajícího tělesa rovnice (8.1) – můžeme vypočítat takovou rychlost, neboť umíme určit polohu tělesa v kterémkoli časovém okamžiku.

Jako příklad si určíme rychlost padajícího tělesa v páté sekundě pádu. Jedním ze způsobů jak to provést by mohlo být zkoumání *tabulky 8.2*, z níž je vidět, že v páté sekundě urazilo těleso  $125 - 80 = 45$  m. Proto by se zdálo, že těleso padalo rychlostí 45 m/s. To však není pravda, neboť rychlost se mění a ačkoli v tomto časovém intervalu je to v *průměru 45 m/s*, těleso se zrychluje a na konci páté sekundy padá rychleji než 45 m/s. Chceme *přesně určit jeho rychlost*. Je možné to udělat následujícím způsobem: Víme, kde se těleso nacházelo v páté sekundě. V 5,1 s je podle vztahu

(8.1) vzdálenost, kterou těleso urazilo, rovna  $5 \cdot 5,1^2 = 130,05$  m. V páté sekundě bylo těleso ve vzdálenosti 125 m a za další desetinu sekundy urazilo  $130,05 - 125 = 5,05$  m. Protože 5,05 m za 0,1 s je totéž jako 50,5 m/s, zjistili jsme vlastně rychlost, ale ne zcela přesně. Nevíme, je-li to rychlost v páté sekundě, v 5,1 s nebo 5,05 s, nebo někde mezi těmito hodnotami. Měli jsme určit rychlost v 5 s a jestliže se nám to zcela nepodařilo, zpřesníme náš postup. Vezmeme jednu tisícinu sekundy a vypočítáme, kam se až dostalo těleso. Přidáme-li ještě tento čas k páté sekundě, dostaneme tedy v 5,001 s

$$s = 5 \cdot 5,001^2 = 5 \cdot 25,01001 = 125,050005 \text{ m.}$$

V poslední tisícině sekund spadlo těleso 0,050005 m a dělíme-li toto číslo 0,001 s, dostaneme rychlost 50,005 m/s. Tento údaj je již přesnější, již je docela blízký skutečnosti, ale přece jen není zcela přesný. Je však vidět, co musíme udělat, chceme-li rychlost určit přesně. Bude užitečné formulovat úlohu trochu abstraktněji: Hledáme rychlost v časovém okamžiku  $t_0$ , jenž v našem původním problému představoval 5 s. Vzdálenost, do níž se dostalo těleso v čase  $t_0$  a kterou budeme označovat  $s_0$ , je rovna  $5 t_0^2$ , tedy 125 m v našem případě. Při hledání rychlosti si klademe otázku: „Kde je těleso v čase  $t_0 + \varepsilon$  (malý přírůstek) nebo  $t_0 + \varepsilon$ ?“ Nová poloha je  $5(t_0 + \varepsilon)^2 = 5 t_0^2 + 10 t_0 \varepsilon + 5 \varepsilon^2$ . Těleso je teď dále než předtím, neboť nejprve bylo vzdáleno jen  $5 t_0^2$ . Ta dodatečná vzdálenost je  $s_0 +$  (malý přírůstek) nebo  $s_0 + x$  (kde  $x$  je ten přírůstek). Odečteme-li od vzdálenosti v čase  $t_0 + \varepsilon$  vzdálenost v  $t_0$ , dostaneme  $x$  – přírůstek vzdálenosti jako  $x = 10 t_0 \varepsilon + 5 \varepsilon^2$ . V prvním přiblížení bude rychlost rovna

$$v = \frac{x}{\varepsilon} = 10 t_0 + 5 \varepsilon. \quad (8.4)$$

Skutečná rychlost je hodnota tohoto poměru  $x / \varepsilon$  při nepatrném  $\varepsilon$ . Jinými slovy, po vytvoření poměru bereme  $\varepsilon$  vždy menší a menší, tj. blíží se k nule. Rovnice pak přejde do tvaru  $v$  (v čase  $t_0$ ) =  $10 t_0$ . V našem případě bylo  $t_0 = 5$  s, a proto  $v = 10 \cdot 5 = 50$  m/s. Předtím, když jsme uvažovali  $\varepsilon$  nejprve 0,1 s a podruhé 0,001 s, byla hodnota  $v$  trochu větší. Nyní však vidíme, že skutečná rychlost je přesně 50 m/s.

### 8.3 RYCHLOST JAKO DERIVACE

Výpočet, který jsme právě provedli, je v matematice velmi častý a pro veličiny  $\varepsilon$  a  $x$  se proto zavedlo speciální značení: Namísto  $\varepsilon$  se setkáte s  $\Delta t$  a namísto  $x$  s  $\Delta s$ . Pod  $\Delta t$  rozumíme „malý přírůstek  $t$ “, který je možné vždy zmenšovat. Přítomnost znaku  $\Delta$  neznamena násobení, právě tak jako  $\sin \vartheta$  neznamena  $s \cdot i \cdot n \cdot \vartheta$ . Jde prostě o časový přírůstek a znak  $\Delta$  zvýrazňuje jeho zvláštní charakter. Podobnou vlastnost má  $\Delta s$ ; rozdíl je jen v tom, že tentokrát jde o vzdálenost  $s$ . Protože  $\Delta$  není součinitel, nevykrátí se v poměru  $\Delta s / \Delta t$  a nedostaneme  $s / t$ , právě tak, jako bychom nedostali  $1/2$  z výrazu  $\sin \vartheta / \sin 2\vartheta$ . Při takovémto značení je rychlost rovna limitě podílu  $\Delta s / \Delta t$  při  $\Delta t$  blízcím se k nule, tedy

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (8.5)$$

Tento výraz je stejný, jako vztah (8.3) s  $\varepsilon$  a  $x$ , ale má tu výhodu, že poukazuje na změnu určitých veličin a ukazuje co a jak se mění.

## RYCHLOST JAKO DERIVACE

Existuje ještě jeden zákon, který platí s dostatečnou přesností. Ten zákon říká, že vzdálenost pohyblivého se bodu je možné vyjádřit jako součin rychlosti a časového intervalu, tj.  $\Delta s = v \Delta t$ . Tento zákon je správný tehdy, když se v průběhu uvažovaného časového intervalu rychlost nemění, ale to obecně platí jen tehdy, když je  $\Delta t$  dostatečně malé. Fyzici jsou zvyklí psát  $ds = v dt$ , přičemž pod  $dt$  rozumějí  $\Delta t$  za podmíněk, v nichž je velmi malé. Při takovémto chápání je uvedený zákon dostatečně přesný. Kdyby  $\Delta t$  bylo velké, mohla by se rychlost v průběhu tohoto intervalu měnit a přesnost zákona by se zmenšila. Při  $dt$  blízkém se k nule je výraz  $ds = v dt$  zcela přesný. Pomocí nově zavedených symbolů můžeme vztah (8.5) přepsat do tvaru

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Veličina  $ds/dt$  se v tomto vztahu nazývá „derivace  $s$  podle  $t$ “ (takový název nám připomíná, co se vlastně mění) a složitý proces hledání derivace se nazývá derivováním. Objevuj-li se  $ds$ ,  $dt$  samostatně, nazývají se *diferenciály*. Aby se nám stala nová řeč bližší, připomeňme si, že již dříve jsme počítali derivaci funkce  $5t^2$ , o níž jsme zjistili, že je rovna  $10t$ . Zvykneme-li si na novou řeč, budeme snadněji chápat mnohé myšlenky. Abychom se pocvičili, vypočítáme derivaci složitější funkce. Uvažujme vztah  $s = At^3 + Bt + C$ , jenž by mohl popisovat pohyb bodu. Písmena  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , podobně jako ve známém obecném tvaru kvadratické rovnice, představují konstantní čísla. Naším úkolem je najít rychlost v kterémkoli okamžiku na základě tohoto vztahu. Abychom to provedli co nejelegantněji, změníme  $t$  na  $t + \Delta t$ , přičemž se změní  $s$  na  $s + \Delta s$  a  $\Delta s$  vyjádříme pomocí  $\Delta t$ . Tak dostaneme

$$s + \Delta s = A(t + \Delta t)^3 + B(t + \Delta t) + C = At^3 + Bt + C + 3At^2\Delta t + B\Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3.$$

Protože  
můžeme psát

$$s = At^3 + Bt + C,$$

$$\Delta s = 3At^2\Delta t + B\Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3.$$

### Tabulka 8.3 Stručný přehled derivací

$s$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  jsou libovolné funkce  $t$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $n$  jsou libovolné konstanty

Funkce	Derivace
$s = t^n$	$\frac{ds}{dt} = nt^{n-1}$
$s = cu$	$\frac{ds}{dt} = c \frac{du}{dt}$
$s = u + v + w + \dots$	$\frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{dw}{dt} + \dots$
$s = c$	$\frac{ds}{dt} = 0$
$s = u^a v^b w^c \dots$	$\frac{ds}{dt} = s \left( \frac{a}{u} \frac{du}{dt} + \frac{b}{v} \frac{dv}{dt} + \frac{c}{w} \frac{dw}{dt} + \dots \right)$

Jenže my nepotřebujeme  $\Delta s$ , ale  $\Delta s$  dělené  $\Delta t$ . Proto předcházející rovnici dělíme  $\Delta t$  a dostáváme

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3 A t^2 + B + 3 A t (\Delta t) + A (\Delta t)^2.$$

Jde-li  $\Delta t$  k nule, je  $\Delta s/\Delta t$  rovno  $ds/dt$  a platí

$$\frac{ds}{dt} = 3 A t^2 + B.$$

To je základ derivování funkcí. Tento proces je ve skutečnosti ještě jednodušší, než by se na první pohled zdálo. Všimněte si, že členy obsahující druhou nebo vyšší mocniny  $\Delta t$  je možné zanedbat, neboť v limitě konvergují k nule.

Po krátkém cvičení se celý proces pro vás stane ještě jednodušším, neboť budete vědět, co je třeba zanedbat. Existuje velmi mnoho pravidel derivování různých druhů funkcí. Tato pravidla je možné si pamatovat, nebo je možné je vyhledat v tabulkách. Stručný seznam pravidel je uveden v *tab. 8.3*.

## 8.4 VZDÁLENOST JAKO INTEGRÁL

Ještě nám zbývá analyzovat obrácenou úlohu. Předpokládejme, že místo tabulky vzdáleností máme tabulku rychlostí v různých časech počínaje nulou. Pro padající kuličku jsou tyto rychlosti a časy znázorněny v *tab. 8.4*. Podobnou tabulku je možné sestavit pro auto, zaznamenáváme-li údaje tachometru každou minutu nebo každou půlminutu. Víme-li v každém časovém okamžiku, jak rychle se auto pohybuje, můžeme určit, jak daleko se dostane? Tato úloha je opakem úlohy, kterou jsme již vyřešili; je dána rychlost a chceme určit vzdálenost. Jak je možné určit vzdálenost, známe-li rychlost? Není-li rychlost auta konstantní a dáma se chvíli pohybuje rychlostí 90 km/h, pak zpomalí, opět zrychlí atd., jak můžeme určit, kam se až dostala? Je to jednoduché. Použijeme stejnou myšlenku jako v předcházejícím případě a vyjádříme vzdálenost pomocí nekonečně malých částí. Jestliže mělo auto v první sekundě určitou rychlost, můžeme ze vztahu  $\Delta s = v \Delta t$  vypočítat, kam až se auto při dané rychlosti v první sekundě dostalo. V další sekundě se rychlost auta liší o málo; kam se auto dostalo, vypočítáme tak, že vynásobíme novou rychlost časem. Takto dostáváme jistý počet malých vzdáleností a celková vzdálenost bude součtem těchto malých vzdáleností. To znamená, že vzdálenost bude součtem součinů rychlostí a časů, tedy  $s = \sum v \Delta t$ , kde řecké písmeno  $\Sigma$  (sigma) označuje součet. Pro přesnost je třeba poznamenat, že v součtu vystupují rychlosti v určitém okamžiku, např. v *t*-tém časovém okamžiku a jsou násobeny  $\Delta t$ , tj.

Tabulka 8.4  
Rychlost padajícího tělesa

$t$ [s]	$v$ [ $m \cdot s^{-1}$ ]
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40

$$s = \sum_i v(t_i) \Delta t. \quad (8.6)$$

Tyto časové okamžiky vyhovují následující podmínce:  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ . Ani takovýmto způsobem

určovaná vzdálenost nebude přesná, neboť v průběhu časového intervalu  $\Delta t$  se může rychlost měnit. K zabezpečení přesnosti musíme časové intervaly brát co nejkratší. Skutečně s je

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i v(t_i) \Delta t. \quad (8.7)$$

Pro takovou limitu zavedli matematici speciální symbol analogický symbolu pro diferenciál.  $\Delta$  přechází v  $d$  a zvýrazňuje tak skutečnost, že čas je co nejmenší, o rychlosti hovoříme jako o  $v$  v čase  $t$  a součet píšeme s trochu deformovaným velkým „S“  $\int$  (podle latinského slova summa), kterému se dnes říká bohužel jen znak integrálu. Máme tedy

$$s = \int v(t) dt.$$

Proces sčítání takových výrazů se nazývá integrování a představuje opak derivování. Derivace tohoto integrálu je  $v$ , takže jeden operátor ( $d$ ) ruší druhý ( $\int$ ). Vzorce pro integrování je možné získat ze vzorců pro derivování jejich obrácením, neboť jsou vzájemně inverzní. Každý si může sestavit svou tabulku integrálů, bude-li derivovat všechny druhy funkcí. Z každého diferenciálního vzorce dostaneme integrální, když ho obrátíme.

Každou funkci je možné derivovat analyticky, tj. operace probíhá algebraicky a vede k určité funkci. S integrálem je to však jinak a není možné napsat analytický tvar pro libovolný integrál. Je sice možné ho vypočítat, například tak, že nejprve provedeme uvedenou sumaci, a zjemníme-li dostatečně interval  $\Delta t$ , dostaneme výsledek téměř přesně. Máme-li však danou určitou funkci, nemůžeme obecně nalézt analytický výraz pro její integrál. Vždy se můžeme pokusit najít funkci, která nám po zderivování dá požadovanou funkci. Jenomže taková funkce nemusí existovat v tom smyslu, že by se dala vyjádřit pomocí funkcí, které již dostaly nějaké pojmenování.

## 8.5 ZRYCHLENÍ

Dalším krokem na cestě k pohybovým rovnicím je zavedení veličiny, která přesahuje pojem rychlosti a souvisí se *změnou* rychlosti pohybu. K takovéto veličině přicházíme, když si klademe otázku, jak se *mění* rychlost. V předcházejících kapitolách jsme hovořili o případech, v nichž síly způsobovaly změny rychlosti. Určitě jste již slyšeli vzrušující zprávy o autech, která za 10 sekund dosáhnou z klidu rychlosti 90 km/h. Na takovémto příkladu je vidět, jak se mění rychlost – ale jen v průměru. V dalším stádiu se budeme zabývat složitějším problémem – rychlostí změny rychlosti. Jinými slovy, o kolik metrů za sekundu se změní rychlost v průběhu sekundy, tj. o kolik metrů za sekundu za sekundu. Již dříve jsme odvodili vztah pro rychlost padajícího tělesa v podobě  $v = 10 t$ , který je zaznamenán v *tab. 8.4*, a nyní bychom chtěli zjistit, jak se rychlost mění za sekundu. Veličinu vyjadřující tuto změnu nazýváme zrychlením.

Zrychlení je definováno jako časová změna rychlosti. Z předcházející diskuze již víme dost k tomu, abychom mohli zapsat zrychlení jako derivaci  $dv/dt$ , podobně, jako rychlost byla časovou derivací vzdálenosti. Derivujeme-li vztah  $v = 10 t$ , dostaneme zrychlení padajícího tělesa

$$a = \frac{dv}{dt} = 10. \quad (8.9)$$

(Při derivování výrazu  $10t$  jsme využili výsledek získaný v předcházející úloze, kde jsme zjistili, že derivace  $Bt$  je prostě  $B$  – tedy konstanta. Položením  $B = 10$  dostaneme okamžitě výsledek, že derivace  $10t$  je  $10$ .) To znamená, že rychlost padajícího tělesa roste každou sekundu o  $10$  m/s. Tato skutečnost je zřejmá i z *tab. 8.4*. Tento příklad je velmi jednoduchý, ale zrychlení obecně nebývají konstantní. Příčinou konstantního zrychlení v případě padajícího tělesa je skutečnost, že na něj působí konstantní síla a podle Newtonova zákona je zrychlení úměrné síle.

Jako další příklad si všimněme zrychlení v úloze, kterou jsme již vyřešili, když jsme se zabývali rychlostí. Když jsme vycházeli ze vztahu  $s = At^3 + Bt + C$ , dostali jsme pro  $v = ds/dt$  vyjádření

$$v = 3At^2 + B.$$

Protože zrychlení je časová derivace rychlosti, musíme poslední výraz derivovat. Připomeňme si pravidlo, podle něhož je derivace dvojčlenu rovna součtu derivací jednotlivých členů. Abychom při derivování prvního členu nemuseli opakovat celý základní proces, připomeňme si, že kvadratický člen jsme již derivovali při derivování funkce  $5t^2$  a výsledek byl takový, že koeficient se zdvojnásobil a  $t^2$  se změnilo na  $t$ . Proto budeme předpokládat, že totéž se děje i v tomto případě a můžete se o tom přesvědčit sami. Derivace  $3At^2$  proto bude  $6At$ . Dále musíme derivovat  $B$ , tedy konstantní člen. Podle předcházejícího pravidla je však derivace  $B$  rovna nule, a tak tento člen nepřispívá ke zrychlení. Konečný výsledek je proto  $a = dv/dt = 6At$ .

Uvedme ještě dva užitečné vztahy, jež je možné získat integrací. Pohybuje-li se těleso vycházející z klidu s konstantním zrychlením  $g$ , jeho rychlost v libovolném čase  $t$  je

$$v = gt.$$

Vzdálenost, kterou těleso až do tohoto okamžiku urazí, je

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Pro zápis derivace se používají různá matematická značení. Protože rychlost je  $ds/dt$  a zrychlení je časová derivace rychlosti, můžeme psát i

$$a = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (8.10)$$

což představuje běžný zápis druhé derivace.

Existuje i jiný zákon, podle něhož je rychlost rovna integrálu zrychlení. To je právě opakem vztahu  $a = dv/dt$ . Protože jsme již zjistili, že vzdálenost je integrálem rychlosti, můžeme vzdálenost najít dvojnásobnou integrací zrychlení.

Předcházející diskuze se zabývala jen jednorozměrným pohybem a nedostatek místa nám dovoluje jen velmi stručnou analýzu trojrozměrného pohybu. Uvažujme částici  $P$ , která se pohybuje libovolně v trojrozměrném prostoru. Na začátku této kapitoly jsme jednorozměrný pohyb ilustrovali pohybem auta a sledovali jsme vzdálenost, kterou auto ujede za různou dobu od počátečního bodu. Pak jsme hovořili o rychlosti jako o časové změně ujeté vzdálenosti a o zrychlení jako o časové změně rychlosti. Podobně je možné zkoumat trojrozměrný pohyb. Jednodušší však bude znázornit si pohyb nejprve na dvojrozměrném grafu a výsledky pak

zobecnit na trojrozměrný případ. Zvolme si dvojici navzájem kolmých souřadnicových os a polohu částice v kterémkoli časovém okamžiku určíme odměřením jeho vzdálenosti od každé ze souřadnicových os. Každá poloha je tedy určena  $x$ -ovou a  $y$ -ovou vzdáleností a pohyb je možné popsat pomocí tabulky, v níž jsou tyto vzdálenosti zapsány jako funkce času. (Rozšíření tohoto procesu na trojrozměrný případ si vyžaduje jen zavedení další osy, kolmé na předcházející osy, a měření třetí,  $z$ -ové, vzdálenosti. Vzdálenosti se potom neměří od souřadnicových os, ale od souřadnicových rovin.)

Jak můžeme určit rychlost, máme-li sestavenou tabulku s  $x$ -ovými a  $y$ -ovými vzdálenostmi? Nejprve najdeme složky rychlosti v jednotlivých směrech. Horizontální složka rychlosti, tj.  $x$ -ová složka, je časovou derivací  $x$ -ové vzdálenosti, tedy

$$v_x = dx/dt. \quad (8.11)$$

Podobně vertikální složka rychlosti, tj.  $y$ -ová složka je

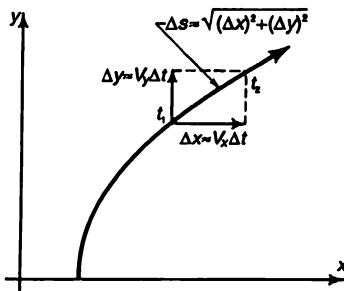
$$v_y = dy/dt. \quad (8.12)$$

V trojrozměrném případě máme ještě

$$v_z = dz/dt. \quad (8.13)$$

Jak můžeme určit rychlost podle skutečné dráhy pohybu, známe-li složky rychlosti? V dvojrozměrném případě uvažujme dvě následující polohy částice lišící se o krátkou vzdálenost  $\Delta s$  a krátký časový interval  $t_2 - t_1 = \Delta t$ . V čase  $\Delta t$  urazí částice horizontálně vzdálenost  $\Delta x \approx v_x \Delta t$  a vertikálně vzdálenost  $\Delta y \approx v_y \Delta t$ . (Symbol „ $\approx$ “ znamená „přibližně“.) Skutečná uražená vzdálenost je podle obr. 8.3 rovna přibližně

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (8.14)$$



Obr. 8.3 Popis pohybu tělesa v rovině a výpočet jeho rychlosti

Přibližnou rychlost v průběhu časového intervalu získáme dělením tohoto výrazu  $\Delta t$ . Přibližuje-li se  $\Delta t$ , podobně jako na začátku kapitoly, k nule, získáme pro rychlost vyjádření

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (8.15)$$



## POHYB

a v trojrozměrném případě

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (8.16)$$

Podobně, jako jsme definovali rychlosti, můžeme definovat zrychlení:  $x$ -ová složka zrychlení  $a_x$  je derivací  $v_x$   $x$ -ové složky rychlosti (tj.  $a_x = d^2 x / dt^2$  je druhou derivací  $x$  podle času) a analogicky definujeme ostatní složky zrychlení.

Uvažujme jeden pěkný příklad složeného pohybu v rovině. Nechť se kulička pohybuje horizontálně konstantní rychlostí  $u$  a nechť současně vertikálně padá s konstantním zrychlením  $-g$ . Jaký je to vlastně pohyb? Víme, že  $dx/dt = v_x = u$ . Protože rychlost  $v_x$  je konstantní

$$x = ut, \quad (8.17)$$

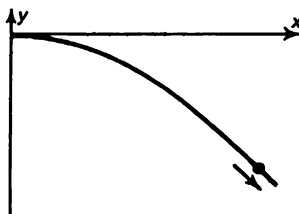
a protože při pohybu dolů je zrychlení  $-g$  konstantní, je možné vzdálenost  $y$  padajícího předmětu zapsat ve tvaru

$$y = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (8.18)$$

Jak vypadá křivka takového pohybu, tj. jaký je vztah mezi  $y$  a  $x$ ? Z rovnice (8.18) můžeme vyloučit čas, neboť  $t = x/u$ . Po této substituci dostaneme

$$y = -\frac{g}{2u^2}x^2. \quad (8.19)$$

Tento vztah mezi  $y$  a  $x$  je možné považovat za rovnici trajektorie pohybující se kuličky. Vyneseme-li tuto závislost do grafu, získáme křivku, jež se nazývá parabola (obr. 8.4). Jakékoli padající těleso vystřelené v libovolném směru se bude pohybovat po parabole.



Obr. 8.4 Parabola, již opisuje padající těleso, které má počáteční horizontální rychlost

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 8.1 ■ Těleso se pohybuje po přímce se stálým zrychlením  $a$ . V okamžiku  $t = 0$  je v bodě o souřadnici  $x = x_0$  a má rychlost  $v_x = v_{x_0}$ . Ukažte, že v okamžiku  $t$  budou souřadnice a rychlost tělesa dány vztahy

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v_x(t) = v_{x_0} + a t.$$

- 8.2 ■ Vylučte čas ze vzorců odvozených v předchozí úloze a ukažte, že v každém okamžiku platí rovnost

$$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2 a (x - x_0).$$

- 8.3 ■ Zobecněte výsledky obou předchozích úloh na případ trojrozměrného pohybu se stálým zrychlením, jehož průměty na osy souřadnic jsou  $a_x$ ,  $a_y$  a  $a_z$ .

- 8.4 ■ Z děla na povrchu Země byl vystřelen náboj počáteční rychlostí  $v$  pod úhlem  $\theta$  k obzoru. Vypočítejte vzdálenost, kterou náboj uletí, a největší výšku, jíž dosáhne. Odpor vzduchu zanedbejte.

- 8.5 ■ Pod jakým úhlem k obzoru musíme nastavit hlaveň děla, aby náboj dosáhl největší možné vzdálenosti?

- 8.6 ■ Americký automobilista začátečník, dosud nepříliš silný v dopravních předpisech, byl při výjezdu z města pokutován za překročení rychlosti. Když pak na přímém úseku dálnice uviděl plakát s nápisem „Zkontrolujte si svůj tachometr“, rozhodl se řídit se touto radou. V okamžiku, kdy míjel nulovou čáru na povrchu vozovky, šlápl na plyn a snažil se udržovat vůz v pohybu se stálým zrychlením. Za 16 sekund míjel sloupek s označením „0,1 míle“, za dalších 8 sekund značku „0,2 míle“.

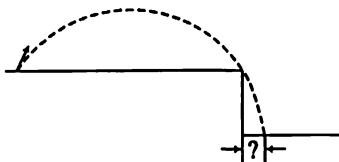
- a) Jakou rychlost měl v tomto okamžiku ukazovat jeho tachometr?  
b) S jakým zrychlením se automobil pohyboval? Americká míle je 1 609 m.

- 8.7 ■ Raketa vypuštěná vertikálně vzhůru se po celých 50 sekund chodu motorů pohybuje se zrychlením  $2g$ .

- a) Nakreslete graf závislosti rychlosti rakety na čase po celou dobu letu.  
b) Určete maximální výšku, jíž raketa dosáhne.  
c) Vypočítejte celkovou dobu letu od vypuštění do návratu na zem. Odpor vzduchu a změnu tíhového zrychlení s výškou zanedbejte.

- 8.8 ■ Na dlouhém vodorovném úseku zkušebního polygonu se testují raketové a letecké reaktivní motory. Podvozek s raketovým motorem startoval z klidu, až do vyhoření paliva se pohyboval se stálým zrychlením, a pak pokračoval v pohybu stálou rychlostí. Palivo mu došlo přesně v polovině měřené vzdálenosti. Při dalším testu se na téže trati pohyboval podvozek s leteckým reaktivním motorem a urazil celou dráhu se stálým zrychlením, a to za stejnou dobu. Čemu je roven poměr zrychlení obou testovaných souprav?

- 8.9 ■ Minomet je umístěn ve vzdálenosti 800 m od svislého srázu výšky 105 m (viz obrázek). Střelba z minometu má zasáhnout cíle skryté pod srázem. Jak blízko k úpatí srázu dosáhnou míny, je-li jejich počáteční rychlost 300 m/s ?



- 8.10 ■ Velikost úhlu, jehož vrchol leží ve středu kružnice poloměru  $R$ , můžeme měřit jako poměr délky oblouku  $s$ , který tento úhel vytíná na kružnici, a jejího poloměru:

$$\vartheta = \frac{s}{R} \text{ rad.}$$

- a) Ukažte, že pro úhly  $\vartheta \ll 1$  rad platí  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1$ .  
 b) Pomocí tohoto výsledku a vzorců pro sinus a kosinus součtu dvou úhlů najděte derivace funkcí sinus a kosinus z definice

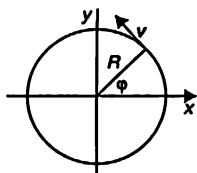
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

- 8.11 ■ Těleso se pohybuje po kružnici poloměru  $R$  proti směru hodinových ručiček stálou rychlostí  $v$ . Střed kružnice je v počátku pravouhlé soustavy souřadnic  $(x, y)$  a v okamžiku  $t = 0$  je těleso v bodě o souřadnicích  $(R, 0)$ .

- a) Najděte  $x$ ,  $y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $a_x$ ,  $a_y$  jako funkce času.  
 b) Ukažte, že  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  a  $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ , kde  $\omega = \frac{v}{R}$ . Tečka nad písmenem znamená derivaci podle času, takže

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$



- 8.12 ■ Malý kamínek uvázl ve vzorku pneumatiky automobilového kola poloměru  $R$ . Kolo se valí bez prokluzování po vodorovné dráze stálou rychlostí  $v$ . Vyjádřete souřadnice kamínku  $x$  a  $y$  jako funkce času, jestliže se v okamžiku  $t = 0$  kamínek dotýkal země. Určete také, jak závisí kartézské souřadnice rychlosti a zrychlení na čase.

# Newtonovy zákony dynamiky

---

## 9.1 HYBNOST A SÍLA

## 9.2 SMĚR A VELIKOST RYCHLOSTI

## 9.3 SLOŽKY RYCHLOSTI, ZRYCHLENÍ A SÍLY

## 9.4 CO JE TO SÍLA?

## 9.5 SMYSL DYNAMICKÝCH ROVNIC

## 9.6 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ROVNIC

## 9.7 POHYB PLANET

### 9.1 HYBNOST A SÍLA

Objev zákonů dynamiky, neboli zákonů pohybu, byl dramatickým momentem v historii vědy. Ještě před Newtonem byly pohyby takových objektů, jako jsou planety, záhadou, ale po Newtonovi se stalo vše pochopitelným. Dokonce bylo možné spočítat i malé odchylky od Keplerových zákonů podmiňované působením jiných planet. Po Newtonově objevu bylo možné plně analyzovat pohyb kyvadla, kmity závaží zavěšeného na pružině a jiné jevy. Tak je to i s touto kapitolou: před ní jsme neuměli vypočítat, jak se pohybuje závaží upevněné na pružině a tím méně vypočítat vliv Jupiteru a Saturnu na pohyb Uranu. Po této kapitole *budeme schopni* vypočítat nejen pohyb kmitajícího závaží, ale i poruchy pohybu Uranu způsobované Jupiterem a Saturnem!

Galileo udělal veliký krok na cestě za pochopením pohybu svým objevem *principu setrvačnosti*: Je-li předmět ponechán sám sobě bez vnějších vlivů, pokračuje v přímočarém pohybu konstantní rychlostí, jak se původně pohyboval, nebo zůstává nehybný, jak původně stál. Taková situace se samozřejmě nikdy neobjevuje v přírodě a postrčíme-li předmět na stole, zastaví se. Zastaví se proto, že nebyl ponechán sám sobě – tře se totiž o stůl. Nalezení tohoto zákona vyžadovalo značnou představivost a tu měl právě Galileo.

Abychom se však dostali dále, musíme znát zákon, podle něhož předměty *mění* svou rychlost, jestliže *jsou* něčím ovlivňovány. To udělal Newton. Newton zformuloval tři zákony. První zákon

byl jen opakováním uvedeného Galileova principu setrvačnosti. Druhý zákon určuje, jak se mění rychlost v důsledku různých vlivů nazývaných *silami*. Třetí zákon do určité míry popisuje síly, ale o tomto zákoně budeme hovořit jindy. Nyní si budeme všimnout Newtonova druhého pohybového zákona, který udává, jak síla ovlivňuje pohyb nějakého objektu a říká, že *změna veličiny zvané hybnost za jednotku času je úměrná síle*. Později toto tvrzení stručně matematicky zapíšeme, ale nejprve vysvětlíme jeho podstatu.

*Hybnost* není totéž, co *rychlost*. Ve fyzice používáme mnoho slov a každé z nich má přesný význam, ačkoli v každodenní běžné řeči se takováto přesnost nevyžaduje. Nyní se zamysleme nad definicí hybnosti. Zatlačíme-li rukou na nějaký lehký předmět, snadno ho uvedeme do pohybu. Zatlačíme-li stejně na mnohem těžší předmět, bude se pohybovat mnohem pomaleji. Namísto slov „lehký“ a „těžký“ však musíme používat výrazy *s menší hmotností* a *větší hmotností*, neboť mezi tíhou a setrvačností předmětu je rozdíl, který musíme brát v úvahu. (Jak těžké je uvést předmět do pohybu a jakou má tíhu, to jsou dvě rozdílné věci.) Tíha a setrvačnost jsou *úměrné* a na zemském povrchu je často považujeme za číselně stejné, a právě to vyvolává u některých studentů rozpaky. Na Marsu by se tíha předmětů lišila od jejich tíhy na Zemi, ale množství síly potřebné na překonání setrvačnosti by se nezměnilo.

Termín *hmotnost* používáme jako kvantitativní míru setrvačnosti. Hmotnost můžeme měřit například tak, že zavěšeným předmětem budeme kroužit určitou rychlostí a budeme měřit sílu, která je potřebná k jeho udržení v otáčivém pohybu. Takovýmto způsobem můžeme každému předmětu přisoudit určitou hmotnost. *Hybnost* předmětu je součinem dvou faktorů: jeho *hmotnosti* a jeho *rychlosti*. Druhý Newtonův zákon je proto možné zapsat v matematickém tvaru

$$F = \frac{d}{dt} (mv). \quad (9.1)$$

K tomu je třeba uvést několik poznámek. Při zápisu takového zákona se opíráme o mnoho intuitivních myšlenek, náznaků a předpokladů, jež v prvním stádiu zkombinujeme přibližně do našeho „zákona“. Později se můžeme vrátit zpět a detailně zvážit význam každého členu. Pokusíme-li se však o to příliš brzy, můžeme se dostat do rozpaků. Proto budeme pro začátek považovat některé věci za samozřejmé. Budeme předpokládat, že hmotnost předmětu je *konstantní*. Hmotnost ve skutečnosti konstantní není, ale začneme s Newtonovou aproximací konstantní, po celou dobu neměnné hmotnosti a dále budeme předpokládat, že předmět vytvořený složením dvou předmětů má hmotnost rovnou *součtu* jejich hmotností. Newton při sestavování své rovnice z těchto předpokladů vycházel, vždyť jinak by jeho rovnice neměla smysl. Představme si třeba, že hmotnost se mění nepřímo úměrně rychlosti. Pak by se hybnost *za žádných okolností neměnila*. Zákon má smysl jen tehdy, když víme, jak se hmotnost mění s rychlostí. Proto zatím předpokládáme, že hmotnost *se nemění*.

Dále si musíme podrobněji všimnout *síly*. V hrubé představě ji považujeme za zatlačení nebo zatáhnutí, které provedou naše svaly, ale když máme k dispozici pohybový zákon, můžeme sílu definovat přesněji. Nejdůležitější co si musíme uvědomit, je skutečnost, že tento zákon nezahrnuje jen změny *velikosti* hybnosti nebo rychlosti, ale i změny jejich *směru*. Je-li hmotnost konstantní, rovnici (9.1) je možné napsat ve tvaru

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma. \quad (9.2)$$

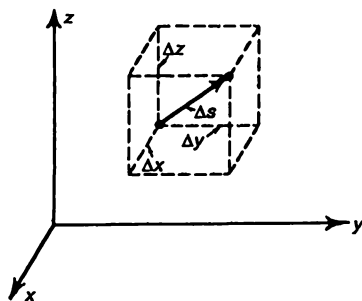
*Zrychlení*  $a$  představuje změnu rychlosti za jednotku času a Newtonův druhý pohybový zákon říká více než to, že účinek síly se mění nepřímo úměrně hmotnosti. Říká i, že *směr* změny rychlosti a *směr* síly jsou shodné. Proto si musíme uvědomit, že změna rychlosti, neboli zrychlení, má širší význam než v hovorové řeči. Rychlost pohybujícího se předmětu se může měnit tak, že se jeho pohyb zrychluje, zpomaluje, nebo se mění směr pohybu. Zrychlení kolmé na směr rychlosti jsme uvažovali v kapitole 7. Tam jsme viděli, že předmět pohybující se po kružnici s poloměrem  $R$  rychlostí  $v$  se vychyluje od přímočaré dráhy o vzdálenost  $1/2 (v^2/R) t^2$ , je-li  $t$  velmi malé. Proto vztah pro zrychlení kolmé na směr pohybu je

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (9.3)$$

Síla působící ve směru kolmém k rychlosti vyvolá proto pohyb předmětu po zakřivené dráze, jejíž poloměr křivosti můžeme získat tak, že sílu dělíme hmotností předmětu (tak dostaneme zrychlení) a pak použijeme vztah (9.3).

## 9.2 SMĚR A VELIKOST RYCHLOSTI

Abychom upřesnili náš jazyk, musíme se hlouběji zamyslet nad pojmem *rychlost*. V hovorové řeči se se slovem rychlost setkáváme často. Takto používaný pojem má však chudší obsah než pojem *rychlost* používaný ve fyzice.



Obr. 9.1 Malé posunutí předmětu

Rychlost jako fyzikální veličina znamená určitou velikost, tj. jistý počet metrů za sekundu, ale i směr, v němž se uskutečňuje pohyb, zatímco v hovorové řeči znamená jen velikost. Matematicky můžeme vystihnout velikost i směr rychlosti, určíme-li, jak se souřadnice  $x$ ,  $y$ ,  $z$  daného předmětu mění s časem. Nechť se například v určitém časovém okamžiku předmět pohybuje tak, jak je znázorněno na obr. 9.1. V malém časovém intervalu  $\Delta t$  urazí jistou vzdálenost  $\Delta x$  ve směru osy  $x$ ,  $\Delta y$  ve směru  $y$  a  $\Delta z$  ve směru osy  $z$ . Výsledkem těchto tří změn souřadnic je posunutí  $\Delta s$  podél úhlopříčky rovnoběžnostěnu se stranami  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Posunutí  $\Delta x$  je součin  $x$ -ové složky rychlosti a intervalu  $\Delta t$  a podobné vztahy platí pro  $\Delta y$ ,  $\Delta z$

$$\Delta x = v_x \Delta t, \quad \Delta y = v_y \Delta t, \quad \Delta z = v_z \Delta t. \quad (9.4)$$

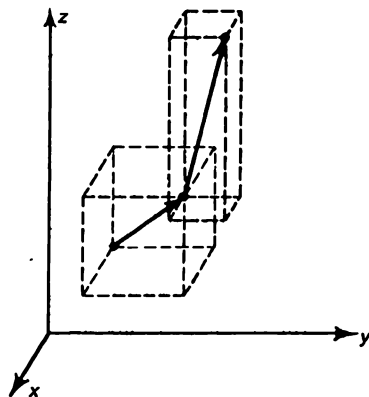
### 9.3 SLOŽKY RYCHLOSTI, ZRYCHLENÍ A SÍLY

Vztah (9.4) představuje rozklad rychlosti na složky, které nám udávají, jak rychle se předmět pohybuje ve směru osy  $x$ ,  $y$ , a  $z$ . Velikost i směr rychlosti budou plně určeny, udáme-li číselné hodnoty jejich tří kolmých složek

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (9.5)$$

Přitom velikost rychlosti předmětu je

$$\frac{ds}{dt} = |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (9.6)$$



Obr. 9.2 Změna rychlosti, při níž se mění její velikost i směr

Nyní předpokládejme, že působením síly mění rychlost svůj směr a velikost tak, jak je to znázorněno na obr. 9.2. Tuto zdánlivě složitou situaci vyřešíme poměrně snadno, určíme-li změny složek rychlosti. Změna složky rychlosti ve směru osy  $x$  za čas  $\Delta t$  je  $\Delta v_x = a_x \Delta t$ , přičemž  $a_x$  je  $x$ -ová složka zrychlení. Podobně je  $\Delta v_y = a_y \Delta t$ ,  $\Delta v_z = a_z \Delta t$ . Vidíme, že Newtonův druhý pohybový zákon tím, že hovoří o shodnosti směru síly a zrychlení, představuje vlastně tři zákony. Každá ze složek síly ve směrech  $x$ ,  $y$ ,  $z$  je totiž rovna součinu hmotnosti a časové změny odpovídající složky rychlosti.

$$\begin{aligned} F_x &= m \left( \frac{dv_x}{dt} \right) = m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right) = ma_x, \\ F_y &= m \left( \frac{dv_y}{dt} \right) = m \left( \frac{d^2y}{dt^2} \right) = ma_y, \\ F_z &= m \left( \frac{dv_z}{dt} \right) = m \left( \frac{d^2z}{dt^2} \right) = ma_z. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Podobně jako rychlost a zrychlení je možné i sílu rozložit na složky promítnutím úsečky rovné absolutní hodnotě síly a ukazující směr působení síly na souřadnicové osy  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos(\alpha, F) \\ F_y &= F \cos(\beta, F) \\ F_z &= F \cos(\gamma, F). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Pod  $F$  rozumíme velikost síly a  $(\alpha, F)$  představuje úhel, jenž svírá osa  $x$  se směrem síly atd.

Rovnice (9.7) představují úplnou podobu Newtonova druhého pohybového zákona. Známe-li síly působící na předmět a rozložíme je na jednotlivé složky, můžeme z těchto rovnic určit pohyb předmětu. Uvažujme jednoduchý příklad. Necht' ve směrech  $y$  a  $z$  nepůsobí síly. Jediná síla necht' působí například vertikálně ve směru osy  $x$ . Vztah (9.7) říká, že rychlost se bude měnit jen ve vertikálním směru a v horizontálním směru bude zůstávat stálá. To jsme již viděli v případě speciálního zařízení ze sedmé kapitoly (obr. 7.3). Padající těleso se pohybuje tak, že jeho horizontální pohyb se nemění a ve vertikálním směru se pohyb uskutečňuje tak, jako kdyby horizontální pohyb neexistoval. Jinak řečeno, pohyby ve směrech  $x$ ,  $y$ ,  $z$  jsou nezávislé, jsou-li složky sil vzájemně nezávislé.

## 9.4 CO JE TO SÍLA?

Chceme-li využít Newtonovy zákony, musíme znát matematické vyjádření síly; Newtonovy zákony totiž takřka jíc *zaměřují naši pozornost na síly*. Pohybuje-li se předmět zrychleně, musí na něj něco působit a my musíme toto působení odhalit. Naším budoucím programem v dynamice bude *hledání zákonů platných pro síly*. Sám Newton nám poskytl několik příkladů. Objevil zákon síly všeobecné gravitace. V případě jiných sil nám poskytl alespoň částečnou informaci prostřednictvím svého třetího zákona, který budeme studovat v další kapitole a který hovoří o rovnosti akce a reakce.

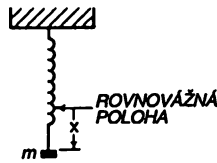
Rozšířme náš předcházející příklad a zajímejme se o síly působící na předmět v blízkosti zemského povrchu. U Země je síla ve vertikálním směru, způsobovaná přitažlivostí, úměrná hmotnosti předmětu a je téměř nezávislá na výšce, jde-li o výšky malé ve srovnání se zemským poloměrem  $R$ . Tato síla je rovna  $F = \kappa m M / R^2 = mg$ , kde  $g = \kappa M / R^2$  se nazývá *gravitační zrychlení*. Gravitační zákon nám tedy říká, že tíha je úměrná hmotnosti; tato síla má vertikální směr a je rovna součinu hmotnosti a gravitačního zrychlení. Opět zjišťujeme, že v horizontálním směru jde o pohyb s konstantní rychlostí. Zajímavým pohybem je právě pohyb ve vertikálním směru a pro tento pohyb vyplývá z druhého Newtonova zákona

$$mg = m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right). \quad (9.9)$$

Vykrátíme-li  $m$ , zjistíme, že zrychlení ve směru  $x$  je konstantní a je rovno  $g$ . To je známý zákon volného pádu pod vlivem gravitace, který vyjadřují rovnice

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 + gt \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} gt^2. \end{aligned} \quad (9.10.)$$





Obr. 9.3 Závaží na pružině

Nyní si všimněme dalšího příkladu. Předpokládejme, že jsme schopni zkonstruovat zařazení (obr. 9.3), jež vyvolává sílu úměrnou výchylce od rovnováhy a směřující proti této výchylce. Takovým zařazením je pružina. Nebudeme si všímat gravitace, jež je vykompenzována počátečním napnutím pružiny, ale budeme se zajímat jen o *nadbytečné* síly. Pak zjistíme, že taháme-li závaží směrem dolů, pružina ho zvedá, a tlačíme-li závaží nahoru, pružina ho tlačí dolů. Zařazení bylo pečlivě navrženo tak, aby síla byla tím větší, čím více stlačíme závaží nahoru, a to přesně přímo úměrně výchylce od rovnovážné polohy, a podobně nahoru působící síla je úměrná našemu vychýlení závaží směrem dolů. Při sledování dynamiky tohoto zařazení vidíme zajímavý pohyb: nahoru, dolů, nahoru, dolů... Vzniká otázka, zda Newtonovy rovnice popisují tento pohyb správně. Zkusme přesně vypočítat takovýto periodický pohyb pomocí Newtonova zákona (9.7). V našem případě máme

$$-kx = m \left( \frac{dv_x}{dt} \right). \quad (9.11)$$

Jde o situaci, kdy se rychlost ve směru osy  $x$  mění úměrně výchylce  $x$ . Nemá smysl teď pracovat s tolika konstantami, a tak si situaci zjednodušíme předpokladem, že se buď změnilo časové měřítko, nebo se změnily jiné jednotky, takže shodou okolností  $k/m = 1$ . Pak dostaneme

$$\frac{dv_x}{dt} = -x. \quad (9.12)$$

Abychom mohli pokračovat, musíme zjistit, co je to  $v_x$ ; jenže my už víme, že je to rychlost změny polohy v čase.

## 9.5 SMYSL DYNAMICKÝCH ROVNIC

Pokusme se nyní zjistit, co znamená rovnice (9.12). Necht' v daném časovém okamžiku  $t$  má předmět určitou rychlost  $v_x$  a polohu  $x$ . Jaká bude jeho rychlost a poloha v trochu pozdějším okamžiku  $t + \varepsilon$ ? Dokážeme-li odpovědět na tuto otázku, vyřešíme náš problém, neboť vycházíme-li z daných počátečních podmínek, dokážeme určit změny v prvním okamžiku, pak v dalším a dalším a postupně určíme celý vývoj pohybu. Kvůli konkrétnosti předpokládejme, že v čase  $t = 0$  je  $x = 1$  a  $v_x = 0$ . Proč se předmět vůbec pohybuje? Protože na něj v kterékoli poloze s výjimkou  $x = 0$  působí síla. Je-li  $x > 0$ , působí síla směrem nahoru. Proto rychlost, která byla zpočátku nulová, se bude v souladu s pohybovým zákonem měnit. Jakmile začne rychlost růst, předmět se začíná pohybovat nahoru. V libovolném časovém okamžiku  $t$  můžeme při velmi malém  $\varepsilon$  vyjádřit polohu v čase  $t + \varepsilon$  pomocí polohy a rychlosti v čase  $t$  s dostatečnou přesností následujícím způsobem

$$x(t + \varepsilon) = x(t) + \varepsilon v_x(t). \quad (9.13)$$

Čím je  $\varepsilon$  menší, tím přesnější je tento výraz, ale i tehdy, kdy  $\varepsilon$  není zanedbatelně malé, je tento výraz ještě přijatelně přesný. Co je možné nyní říci o rychlosti? Abychom mohli stanovit rychlost v čase  $t + \varepsilon$ , musíme zjistit, jak se rychlost mění, tj. musíme zjistit *zrychlení*. Jak najdeme zrychlení? V tom nám pomohou zákony dynamiky. Podle nich je zrychlení v naší úloze rovno

-  $x$ <sup>17)</sup>  
Proto

$$v_x(t + \varepsilon) = v_x(t) + \varepsilon a_x(t) \quad (9.14)$$

$$= v_x(t) - \varepsilon x(t). \quad (9.15)$$

Rovnice (9.14) je jen kinematická a říká, že rychlost se mění v důsledku přítomnosti zrychlení. Rovnice (9.15) je však dynamická, neboť dává do souvislosti zrychlení a sílu. Poukazuje na to, že v daném časovém okamžiku můžeme v naší konkrétní úloze nahradit zrychlení výrazem  $-x(t)$ . Známe-li tedy v daném čase  $x$  i  $v$ , známe i zrychlení, jež nám umožní určit novou rychlost a novou polohu. Takto pracuje dynamický mechanismus. Rychlost se trochu změní v důsledku působení síly a i poloha se trochu změní v důsledku rychlosti.

## 9.6 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ROVNIC

Pusťme se nyní do skutečného řešení naší úlohy. Zvolíme třeba  $\varepsilon = 0,100$  sekundy. Provedeme-li všechny výpočty a uvidíme, že  $\varepsilon$  nebylo dost malé, můžeme se vrátit a výpočty provádět s  $\varepsilon = 0,010$  s. Ptáme se, jaké je  $x(0,1)$ , vycházíme-li z počáteční hodnoty  $x(0) = 1,00$ . Bude rovno původní poloze  $x(0)$  zvětšené o rychlost (která je nulová) násobenou  $0,10$  s. Proto je  $x(0,1)$  stále rovno  $1,00$ , neboť pohyb ještě nezačal. Nová rychlost v čase  $0,10$  s bude rovna původní rychlosti  $v(0) = 0$  zvětšené o součin  $\varepsilon$  a zrychlení. Zrychlení je  $-x(0) = -1,00$ . Je tedy

$$v(0,1) = 0,00 - 0,10 \cdot 1,00 = -0,10.$$

V čase  $0,20$  s máme

$$\begin{aligned} x(0,2) &= x(0,1) + \varepsilon v(0,1) \\ &= 1,00 - 0,10 \cdot 0,10 = 0,99 \end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned} v(0,2) &= v(0,1) + \varepsilon a(0,1) \\ &= -0,10 - 0,10 \cdot 1,00 = -0,20. \end{aligned}$$

V tomto procesu můžeme pokračovat, a tak vypočítat celý pohyb, což je naším úkolem. V praxi však používáme určité triky, které nám umožní zvětšit přesnost. Kdybychom pokračovali v začatém postupu, získali bychom jen přibližný obraz o pohybu, neboť  $\varepsilon = 0,100$  s je jen velmi hrubý krok. Pro zvýšení přesnosti bychom museli zvolit velmi malý interval, např.  $0,01$ . Abychom tak prošli dostatečně dlouhý časový interval, museli bychom provést velké množství početních cyklů. Práci si proto zorganizujeme tak, abychom zvýšili přesnost výpočtu při původním intervalu  $\varepsilon = 0,10$  s. Toho lze dosáhnout rafinovaným zlepšením metody analýzy.

<sup>17)</sup> V námi zvolených jednotkách. (Pozn. red.)

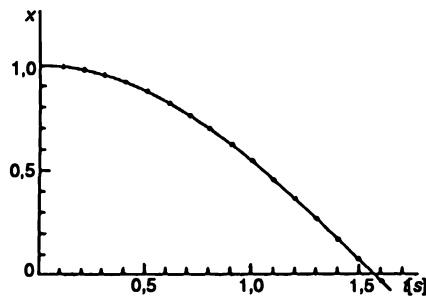
Všiměme si, že nová poloha je vlastně stará poloha zvětšená o součin intervalu a rychlosti. *Jakému časovému okamžiku však přísluší tato rychlost? Na začátku a na konci časového intervalu máme jiné rychlosti. Naše zlepšení bude spočívat v tom, že vezmeme rychlost ze středu intervalu.* Známe-li původní rychlost, jež se mění, pak nemůžeme dostat správnou odpověď, když počítáme jen s původní rychlostí. Musíme proto použít jakousi střední rychlost mezi začátkem a koncem intervalu. Stejně úvahy platí i pro rychlost: Abychom určili změny rychlosti, musíme použít zrychlení v čase odpovídajícím středu mezi dvěma časovými okamžiky, v nichž rychlost určujeme. Proto rovnice, které budeme používat, budou následující: Pozdější poloha je rovna předcházející poloze zvětšené o  $\varepsilon$ -násobek rychlosti v čase, jenž leží ve středu intervalu. Podobně rychlost v tomto středním bodě je rychlost v čase o  $\varepsilon$  menším (to je střed předcházejícího intervalu) zvětšená o  $\varepsilon$ -násobek zrychlení v čase  $t$ .

Používáme tedy rovnice

$$x(t + \varepsilon) = x(t) + \varepsilon v\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad v\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) = v\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \varepsilon a(t), \quad a(t) = -x(t). \quad (9.16)$$

Zbývá již jen jeden malý problém: co je  $v(\varepsilon/2)$ ? Na začátku jsme měli  $v(0)$  a ne  $v(-\varepsilon/2)$ . Abychom mohli zahájit výpočet, použijeme doplňující rovnici  $v(\varepsilon/2) = v(0) + (\varepsilon/2) a(0)$ .

Teď již máme k výpočtu vše připraveno. Je vhodné použít zápis výpočtu v podobě tabulky se sloupci pro čas, polohu, rychlost a zrychlení, s posunutými řádky pro rychlost, jak to znázorňuje *tab. 9.1*. Taková tabulka je samozřejmě, jedním z vhodných způsobů zápisu výsledků z rovnic (9.16) a tyto rovnice vlastně zcela nahrazuje. Zaplníme postupně její jednotlivá místa údaji.



Obr.9.4 Graf pohybu závaží na pružině

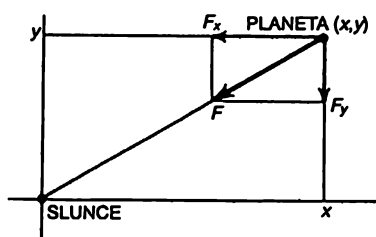
Tabulka nám poskytuje velmi dobrou představu o pohybu: Pohyb začíná z klidu, pak závaží získává malou rychlost směrem nahoru (zápornou) a zmenšuje se vzdálenost od rovnovážné polohy. Zrychlení je pak sice trochu menší, ale ještě stále se zvyšuje rychlost. Rychlost se však zvyšuje stále méně a méně, až při přechodu bodem  $x = 0$  přibližně v čase  $t = 1,5$  s (to vám mohu prozradit) dojde k opačnému pohybu: poloha  $x$  bude záporná a zrychlení tedy kladné. Rychlost se zmenšuje. Bude zajímavé porovnat údaje v tabulce s funkcí  $x = \cos t$ . Takové porovnání najdete na *obr. 9.4*. Je vidět shoda s našimi výpočty s přesností na tři platné číslice! Později uvidíme, že  $x = \cos t$  je přesné matematické řešení naší pohybové rovnice. Uvedený postup ukazuje sílu numerické analýzy, která takovým jednoduchým výpočtem poskytla přesné výsledky.

Tabulka 9.1 Řešení rovnice  $dv_x/dt = -x$ Interval:  $\varepsilon = 0,10$  s

$t$	$x$	$v_x$	$a_x$
0,0	1,000	0,000	-1,000
0,1	0,995	-0,050	-0,995
0,2	0,980	-0,150	-0,980
0,3	0,955	-0,248	-0,955
0,4	0,921	-0,343	-0,921
0,5	0,877	-0,435	-0,877
0,6	0,825	-0,523	-0,825
0,7	0,764	-0,605	-0,764
0,8	0,696	-0,682	-0,696
0,9	0,621	-0,751	-0,621
1,0	0,540	-0,814	-0,540
1,1	0,453	-0,868	-0,453
1,2	0,362	-0,913	-0,362
1,3	0,267	-0,949	-0,267
1,4	0,169	-0,976	-0,169
1,5	0,070	-0,993	-0,070
1,6	-0,030	-1,000	+0,030

## 9.7 POHYB PLANET

Předcházející analýza je velmi vhodná k popisu kmitajících struny. Nás však zajímá, zda je takto možné analyzovat i pohyb planet kolem Slunce. Zjistíme, zda je možné v jistém přiblížení dospět k eliptické oběžné dráze. Budeme předpokládat, že Slunce je nekonečně těžké v tom smyslu, že nemusíme uvažovat jeho pohyb. Dále předpokládáme, že planeta začala svůj pohyb na určitém místě a pohybuje se určitou rychlostí kolem Slunce po nějaké křivce. Pomocí Newtonových pohybových zákonů a gravitačního zákona se pokusíme zjistit, jaká je to křivka. Jak to provedeme? V daném okamžiku je planeta v určitém bodě v prostoru. Označíme-li  $r$  radiální vzdálenost od Slunce k tomuto bodu, pak víme, že na planetu působí síla směřující ke Slunci, která je podle gravitačního zákona rovna konstantě násobené součinem hmotností Slunce a planety a dělené druhou mocninou jejich vzdálenosti. K dalším úvahám potřebujeme vědět, jaké zrychlení vyvolává tato síla. Potřebujeme znát složky zrychlení ve dvou směrech, jimiž vedeme osy  $x$  a  $y$  (počátek umístíme v Slunci). Poloha planety v daném okamžiku je určena souřadnicemi  $x$  a  $y$  (o souřadnici  $z$  předpokládáme, že je stále nulová, neboť v tom směru nepůsobí žádná síla, a jestliže počáteční rychlost  $v_z$  byla nulová, není důvod, aby se souřadnice změnila). Gravitační síla směřuje podél spojnice planety a Slunce, jak je vidět na *obr. 9.5*.



Obr. 9.5 Gravitační síla působící na planetu

Z uvedeného obrázku je vidět, že horizontální složka síly souvisí s celkovou silou stejným způsobem, jakým horizontální souřadnice  $x$  souvisí s celkovou délkou přepony  $r$ , neboť příslušné trojúhelníky jsou podobné. Dále, je-li  $x$  kladné, bude  $F_x$  záporné. Je  $F_x/|F| = -x/r$ , tedy  $F_x = -|F| x/r = -\kappa M m x / r^3$ . Využijme nyní dynamického zákona (9.7), z něhož vyplývá, že  $x$ -ová nebo  $y$ -ová složka zrychlení násobená hmotností planety je rovna  $x$ -ové resp.  $y$ -ové složce síly. Tak dostaneme rovnice

$$m \left( \frac{dv_x}{dt} \right) = - \frac{\kappa M m x}{r^3},$$

$$m \left( \frac{dv_y}{dt} \right) = - \frac{\kappa M m y}{r^3}, \quad (9.17)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tuto soustavu rovnic musíme řešit. Abychom si zjednodušili numerický výpočet, budeme opět předpokládat, že jednotka času nebo hmotnost Slunce jsou vybrány tak (nebo máme takové štes-

tí), že  $\kappa M = 1$ . V našem případě budeme předpokládat, že počáteční poloha planety je  $x = 0,500$ ,  $y = 0,000$  a počáteční rychlost je ve směru osy  $y$  a je rovna  $1,6300$ . Jak provedeme výpočet? Opět si sestavíme tabulku se sloupci pro čas,  $x$ -ovou souřadnici,  $x$ -ovou složku rychlosti  $v_x$  a  $x$ -ovou složku zrychlení  $a_x$ ; pak následují tři sloupce oddělené dvojitou čarou pro souřadnici, rychlost a zrychlení v  $y$ -ovém směru. K získání zrychlení budeme potřebovat rovnice (9.17), z nichž zjistíme, že zrychlení má složky  $-x/r^3$  a  $-y/r^3$ , přičemž  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Známe-li tedy hodnoty  $x$  a  $y$ , musíme někde stranou provést malý výpočet, tj. najít odmocninu ze součtu druhých mocnin, tak najít  $r$  a pak počítat příslušná zrychlení. Je užitečné určit i  $1/r^3$ . Takovýto výpočet je poměrně jednoduchý – stačí použít tabulku druhých a třetích mocnin a převrácených hodnot; pak už potřebujeme jen  $x$  násobit  $1/r^3$ , což provedeme pomocí logaritmického pravítka.<sup>18)</sup>

Postup našeho výpočtu je pak následující: Zvolíme si časový interval  $\varepsilon = 0,100$ . Počáteční hodnoty v čase  $t = 0$  jsou

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0,500 & y(0) = 0,000 \\ v_x(0) = 0,000 & v_y(0) = +1,630 \end{array}$$

Odtud najdeme

$$r(0) = 0,500 \quad \frac{1}{r^3}(0) = 8,000$$

$$a_x = -4,000 \quad a_y = 0,000$$

Pak můžeme vypočítat složky rychlosti  $v_x(0,05)$  a  $v_y(0,05)$

$$\begin{array}{l} v_x(0,05) = 0,000 - 4,000 \cdot 0,050 = -0,200 \\ v_y(0,05) = 1,630 + 0,000 \cdot 0,100 = 1,630 \end{array}$$

Nyní začíná náš hlavní výpočet

$$\begin{array}{l} x(0,1) = 0,500 - 0,20 \cdot 0,1 = 0,480 \\ y(0,1) = 0,0 + 1,63 \cdot 0,1 = 0,163 \\ r = \sqrt{0,480^2 + 0,163^2} = 0,507 \\ 1/r^3 = 7,67 \\ a_x(0,1) = -0,480 \cdot 7,67 = -3,68 \\ a_y(0,1) = -0,163 \cdot 7,67 = -1,256 \\ v_x(0,15) = -0,200 - 3,68 \cdot 0,1 = -0,568 \\ v_y(0,15) = 1,630 - 1,26 \cdot 0,1 = -1,505 \\ x(0,2) = 0,480 - 0,568 \cdot 0,1 = 0,423 \\ y(0,2) = 0,163 + 1,50 \cdot 0,1 = 0,313 \text{ atd.} \end{array}$$

Takovým způsobem získáme hodnoty uvedené v *tab. 9.2* a přibližně ve dvaceti krocích vystopujeme polovinu dráhy planety kolem Slunce. Na *obr. 9.6* jsou zakresleny  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice z *tab. 9.2*. Tečky představují polohy v posloupnosti časů vzdálených o desetinu zvolené časové jednotky. Je vidět, že na počátku se planeta pohybuje rychleji, na konci pomaleji a je zřejmý i tvar křivky. Vidíme tedy, že opravdu umíme počítat pohyb planet!

<sup>18)</sup> Starší generace fyziků nostalgicky vzpomínají na doby, kdy ještě nebyly k dispozici ani obyčejné kalkulačky (pozn. red.).

NEWTONOVY ZÁKONY DYNAMIKY

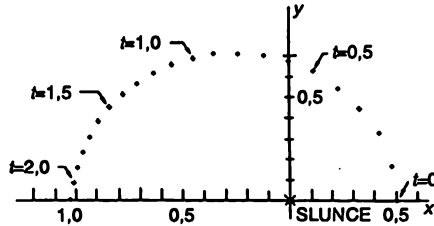
Tabulka 9.2 Řešení soustavy rovnic  $dv_x/dt = -x/r^3$ ;  $dv_y/dt = -y/r^3$ ;  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 Interval:  $\varepsilon = 0,100$       Orbita  $v_y = 1,63$ ,  $v_x = 0$ ,  $x = 0,5$ ,  $y = 0$  v okamžiku  $t = 0$

$t$	$x$	$v_x$	$a_x$	$y$	$v_y$	$a_y$	$r$	$1/r^3$
0,0	0,500		-4,00	0,000		0,00	0,500	8,000
		-0,200			1,630			
0,1	0,480	-0,568	-3,68	0,163	1,505	-1,25	0,507	7,675
0,2	0,423	-0,859	-2,91	0,313	1,290	-2,15	0,526	6,873
0,3	0,337	-1,055	-1,96	0,442	1,033	-2,57	0,556	5,824
0,4	0,232	-1,166	-1,11	0,545	0,771	-2,62	0,592	4,81
0,5	0,115		-0,453	0,622		-2,45	0,633	3,942
		-1,211			0,526			
0,6	-0,006	-1,209	+0,020	0,675	0,306	-2,20	0,675	3,252
0,7	-0,127	-1,175	+0,344	0,706	0,115	-1,91	0,717	2,712
0,8	-0,245	-1,119	+0,562	0,718	-0,049	-1,64	0,758	2,296
0,9	-0,357	-1,048	+0,705	0,713	-0,190	-1,41	0,797	1,975
1,0	-0,462		+0,796	0,694		-1,20	0,834	1,723
		-0,968			-0,310			
1,1	-0,559	-0,882	+0,858	0,663	-0,412	-1,02	0,867	1,535
1,2	-0,647	-0,792	+0,90	0,622	-0,499	-0,86	0,897	1,385
1,3	-0,726	-0,700	+0,92	0,572	-0,570	-0,72	0,924	1,267
1,4	-0,796	-0,607	+0,93	0,515	-0,630	-0,60	0,948	1,173
1,5	-0,857		+0,94	0,452		-0,50	0,969	1,099
		-0,513			-0,680			
1,6	-0,908	-0,418	+0,95	0,384	-0,720	-0,40	0,986	1,043
1,7	-0,950	-0,323	+0,95	0,312	-0,751	-0,31	1,000	1,000
1,8	-0,982	-0,288	+0,95	0,237	-0,773	-0,23	1,010	0,970
1,9	-1,005	-0,113	+0,95	0,160	-0,778	-0,15	1,018	0,948
2,0	-1,018		+0,96	0,081		-0,08	1,021	0,939
		-0,037			-0,796			
2,1	-1,022	+0,058	+0,95	0,001	-0,796	0,00	1,022	0,936
2,2	-1,016		+0,96	-0,079		+0,07	1,019	0,945
2,3					-0,789			

Trajektorie protíná osu  $x$  v okamžiku  $t = 2,101$  s; perioda oběhu je 4,20 s;  $v_x = 0$  v okamžiku  $t = 2,086$  s.

Trajektorie vytíná na ose  $x$  úsek  $x = 1,022$ ; délka hlavní poloosy je rovna  $(1,022 + 0,500)/2 = 0,761$ ;  $v_y = 0,796$ .

Předpokládaná doba polovičního oběhu  $\pi (0,761)^{3/2} = \pi (0,663) = 2,082$ .



Obr. 9.6 Vypočítaný pohyb planety kolem Slunce

Nyní si ukážeme, jak je možné vypočítat pohyb Neptunu, Jupiteru, Uranu nebo kterékoli jiné planety. Je možno provést výpočty pro velké množství planet, bereme-li v úvahu i pohyb Slunce? Samozřejmě, že ano. Vypočítáme sílu působící na zvolenou planetu, např. na  $i$ -tou planetu, jež má polohu  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1$  může představovat Slunce,  $i = 2$  Merkur,  $i = 3$  Venuši atd.). Musíme znát polohy všech planet. Síla působící na jednu planetu je výsledkem vlivu všech ostatních těles, která se nacházejí v polohách  $x_j, y_j, z_j$ . Tak získáme rovnice.

$$m_i \frac{d v_{ix}}{d t} = \sum_{j=1}^N - \frac{x m_i m_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^3},$$

$$m_i \frac{d v_{iy}}{d t} = \sum_{j=1}^N - \frac{y m_i m_j (y_i - y_j)}{r_{ij}^3}, \quad (9.18)$$

$$m_i \frac{d v_{iz}}{d t} = \sum_{j=1}^N - \frac{z m_i m_j (z_i - z_j)}{r_{ij}^3}.$$

Pod  $r_{ij}$  rozumíme vzdálenost mezi dvěma planetami  $i$  a  $j$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \quad (9.19)$$

Symbol  $\Sigma$  označuje součet přes všechny hodnoty  $j$  – všechna ostatní tělesa, samozřejmě kromě  $j = i$ . Všechno, co musíme udělat, je vytvořit *mnohem* více sloupců. Potřebujeme devět sloupců pro pohyb Jupiteru, devět pro pohyb Saturnu atd. Jsou-li dány všechny počáteční polohy a rychlosti, můžeme z rovnic (9.18) vypočítat všechna zrychlení, přičemž nejdříve pomocí vztahu (9.19) vypočteme všechny vzdálenosti. Jak dlouho nám takový výpočet potrvá? Budeme-li ho provádět doma, zabere velmi mnoho času. Dnes však máme stroje, jež to provedou velmi rychle.



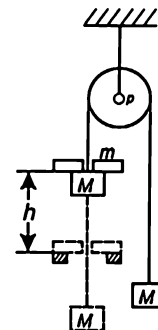
## NEWTONOVY ZÁKONY DYNAMIKY

Dobrému počítači trvá sčítání 1 mikrosekundu, tj. 1 milióntinu sekundy. Násobení trvá déle, asi 10 mikrosekund. Může se stát, že v jednom výpočetním cyklu nějaké úlohy budeme mít asi 30 násobení a takový cyklus pak potrvá 300 mikrosekund. Pak můžeme za jednu sekundu provést 3000 výpočetních cyklů. Kdybychom chtěli pracovat s přesností na jednu miliardtinu, potřebovali bychom  $4 \cdot 10^5$  cyklů k pokrytí jednoho oběhu planety kolem Slunce. To odpovídá výpočetnímu času 130 sekund, tedy asi dvěma minutám. Touto metodou tedy můžeme vypočítat pohyb Jupiteru kolem Slunce s přesností na jednu miliardtinu při uvážení vlivu všech ostatních planet za pouhé dvě minuty! (Ukazuje se, že chyba ve výpočtech je přibližně úměrná druhé mocnině intervalů  $\varepsilon$ . Zmenšíme-li interval na tisícinu, zvětší se přesnost milionkrát. Pro zajištění námi požadované přesnosti musíme vzít interval 10 000-krát menší.)

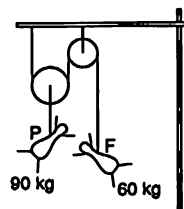
Na začátku této kapitoly jsme nevěděli ani to, jak vypočítat pohyb závaží na pružině. Nyní, vyzbrojeni takovým úžasným pomocníkem, jakým jsou Newtonovy zákony, dokážeme vypočítat nejen tak jednoduchý pohyb, ale pomocí počítače, který za nás provede aritmetické výpočty, i velmi složité pohyby planet s takovým stupněm přesnosti, jaký požadujeme.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

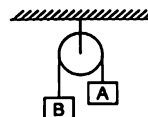
- 9.1 ■ Částice o hmotnosti  $m$  se pohybuje v oblasti prostoru, kde na ni působí síla  $F = kv$  úměrná rychlosti částice  $v$ , kde  $k$  je koeficient úměrnosti, kolmá současně k vektoru rychlosti a k ose  $z$ . V počátečním okamžiku je rychlost částice  $v_0$  a její vektor leží v rovině  $x, y$ . Ukažte, že se částice pohybuje po kruhové trajektorii a najděte poloměr této trajektorie.
- 9.2 ■ Najděte poloměry křivosti trajektorie na obrázku 9.6 v okamžicích  $t = 0$  s,  $t = 0,82$  s a  $t = 2,086$  s.
- 9.3 ■ Chlapec hází míč do výšky pod úhlem  $70^\circ$  k vodorovnému směru a trefuje se přímo do otevřeného okna, jež leží 9,6 m nad chlapcovým ramenem. Míč vletí do okna vodorovně.  
a) Jakou rychlostí vyletěl míč z ruky?  
b) Čemu je roven poloměr křivosti trajektorie míče v okamžiku, když vletá do okna? Mohli byste určit poloměr křivosti trajektorie v libovolném okamžiku letu míče?
- 9.4 ■ Dva odborníci v kosmické fyzice, Jim a Joe, kteří vyrostli na různých planetách, se setkali na vědeckém sympoziu meziplanetárního Úřadu pro míry a váhy, jež má schválit univerzální soustavu fyzikálních jednotek. Jim s hrdostí popisuje výhody soustavy SI, kterou používají všichni civilizovaní lidé na Zemi. Joe neméně nadšeně vychvaluje půvaby soustavy SI', kterou používají civilizovaní lidé v celé sluneční soustavě kromě Země. Při přechodu mezi těmito dvěma soustavami se jednotky hmotnosti, délky a času násobí konstantními koeficienty  $\mu$ ,  $\lambda$  a  $\tau$ , takže  $m' = \mu m$ ,  $l' = \lambda l$  a  $t' = \tau t$ . Jakými koeficienty se musí násobit rychlost, zrychlení, síla a energie při přechodu od jedné z těchto soustav k druhé?
- 9.5 ■ Jaký bude vztah mezi číselnými hodnotami gravitační konstanty změřené v jednotkách dvou soustav popsaných v předchozí úloze?
- 9.6 ■ Čemu bude rovna číselná hodnota součinu gravitační konstanty a hmotnosti Slunce  $\times M_S$ , budeme-li měřit vzdálenost v astronomických jednotkách a čas v rocích?
- 9.7 ■ Vyrobité-li si model sluneční soustavy zmenšený  $k$ -krát z materiálů o téže střední hustotě jakou mají planety a Slunce, jak budou záviset oběžné doby planet v našem modelu na faktoru  $k$ ?
- 9.8 ■ Na obrázku je znázorněn jeden z prvních přístrojů k měření zrychlení volného pádu, Atwoodův padostroj. Hmotnosti kladky  $P$  a vláken jsou zanedbatelně malé, pohyb probíhá bez tření. Na obou stranách kladky jsou zavěšena závaží o stejné hmotnosti  $M$  a soustava je v rovnováze. Potom přidáme k jednomu závaží malé závažíčko o hmotnosti  $m$  a toto závaží začne klesat. Když projde vzdálenost  $h$ , závažíčko je odhyceno speciální podložkou a padostroj pokračuje v pohybu konstantní rychlostí  $v$ . Určete zrychlení  $g$  volného pádu, jsou-li známy veličiny  $M$ ,  $m$ ,  $h$  a  $v$ .



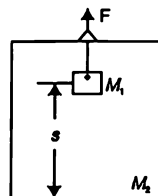
- 9.9 ■ Dva mladí Marťané, Paolo a Francesca, se chtějí nechat převézt přes marťanský kanál Rimini, ale ani jedna gondola je nechce nalodit oba a Marťané zas odmítají se plavit každý v jiné loďce. Vynalézavý gondoliér Giuseppe nakonec najde způsob, jak si vydělat na jejich převozu. Pomocí nehmotných a dokonale hladkých kladek a provazů, které se na Marsu běžně používají, zavěsí zamilovaný pár na stožár podle obrázku. Pak je rychle převezve, dřív než se některý z nich dotkne stožáru nebo paluby. O kolik se přitom Giuseppevi podaří zmenšit zatížení loďky? Připomeňme, že napěťová síla v nehmotném vlákně, klouzajícím bez tření v nehmotné kladce, je stejná po obou stranách kladky.



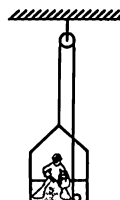
- 9.10 ■ Kosmický cestovatel se chystá k odletu na Měsíc. Má s sebou pružinové váhy a činku  $A$  o hmotnosti  $1\text{ kg}$ , kterou ukazují tyto váhy na povrchu Země. Cestovatel pak přistane v určité oblasti měsíčního povrchu, kde tíhové zrychlení přesně nezná; ví jen, že je přibližně šestkrát menší než na Zemi. Pak najde kámen  $B$ , který na týchž vahách vyvolá údaj  $1\text{ kg}$ . Pak zavěsí činku a kámen pomocí nehmotných vláken přes kladku podle obrázku a zjistí, že kámen klesá se zrychlením  $1,2\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Čemu je rovna hmotnost kamene  $B$ ?



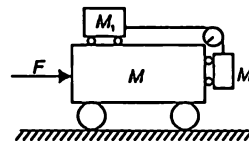
- 9.11 ■ Kabina výtahu má hmotnost  $M_2$ . K jejímu stropu je na vlákně zavěšeno závaží o hmotnosti  $M_1$ , tak, že jeho vzdálenost od podlahy kabiny je  $s$ . Síla velikosti  $F$  táhne výtah vzhůru se zrychlením.
- Najděte zrychlení výtahu.
  - Čemu je rovna napěťová síla vlákna?
  - Vlákně se náhle přetrhlo. Jaké bude zrychlení kabiny a závaží v následujícím okamžiku?
  - Jak dlouho to bude trvat od okamžiku přetržení vlákna do nárazu závaží na podlahu kabiny?



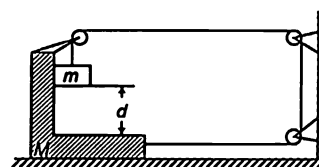
- 9.12 ■ Natěrač o hmotnosti  $72\text{ kg}$  pracuje zavěšen v křesle o hmotnosti  $12\text{ kg}$  (viz obrázek). Potřebuje se rychle zvednout do větší výšky a začne táhnout za provaz takovou silou, že zatěžuje křeslo jen hmotností  $40\text{ kg}$ .
- S jakým zrychlením se pohybuje natěrač s křeslem?
  - Jaké je celkové zatížení kladky?



- 9.13 ■ Podívejte se na obrázek. Jaká stálá vodorovná síla musí působit na vozík  $M$ , aby se závaží  $M_1$  a  $M_2$  vzhledem k vozíku nepohybovala?



- 9.14 ■ V soustavě znázorněné na obrázku všechny plochy po sobě kloužou bez tření. Závažíčko o hmotnosti  $m = 150\text{ g}$  je zavěšeno nad rámečkem ve výšce  $1,2\text{ m}$ . Za jakou dobu projde tuto vzdálenost od okamžiku, kdy mu umožníme pohyb? Hmotnost rámečku je  $M = 1650\text{ g}$ .



9.15 ■ Závaží zavěšené na pružině je v klidu. Po nárazu zdola se začne pohybovat a v prvním okamžiku je jeho rychlost jednotková. Hmotnost závaží a tuhost pružiny jsou takové, že pohybová rovnice má tvar  $\ddot{x} = -x$ . Numerickým integrováním pohybové rovnice najděte maximální výšku, jíž závaží dosáhne.

9.16 ■ Těleso o hmotnosti  $m$  se pohybuje přímočaře. Pohyb je brzděn silou úměrnou rychlosti tělesa,  $F = -kv$ . V počátečním okamžiku  $t = 0$  bylo  $x = 0$  a  $v = v_0$ . Numerickým integrováním najděte  $x$  jako funkci času. Určete dobu  $t_{1/2}$ , za níž těleso ztratí polovinu své rychlosti, a maximální vzdálenost  $x_m$ , kterou projde.

*Poznámky:*

- Zvolte měřítka času a vzdálenosti tak, aby pohybová rovnice měla jednoduché číselné koeficienty.
- Navrhněte schéma výpočtu, analogické uvedenému v textu přednášek, jež by dávalo dobrou přesnost při poměrně hrubém kroku  $\Delta t$ .
- Na základě úvah o rozměrnosti objasněte, jak  $t_{1/2}$  a  $x_m$  závisejí na  $v_0$ ,  $k$  a  $m$ . Pohybovou rovnici řešte jen pro jednu vhodnou hodnotu  $v_0$ , např.  $v_0 = 1$  (v modifikovaných jednotkách  $x$  a  $t$ ).

9.17 ■ Nabitá částice se pohybuje v elektrickém a magnetickém poli podle pohybových rovnic

$$\frac{dv_x}{dt} = -2v_y \text{ a } \frac{dv_y}{dt} = 1 + 2v_x.$$

Při  $t = 0$  je částice v bodě o souřadnicích  $(0,0)$  a její rychlost má složky  $v_x = 1,00$  a  $v_y = 0$ . Numerickým integrováním určete druh pohybu částice. Řiďte se poznámkou b) z předchozí úlohy.

9.18 ■ Mina vyletí z hlavně minometu rychlostí 300 m/s pod úhlem  $45^\circ$  k obzoru. Její pohyb je brzděn silou úměrnou třetí mocnině rychlosti ( $F = -kv^3$ ). Koeficient úměrnosti  $k$  je takový, že při rychlosti 300 m/s je síla odporu prostředí dvakrát větší než tíha miny. Metodou numerického integrování najděte přibližnou hodnotu maximální výšky, do níž mina vyletí, a vzdálenost od místa výstřelu k místu, kde dopadne na zem. Výsledky srovnajte s hodnotami, které byste dostali, kdyby nepůsobil odpor vzduchu.

# Z 10 Zachování hybnosti

---

## 10.1 TŘETÍ NEWTONŮV ZÁKON

## 10.2 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

## 10.3 HYBNOST SE ZACHOVÁVÁ!

## 10.4 HYBNOST A ENERGIE

## 10.5 RELATIVISTICKÁ HYBNOST

### 10.1 TŘETÍ NEWTONŮV ZÁKON

Pomocí druhého Newtonova zákona, jenž dává do souvislosti zrychlení tělesa se silou na ně působící, můžeme principiálně vyřešit jakýkoli problém mechaniky. Například k určení pohybu několika částic můžeme použít numerickou metodu navrženou v předcházející kapitole. Existuje však řada příčin dalšího studia Newtonových zákonů. Především známe zcela jednoduché případy pohybu, jež je možné řešit nejen numericky, ale i přímými metodami matematické analýzy. I když například víme, že zrychlení padajícího tělesa je  $10 \text{ m/s}^2$  a tento poznatek nám umožňuje počítat pohyb numerickými metodami, je mnohem jednodušší a uspokojivější najít pomocí matematické analýzy obecné řešení  $s = s_0 + v_0 t + 5 t^2$ . Stejně tak v případě harmonického oscilátoru jsme dokázali určit polohu numerickou metodou, ale analytickou cestou lze ukázat, že obecným řešením je jednoduchá kosinová funkce času, a nemusíme proto podstoupit všechny aritmetické obtíže, neboť existuje jednoduchý a přesnější způsob získání výsledku. Pohyb jednoho tělesa kolem Slunce, podmiňovaný existencí gravitace, jsme v kapitole 9 počítali bod po bodu numerickým způsobem a získali jsme tak tvar trajektorie. Přesnou analytickou metodou bychom zjistili, že tato trajektorie je dokonalou elipsou.

Naneštěstí existuje jen velmi málo úloh, které lze přesně vyřešit analytickou metodou. Není-li síla pružiny v případě harmonického oscilátoru úměrná výchylce, ale je složitější, musíme se vrátit k numerickému řešení. Máme-li dvě tělesa pohybující se kolem Slunce, tedy celkem tři tělesa, nepodaří se nám získat analytický vztah pro pohyb a takovou úlohu musíme řešit numericky. Je to známý problém tří těles, s nímž lidský rozum tak dlouho zápasil, až je zarážející, jak dlouho trvalo, než se přišlo na to, že možnosti matematické analýzy jsou omezeny a někdy

je nutno použít numerické metody. Dnes se numerickými metodami řeší velké množství problémů, jež není možné řešit analyticky, a problém tří těles, jenž se zdál být tak těžký, se řeší zcela běžně způsobem popsáním v předcházející kapitole, tj. pomocí velkého počtu aritmetických úkonů. Existují však případy, kdy analytická i numerická metoda selhávají. Jednoduché úlohy umíme řešit analyticky, složitější numerickými, aritmetickými metodami, ale velmi složité problémy neumíme řešit ani jedním z uvedených způsobů. Složitou úlohou je například srážka dvou automobilů nebo dokonce pohyb molekul plynu. V krychlovém milimetru plynu je ohromné množství částic a bylo by směšné pokoušet se o výpočty s takovým množstvím proměnných (kolem  $10^{17}$ , tj. sto miliard). Problémy, jakými jsou pohyby molekul či atomů plynu nebo kousku železa, pohyby milionů hvězd v kulových hvězdokupách a ne jen dvou či tří planet kolem Slunce – takové problémy nemůžeme řešit přímo a k jejich řešení musíme najít jiné metody.

Není-li možné zkoumat podrobnosti, zajímáme se o některé obecné vlastnosti, tj. o obecné věty a principy, jež vyplývají z Newtonových zákonů. Jedním z takových principů je zákon zachování energie, o němž se hovořilo v kapitole 4. Dalším je zákon zachování hybnosti, jenž je tématem této kapitoly. Jedním z důvodů dalšího studia mechaniky je existence některých obecných vlastností pohybu, které se opakují v rozmanitých podmínkách, a proto je užitečné prozkoumat tyto vlastnosti v některém speciálním případě. Budeme například pozorovat srážky a zjistíme, že různé druhy srážek mají velmi mnoho společného. Uvažujeme-li proudění kapaliny, není tak důležité, o kterou kapalinu jde – zákony proudění jsou podobné. Další problémy, jimiž se budeme zabývat, jsou kmity a chvění a zejména zvláštní úkazy mechanického vlnění – zvuk, chvění tyčí apod.

Když jsme hovořili o Newtonových zákonech, zdůraznili jsme, že tyto zákony jsou jistým druhem programu, který lze vyjádřit heslem „Věnujte pozornost silám“, přičemž samotný Newton nám o povaze sil řekl jen dvě věci. V případě gravitace nám zanechal úplný zákon síly. V případě velmi složitých sil mezi atomy Newton neznal jejich zákony, ale objevil jedno pravidlo, jednu obecnou vlastnost sil, kterou vystihuje jeho třetí zákon. To je všechno, co Newton věděl o povaze sil – gravitační zákon, uvedený princip a už nic víc.

Jeho princip je možno vyjádřit tvrzením, že *akce je rovna reakci*. Vysvětlíme si, jak chápat toto tvrzení. Předpokládejme, že máme dvě malá tělíska, např. částice, z nichž první působí na druhou silou tak, že ji odtlačuje. Pak, podle třetího Newtonova zákona, druhá částice působí na první stejnou silou v opačném směru; navíc, tyto síly budou působit podél stejné přímky. Tato hypotéza nebo zákon vyslovený Newtonem se ukazuje být správnou, ačkoli není zcela přesná (o chybách budeme hovořit později). Zatím budeme předpokládat, že akce je skutečně rovna reakci. Máme-li však třetí částici, která neleží na stejné přímce jako druhé dvě, pak celková síla působící na první částici není rovna celkové síle působící na druhou částici, protože na obě tyto částice působí ještě částice třetí. Výsledek je takový, že celková síla působící na první částici nebude ani rovna, ani opačně orientována než celková síla působící na druhou částici. Celkovou sílu působící na každou z částic je však možné rozložit na části odpovídající interakcím s jednotlivými částicemi. Tyto složky síly jsou pro každou dvojici vzájemně působících částic stejné velikosti a opačného směru.

## 10.2 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

Nyní si všimněme zajímavých důsledků třetího Newtonova zákona. Pro jednoduchost předpokládejme, že máme jen dvě interagující částice různých hmotností, které očíslováme jako 1 a 2. Síly působící mezi nimi jsou stejné, opačně orientované a nás zajímají důsledky této skutečnosti. Podle druhého Newtonova zákona je síla rovna rychlosti změny hybnosti s časem,

## ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

a proto rychlost změny hybnosti  $\boldsymbol{p}_1$  částice 1 je rovna záporně vzaté rychlosti změny hybnosti  $\boldsymbol{p}_2$  částice 2, tedy

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = -\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}. \quad (10.1)$$

Je-li tedy rychlost změny vždy stejná a opačná, pak celková změna hybnosti částice 1 je stejná a opačná než celková změna hybnosti částice 2. To znamená, že při sčítání hybnosti částic 1 a 2 bude rychlost změny tohoto součtu, podmíněná vzájemnými silami mezi částicemi (tzv. vnitřními silami), nulová, tedy

$$\frac{d(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{dt} = 0. \quad (10.2)$$

Je třeba zdůraznit, že v této úloze předpokládáme nepřítomnost jiných sil než vnitřních. Je-li rychlost změny tohoto součtu vždy nulová, znamená to, že veličina  $(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$  se nemění. (Tuto veličinu píšeme i ve tvaru  $m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2$  a nazýváme ji celkovou hybností dvou částic.) Zjistili jsme tedy, že celková hybnost dvou částic se nemění, působí-li jen vnitřní síly. Toto konstatování je vyjádřením zákona zachování hybnosti v uvažovaném případě. Jestliže mezi dvěma částicemi působí jakkoli komplikovaná síla a změříme, nebo vypočítáme  $m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2$  (tedy součet hybností dvou částic) před působením a po působení této síly, musíme dostat stejný výsledek, tj. celková hybnost je konstantní.

Kdybychom naše úvahy rozšířili na tři nebo více interagujících částic ve složitých podmínkách, opět bychom zjistili, že při působení jen vnitřních sil zůstává celková hybnost všech částic konstantní. Nárůst hybnosti jedné částice působením druhé je totiž přesně kompenzován poklesem hybnosti druhé částice působením první částice. Všechny vnitřní síly budou vyvážené, a proto nemohou změnit celkovou hybnost, která proto zůstává konstantní.

Ještě se musíme zmínit o situaci, k níž dochází v přítomnosti sil nepocházejících ze vzájemného působení uvažovaných částic. Předpokládejme, že jsme izolovali systém interagujících částic. Kdyby mezi nimi působily pouze vzájemné síly, nesměla by se jejich celková hybnost měnit bez ohledu na složitost sil. Předpokládejme však, že existují síly pocházející od částic nacházejících se mimo tuto izolovanou soustavu. Takovéto síly, při nichž vnější tělesa působí na vnitřní, nazýváme *vnějšími silami*. Později ukážeme, že součet všech vnějších sil je roven rychlosti změny celkové hybnosti všech vnitřních částic. Je to velmi užitečná věta.

Zákon zachování celkové hybnosti určitého počtu interagujících částic je možné vyjádřit ve tvaru

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 + m_3 \boldsymbol{v}_3 + \dots = \text{konst}, \quad (10.3)$$

jestliže nepůsobí vnější síly. Hmotnostem a rychlostem jednotlivých částic jsme přisoudili indexy 1, 2, 3 ... Pro každou z těchto částic musí být splněn druhý Newtonův zákon

$$\boldsymbol{f} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}), \quad (10.4)$$

jenž platí pro každou složku síly a hybnosti v kterémkoli daném směru, a tedy  $x$ -ová složka síly působící na částici je rovna rychlosti změny  $x$ -ové složky hybnosti částice

$$f_x = \frac{d}{dt}(m v_x). \quad (10.5)$$

Podobné vztahy je možno psát pro  $y$ -ovou a  $z$ -ovou složku. Rovnice (10.3) tedy ve skutečnosti představuje tři rovnice, po jedné pro každou složku.

Kromě zákona zachování hybnosti existuje další zajímavý důsledek druhého Newtonova zákona. Zatím ho jenom uvedeme a dokážeme ho později. Je to princip, který říká, že fyzikální zákony vypadají stejně, setrváváme-li v klidu, nebo se pohybujeme rovnoměrně přímočaře. Například, jestliže si dítě hraje v letcím letadle, pozoruje, že míček skáče stejně jako na zemi. I když se letadlo pohybuje velmi rychle, ale svou rychlost nemění, míček se chová stejně, jako kdyby letadlo stálo na letišti. Tuto skutečnost nazýváme *principem relativity*. V podobě, kterou jsme právě uvedli, nazýváme tento princip Galileův princip relativity, abychom ho odlišili o hlubší analýzy pocházející od Einsteina, o níž budeme hovořit později.

Z Newtonových zákonů jsme odvodili zákon zachování hybnosti a nyní bychom měli zkoumat, jaké speciální zákony platí pro srážky. Z důvodu pestrosti, i proto, abychom ukázali jiný postup, jenž se neopírá o Newtonovy zákony, budeme srážky zkoumat z úplně jiného hlediska. Naše úvahy budou spočívat v uvedeném Galileově principu relativity a dopracujeme se k zákonu zachování hybnosti.

Začneme předpokladem, že příroda musí vypadat stejně, jestliže ji pozorujeme při přímočarém rovnoměrném pohybu, nebo setrváváme-li v klidu. Dříve než budeme zkoumat procesy, v nichž se dvě tělesa srážejí a spojují, nebo se při srážce od sebe odrazí, všimněme si také dvou těles, jež drží pohromadě pružina nebo jiné zařízení a jež jsou náhle pružinou nebo malou explozí odmrštěna. Přitom budeme uvažovat jen pohyb v jednom směru. Nejprve předpokládáme, že jde o stejné, pěkně symetrické objekty, mezi nimiž došlo k malé explozi. Po explozi se bude jedno těleso pohybovat vpravo rychlostí  $v$ . Je rozumné předpokládat, že druhé těleso se bude pohybovat vlevo rychlostí  $v$ , neboť jsou-li objekty zcela stejné, není důvod dávat přednost pravému nebo levému směru, a tak se bude s tělesy dít něco symetrického. To je příklad úvahy, která je v mnohých úlohách velmi užitečná, ale k níž bychom nedospěli, kdybychom vycházeli jen ze vzorců.

Prvním výsledkem našeho experimentu je, že stejné objekty mají stejnou rychlost. Předpokládejme však, že tělesa jsou vytvořena z různých materiálů, například z mědi a hliníku, ale mají stejné *hmotnosti*. Budeme předpokládat, že v experimentu, kdy jsou hmotnosti obou těles stejné, budou jejich rychlosti stejné i tehdy, kdy tělesa stejná nejsou. Můžete však namítnout: „Je možné postupovat i naopak a není třeba se opírat o takovýto předpoklad. Stačí *definovat* stejné hmotnosti tak, že při nich v našem experimentu dosahují tělesa stejnou rychlost.“ Přijmeme tento návrh a vyvoláme malou explozi mezi kouskem mědi a velmi velkým kusem hliníku, který je tak těžký, že se téměř nepohne, zatímco měď odletí daleko. Hliníku je příliš mnoho, a proto z něho ubere-me, dokud nezůstane jen malý kousek. Když potom vyvoláme explozi, hliník odletí, zatímco měď se téměř nepohne. Nyní je málo hliníku. Existuje zřejmě jakési správné množství, jež lze postupně najít a při němž budou rychlosti odlétávání stejné. Podívejme se na situaci jinak a pro- hlašme hmotnosti za stejné, jsou-li stejné rychlosti. Toto je ovšem jen definice a je pozoruhodné, že fyzikální zákony můžeme transformovat do pouhých definicí. Nechtějí jakkoli, přece jde o následek jakýchsi fyzikálních zákonů, a jestliže přijmeme uvedenou definici stejných hmotností, můžeme okamžitě najít jeden z těchto zákonů následujícím způsobem.

Nechť z předcházejícího experimentu víme, že dva kousky hmoty,  $A$  a  $B$  (měď a hliník), mají stejné hmotnosti. Stejným způsobem můžeme porovnat třetí těleso, například kousek zlata s kouskem mědi, a ujistit se o rovnosti jejich hmotností. Provedeme-li experiment s hliníkem a zlatem, nemáme žádné logické důvody k tomu, abychom *jejich hmotnosti* prohlásili za stejné. *Experiment* nás však o tom přesvědčí. Pomocí experimentu jsme našli nový zákon. Tento zákon



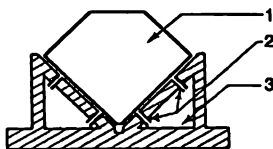
je možné formulovat následujícím způsobem: Jestliže každá ze dvou hmotností je rovna třetí hmotnosti (což se určuje rovností rychlostí v našem experimentu), pak jsou tyto dvě hmotnosti stejné. (Toto tvrzení vůbec *nevyplývá* z podobného tvrzení používaného jako postulát v *matematice*.) Na tomto příkladu je vidět, jak snadno můžeme vyslovit nepodložené závěry, nejsme-li dostatečně opatrní. Tvrzení, že hmotnosti jsou stejné, jsou-li stejné rychlosti, není jen definicí, neboť řekneme-li, že hmotnosti jsou stejné, znamená to, že mlčky používáme matematické zákony rovnosti, což zase zpětně vede k předpovědi o experimentu.

Uvažujme ještě jeden případ. Předpokládejme, že experimentem s určitou silou exploze se zjistilo, že  $A$  a  $B$  jsou stejné. Ptáme se, zda při silnější explozi zůstanou rychlosti stejné? Logickou cestou není možné rozhodnout tuto otázku, ale experiment ukazuje, že rychlosti *zůstanou* stejné. Máme tedy další zákon, který říká: Zjistíme-li měřením rychlostí dvou těles, že mají stejné hmotnosti, pak tato rovnost zůstane v platnosti i v měřeních při jiných rychlostech. Z těchto příkladů je vidět, že to, co se zdálo být jen definicí, ve skutečnosti zahrnuje určité fyzikální zákony.

V dalších úvahách budeme předpokládat, že stejné hmotnosti se rozletí na opačné strany se stejnými rychlostmi, jestliže mezi nimi dojde k explozi. V obrácené úloze uděláme další předpoklad. Zajímáme se o to, jak se po srážce budou pohybovat dva identické objekty, které letěly proti sobě stejnými rychlostmi a při srážce se pomocí nějakého lepu spojily. Opět máme symetrickou situaci bez přednosti mezi pravou a levou stranou, a proto předpokládáme, že utvořené těleso zůstane nehybné. Budeme předpokládat i to, že dva libovolné, stejně rychlé proti sobě letící předměty stejných hmotností, i když jsou z různých materiálů, po srážce a splynutí zůstanou nehybné.

### 10.3 HYBNOST SE ZACHOVÁVÁ!

Naše předpoklady o tom, že dva původně nehybné předměty stejných hmotností oddělené explozí odletí na opačné strany stejnými rychlostmi a že dva předměty stejných hmotností stejně rychle proti sobě letící po srážce a splynutí zůstanou nehybné, lze experimentálně prověřit. To je možné provést pozoruhodným zařízením nazývaným vzduchová dráha<sup>18)</sup>. Toto zařízení nás zbavuje tření, toho tření, které tak trápilo Galileia (*obr. 10.1*). Galileo nemohl provádět experimenty s klouzajícími předměty, neboť neklouzaly dost volně, ale uvedené zařízení nám takové experimenty umožní.



Obr. 10.1 Příčný řez vzduchovou dráhou

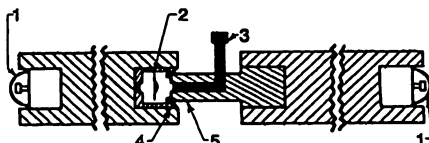
1 – klouzající předmět    2 – malé otvory (trysky)    3 – přívod stlačeného vzduchu

Naše předměty budou bez problémů klouzat a ve shodě s Galileovou předpovědí budou mít konstantní rychlost. Dosáhneme toho tak, že předměty se budou pohybovat na vzduchovém polštáři. Protože tření o vzduch je velmi malé, předměty kloužou prakticky konstantní rychlostí,

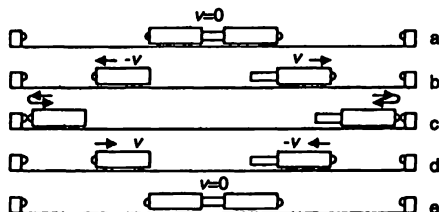
18)

H. V. Neher a R. B. Leighton, Amer. Jour. of Phys. 31, 255 (1963).

jestliže na ně nepůsobí síla. Nejprve vezmeme dva pečlivě připravené skluzné bloky stejné tíhy a hmotnosti (bloky byly jen zváženy, ale víme, že tíha je úměrná hmotnosti). Mezi tyto bloky vložíme do uzavřeného válce malou výbušnou nálož (obr. 10.2). Takto připravené bloky umístíme do středu žlabu a odpálíme nálož elektrickou jiskrou. Co se stane? Jsou-li rychlosti bloků po výbuchu stejné, dosáhnou bloky konce žlabu za stejnou dobu. Po dosažení konců žlabu se bloky odrazí, vrátí se prakticky stejně velkými, ale opačnými rychlostmi do bodu, odkud vycházely a tam se zastaví. To je zajímavý pokus a jeho výsledek je právě takový, jak jsme říkali (obr. 10.3).



Obr. 10.2 Podélný řez skluznými bloky spojenými výbušnou náloží  
1 – pružinový amortizátor 2 – kapsle z dětské pistole 3 – jiskrová elektroda 4 – válec 5 – píšť



Obr. 10.3 Schéma experimentu k demonstraci akce a reakce se stejnými hmotnostmi

Dále bychom chtěli ukázat, co se stane ve složitější situaci. Mějme dvě stejné hmotnosti, z nichž jedna se pohybuje rychlostí  $v$  a druhá stojí na místě. Co se s nimi stane, když se srazí a splynou? Po ukončení srážky máme jedno těleso o hmotnosti  $2m$ , jež se pohybuje neznámou rychlostí. Zajímáme se o to, jakou. Abychom to zjistili, budeme předpokládat, že se pohybujeme v automobilu podél jejich dráhy. Fyzikální zákony přitom zůstanou stejné, jako kdybychom stáli. Naše úvahy zahájíme poznatkem, že dvě stejné hmotnosti letící proti sobě stejnou rychlostí  $v$  zůstanou po srážce nehybné. Předpokládejme, že po dobu této události jedeme automobilem rychlostí  $-v$ . Jak potom vypadá situace? Protože se pohybujeme souběžně s jednou z hmotností, jeví se nám tato tak, jakoby se nepohybovala. Druhá hmotnost, ta, jež se pohybuje rychlostí  $v$  opačným směrem než my, se nám bude jevit tak, jakoby se pohybovala proti nám rychlostí  $2v$  (obr. 10.4). Po srážce se spojená hmotnost bude jevit tak, jakoby procházela rychlostí  $v$ , nebo, což je matematicky totéž, předmět s rychlostí  $v$  po srážce a splnutí se stejným, původně nehybným předmětem, vytvoří předmět pohybující se rychlostí  $v/2$ . Všimněte si, že součet součinů hmotností a rychlostí před srážkou, tj.  $mv + 0$ , je stejný jako součet odpovídajících součinů po srážce, tj.  $2mv/2$ . Taková je tedy situace, když se těleso letící rychlostí  $v$  srazí s nehybným tělesem.

Stejným způsobem je možné zjistit, co se stane, když se srazí stejné předměty letící *libovolnými* rychlostmi.

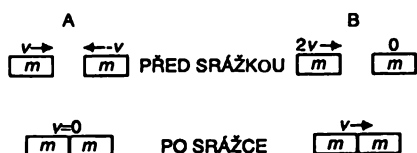
Předpokládejme, že se srazí a splynou dvě stejná tělesa letící rychlostmi  $v_1$  a  $v_2$ . Jaká bude jejich rychlost po srážce? Pojedme opět automobilem, a to rychlostí  $v_2$ , takže jedno z těles se nám bude jevit jako nehybné. Druhé se nám bude jevit tak, jakoby se pohybovalo rychlostí

## ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

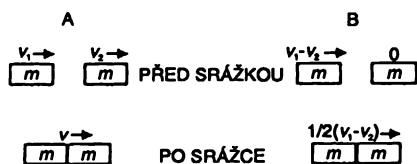
$v_1 - v_2$  a máme úlohu podobnou té, kterou jsme již uvažovali. Víme, že po srážce se budou tělesa pohybovat rychlostí  $1/2(v_1 - v_2)$  vzhledem k automobilu. Jaká bude skutečná rychlost těles na zemi? Bude následující:  $v = 1/2(v_1 - v_2) + v_2$ , tedy  $1/2(v_1 + v_2)$  (obr. 10.5). Všimněte si, že opět platí

$$mv_1 + mv_2 = \frac{2m(v_1 + v_2)}{2}. \quad (10.6)$$

Použitím tohoto principu můžeme analyzovat libovolnou srážku, při níž se dvě tělesa mající stejné hmotnosti srazí a splynou. Ačkoli jsme ve skutečnosti pracovali jen v jednom rozměru, můžeme se mnoho dozvědět o mnohem složitějších srážkách, když si představíme, že jedeme automobilem v nějakém odkloněném směru. Princip zůstává stejný, jen detaily jsou složitější.



Obr. 10.4 Dva pohledy na nepružné srážky mezi stejnými hmotnostmi (A – pohled z těžiště, B – pohled z jedoucího auta (rychlost auta =  $-v$ ))



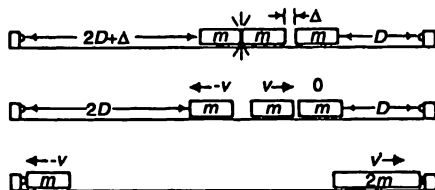
Obr. 10.5 Dva pohledy na jinou nepružnou srážku mezi dvěma stejnými hmotnostmi, (A – pohled z laboratorního systému B – pohled z auta)

Abychom experimentálně ověřili, zda předmět letící rychlostí  $v$  vytvoří po srážce se stejným nehybným předmětem předmět pohybující se rychlostí  $v/2$ , provedeme na vzduchové dráze následující pokus. Do žlabu umístíme tři předměty se stejnou hmotností, z nichž jsou dva na začátku spojeny již uvedeným explozivním válcem a třetí je sice velmi blízko, ale přece jen oddělený a je na něm přilnavý nárazník, takže se přilepí k předmětu, jenž do něho narazí. V prvním okamžiku po explozi máme dva předměty s hmotností  $m$ , které se pohybují v opačném směru stejnými rychlostmi  $v$ . V dalším okamžiku se jeden z těchto předmětů sráží s třetím předmětem a vytváří předmět s hmotností  $2m$ , jenž by se podle očekávání měl pohybovat rychlostí  $v/2$ . Jak se přesvědčíme o tom, že se pohybuje skutečně rychlostí  $v/2$ ? Pomůžeme si tak, že počáteční polohy předmětů ve žlabu nastavíme tak, aby vzdálenosti od konců nebyly stejné, ale v poměru 2 : 1. Náš první předmět, který pokračuje v pohybu rychlostí  $v$ , by měl projít v dané době dvakrát takovou vzdálenost jako dva předměty, které se spojily (započítáme i malou vzdálenost, již urazí druhý předmět před srážkou s třetím). Hmotnosti  $m$  a  $2m$  by měly dosáhnout konce žlabu současně, a jestliže pokus uskutečníme, zjistíme, že naše očekávání je správné (obr. 10.6).

Dále se budeme zabývat situací, kdy máme dva předměty s různými hmotnostmi. Vezměme hmotnosti  $m$  a  $2m$  a nechme mezi nimi působit naši explozi. Co se pak stane? Jakou rychlostí se

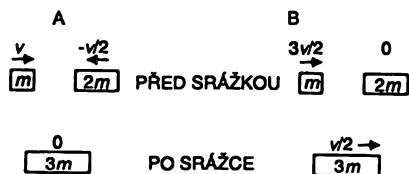
## HYBNOST SE ZACHOVÁVÁÍ

pohybuje předmět o hmotnosti  $2m$ , jestliže se předmět o hmotnosti  $m$  pohybuje v důsledku exploze rychlostí  $v$ . Experiment, který jsme provedli, můžeme uskutečnit tak, že mezera mezi druhým a třetím předmětem bude nulová a takový pokus nám dá stejný výsledek, tj. hmotnosti  $m$  a  $2m$  dosáhnou rychlostí  $-v$  a  $v/2$ . Přímá reakce mezi  $m$  a  $2m$  dává stejný výsledek jako symetrická reakce mezi  $m$  a  $m$ , po níž následuje srážka a spojení  $m$  s třetí hmotností  $m$ . Dále zjistíme, že hmotnosti  $m$  a  $2m$  se po návratu od konců žlabu s téměř přesně opačnými rychlostmi zastaví, jestliže se spojí.



Obr. 10.6 Experimentk prověření skutečnosti, že hmotnost  $m$  narážející rychlostí  $v$  na hmotnost  $m$  vytváří útvar o hmotnosti  $2m$  a rychlostí  $v/2$

Dále se můžeme ptát, co se stane, jestliže předmět o hmotnosti  $m$  letící rychlostí  $v$  narazí na nehybný předmět o hmotnosti  $2m$  a spojí se s ním. Na tuto otázku můžeme odpovědět velmi jednoduše, použijeme-li Galileův princip relativity a srážku, o níž jsme hovořili, pozorujeme z automobilu pohybujícího se rychlostí  $-v/2$  (obr. 10.7).



Obr. 10.7 Dva pohledy na nepružnou srážku mezi hmotnostmi  $m$  a  $2m$  (A – pohled z těžiště systému, B – pohled z auta)

Při pohledu z automobilu budou rychlosti

$$v_1' = v_1 - v_{\text{auta}} = v + \frac{v}{2} = \frac{3v}{2}$$

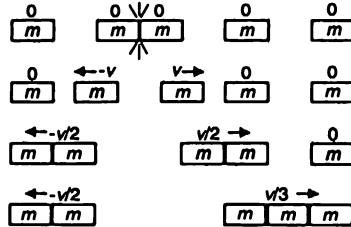
a

$$v_2' = -\frac{v}{2} - v_{\text{auta}} = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} = 0.$$

Po srážce vidíme hmotnost  $3m$  pohybovat se rychlostí  $v/2$ . Takto jsme našli odpověď na položenou otázku, tj. poměr rychlostí před srážkou a po srážce je 3:1. Sráží-li se předmět o hmotnosti  $m$  s nehybným předmětem o hmotnosti  $2m$  a spojí se s ním, pak se takto vytvořené těleso pohybuje rychlostí, jež je třetinou původní rychlosti. Obecné pravidlo nám opět říká, že součet součinů hmotností a rychlostí zůstává stálý:  $mv + 0$  je rovno  $3m$  krát  $v/3$ , a tak kousek po kousku sestavujeme zákon zachování hybnosti.

## ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

Zkoumali jsme srážky jednoho tělesa s dvěma tělesy. Použitím stejných argumentů můžeme předpovědět výsledky srážek jednoho tělesa s třemi tělesy, dvou těles s třemi tělesy atd. Obr. 10.8 znázorňuje případ srážek dvou těles s třemi tělesy a začíná situací, kdy tělesa byla v klidu.



Obr. 10.8 Akce a reakce mezi tělesy o hmotnostech  $2m$  a  $3m$

V každém z uvedených případů zjišťujeme, že součin hmotnosti a rychlosti prvního tělesa plus součin hmotnosti a rychlosti druhého tělesa je roven součinu celkové hmotnosti výsledného tělesa a jeho rychlosti. Vše jsou to tedy příklady na zákon zachování hybnosti. Vycházeli jsme z jednoduchých, symetrických případů a poukázali na platnost tohoto zákona v složitějších případech. Tak lze postupovat v případě libovolného racionálního poměru hmotností, a protože každé číslo lze s libovolnou přesností vyjádřit pomocí racionálního čísla, náš postup bude možno uplatnit libovolně přesně pro jakýkoli poměr hmotností.

## 10.4 HYBNOST A ENERGIE

Všechny předcházející příklady byly jednoduché v tom smyslu, že dvě tělesa se po srážce spojila, nebo byla spojena a později oddělena explozí. Existují však případy, kdy se tělesa nespojí, jako např. dvě tělesa se stejnými hmotnostmi, jež vstupují do srážky se stejnými absolutními hodnotami rychlostí a po srážce se rozletí na různé strany. V kratičkém okamžiku jsou v kontaktu a obě se stlačí. V okamžiku největšího stlačení mají obě dvě nulovou rychlost a energie je uchována v těchto pružných tělesech tak jako ve stlačené pružině. Tato energie pochází z kinetické energie, již měla tělesa před srážkou, a jež se stává nulovou, je-li rychlost nulová. Ztráta kinetické energie však trvá jen okamžik. Stlačení se podobá náloži, která uvolňuje energii při explozi. Ihned nastává dekomprese podobná explozi a tělesa se opět rozletí. Tento případ však již známe – tělesa odletí stejnými rychlostmi. Obecně je však rychlost po odrazu menší než počáteční rychlost, neboť ne všechna energie se využije k odrazu. Záleží na materiálu, jaká část energie se využije k odrazu. Je-li materiál plastický, neuvolní se žádná kinetická energie, ale je-li materiál pružný, určitá část kinetické energie se uvolní. Při srážce se zbytek kinetické energie přeměněn v tepelnou a kmitavou energii – tělesa se zahřejí a kmitají. Později se i energie kmitů přeměněn v teplo. Srážející se tělesa je možno konstruovat z velmi pružného materiálu, jakým je například ocel, a při pečlivé volbě pružinových nárazníků je možné dosáhnout toho, že při srážce vzniká jen velmi málo tepla a kmitů. V takovýchto podmínkách jsou rychlosti odrazu prakticky rovné počátečním rychlostem a takové srážky nazýváme *pružnými*.

Skutečnost, že rychlosti před pružnou srážkou a po ní jsou stejné, není důsledkem zákona zachování hybnosti, ale důsledkem zachování *kinetické energie*. To, že rychlosti těles odražených se po symetrické srážce jsou stejné, je však důsledkem zákona zachování hybnosti.

Podobným způsobem můžeme analyzovat srážky mezi tělesy, která mají různé hmotnosti, počáteční rychlosti i stupně pružnosti, a určit výsledné rychlosti a ztrátu kinetické energie, ale těmito podrobnostmi se již nebudeme zabývat.

Pružné srážky jsou zvláště zajímavé v systémech, které nemají vnitřní „kolečka, ozubená kola nebo jiné části“. V takových systémech nemá energie při srážkách kam unikat, neboť odražený objekt se nachází ve stejných podmínkách jako před srážkou. Proto se mezi elementárními objekty uskutečňují pružné nebo téměř pružné srážky. Například srážky mezi atomy nebo molekulami plynu jsou považovány za dokonale pružné. Ačkoli tu jde o výbornou aproximaci, ani v takovémto případě nejsou srážky *dokonale* pružné – jinak si nemůžeme vysvětlit, odkud bere plyn energii na světelné a tepelné záření. Občas se při srážkách v plynu emituje nízkenergetické infračervené záření. Jeho výskyt je však velmi ojedinělý a emitovaná energie je velmi malá. Srážky molekul v plynech je proto většinou možno považovat za dokonale pružné.

Všimněme si zajímavého příkladu *pružných srážek* mezi dvěma tělesy se *stejnými hmotnostmi*. Přibližují-li se takováto tělesa k sobě stejně velkými rychlostmi, pak se z důvodů symetrie budou od sebe vzdalovat stejnými rychlostmi. Podívejme se však na tento proces v jiné situaci, kdy jedno z nich se pohybuje rychlostí  $v$  a druhé je v klidu. Co se stane? S něčím podobným jsme se již setkali. Symetrickou srážku budeme pozorovat z auta pohybujícího se souběžně s jedním z těles a zjistíme, že pohybující se těleso při pružné srážce s nehybným tělesem stejné hmotnosti zastaví, a to, které bylo v klidu, se bude pohybovat stejnou rychlostí jako první těleso. Tělesa si prostě vymění rychlosti.<sup>19)</sup> Takové chování lze snadno ověřit vhodným srážkovým zařízením. Obecně, pohybují-li se obě tělesa proti sobě různými rychlostmi, prostě si při srážce rychlosti vymění. Jiným příkladem téměř pružných interakcí je magnetizmus. Umístíme-li dvojici podkovovitých magnetů na naše kluzné bloky tak, že se vzájemně odpuzují, pak při opatrném posunutí jednoho směrem k druhému dojde k odtažení druhého magnetu, první magnet se úplně zastaví a druhý se pak bude bez tření pohybovat.

Zákon zachování hybnosti je velmi užitečný a umožňuje nám vyřešit mnoho problémů bez jejich podrobného zkoumání. Neznali jsme detailně pohyb plynu při výbuchu nálože, a přece jsme například dokázali předpovědět rychlosti, s jakými se tělesa odrazí. Dalším zajímavým příkladem je raketový motor. Raketa s velkou hmotností  $M$  vymrštjuje malé množství plynu hmotnosti  $m$ , ale obrovskou rychlost  $V$  vzhledem k samotné raketě. Původně nehybná raketa se proto začne pohybovat malou rychlostí  $v$ . Pomocí zákona zachování hybnosti můžeme tuto rychlost vypočítat, a tak dostaneme

$$v = \frac{m}{M} \cdot V.$$

Pokud je plyn vymrštován, raketa nabírá rychlost. Raketový pohon je v podstatě totéž, co zpětný náraz pušky; nepotřebuje vzduch k tomu, aby se od něho odrazil.

## 10.5 RELATIVISTICKÁ HYBNOST

Není to tak dávno, co zákon zachování hybnosti postihly určité změny. Samotný zákon sice stále platí, ale změny nastaly v definici. V teorii relativity se ukazuje, že zákon zachování hybnosti platí. Částice mají hmotnost, a hybnost je definována opět jako součin hmotnosti a rychlosti, tj.

<sup>19)</sup> Tento výsledek poprvé publikoval český fyzik Jan Marek Marci v roce 1639. (Pozn. red.)

$mv$ , jenže hmotnost se v závislosti na rychlosti mění, a proto se bude měnit i hybnost. Změna hmotnosti podléhá zákonu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.7)$$

kde  $m_0$  je hmotnost tělesa v klidu,  $c$  je rychlost světla. Z tohoto vztahu je zřejmé, že  $m$  se jen nepatrně liší od  $m_0$ , pokud  $v$  není velmi velká, a tak pro běžné rychlosti je možné vyjádřit hybnost starým vztahem.

Složky hybnosti jedné částice lze zapsat ve tvaru

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.8)$$

přičemž  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Sečteme-li  $x$ -ové složky všech interagujících částic nejprve před srážkou a pak po srážce, zjistíme, že tyto součty jsou stejné, tj. hybnost ve směru osy  $x$  se zachovává. Totéž platí v libovolném směru.

V kapitole 4 jsme viděli, že zákon zachování energie neplatí, nepřipustíme-li existenci různých forem energie: elektrické, mechanické, tepelné, zářivé apod. V některých z těchto případů (např. u tepelné energie) je možno říci, že energie se vyskytuje v „skryté“ formě. Tento příklad nás může inspirovat k otázce: „Existují i skryté formy hybnosti – například tepelná hybnost?“ Odpověď na tuto otázku je, že hybnost se dá velmi obtížně skrýt, a to z následujících důvodů.

Součet druhých mocnin rychlostí neuspořádaně se pohybujících atomů tělesa představuje míru tepelné energie. Jako výsledek dostaneme kladnou veličinu bez směrového charakteru. Teplo existuje bez ohledu na to, zda se těleso jako celek pohybuje, nebo zda je nehybné, a zachování energie v podobě tepla není přímo zřejmé. Dostaneme-li však při sčítání *rychlostí*, které mají směr, výsledek různý od nuly, znamená to, že existuje pohyb samotného tělesa v jistém směru, a ten již můžeme viditelně pozorovat. Neexistuje tedy náhodná, uvnitř utajená hybnost; těleso má nenulovou hybnost jen tehdy, když se pohybuje jako celek. Proto lze hybnost jako mechanickou veličinu těžko skrýt. Hybnost je však přece jenom *možné* skrýt – např. v elektromagnetickém poli. To je další zvláštnost teorie relativity.

Newton předpokládal, že vzájemné působení se bez ohledu na vzdálenost uskutečňuje okamžitě. Tento předpoklad se ukázal být nesprávným. Uvažujeme-li například i elektrické síly a v určitém místě uvedeme do pohybu elektrický náboj, pak se jeho vliv na jiný náboj v jiném místě neprojeví okamžitě – existuje malé zpoždění. V takovéto situaci i při rovnosti sil akce a reakce se hybnosti nebudou kompenzovat; bude existovat krátký časový interval, v jehož průběhu nastanou problémy. V této době pocítí první náboj určitou sílu reakce a získá určitou hybnost, zatímco druhý náboj ještě nepocítí nic a jeho hybnost se nezměnila. Vzájemné působení potřebuje k překonání vzdálenosti určitou dobu, takovou, jako kdyby se šířilo rychlostí 300 000 km/s. V průběhu takovéhoho kraťoučkému intervalu se hybnost částic nezachovává. Pocítí-li však druhý náboj působení prvního náboje a vše se ustálí, zákon zachování hybnosti bude opět platit; nezachovává se tedy jen po krátkou dobu. Záhadný je tedy jen ten krátký časový interval. Situaci si představujeme tak, že v tomto intervalu existuje i jiná hybnost, než je hybnost částic  $mv$ . Jde

o hybnost elektromagnetického pole. Přidáme-li tuto hybnost pole k hybnosti částic, pak se hybnost zachovává v kterémkoli okamžiku. To, že elektromagnetické pole může mít hybnost a energii, ho činí skutečně reálným, a tak původní myšlenku o existenci sil mezi částicemi je třeba pozměnit v tom smyslu, že částice vytváří pole a pole působí na jinou částici. Samotné pole má dobře známé vlastnosti jako jsou energie a hybnost, vlastnosti, které mají částice. Jako další příklad si všimněme elektromagnetického pole, v němž existují vlny nazývané světlem. Ukazuje se, že světlo má i hybnost, a proto při dopadu na předmět přináší i určité množství hybnosti. To je ale rovnocenné působení síly, neboť získává-li osvětlený předmět určité množství hybnosti za sekundu, jeho hybnost se mění a situace je stejná, jako kdyby na něj působila síla. Při dopadu na předmět vyvolává světlo tlak. Tento tlak je velmi malý, ale dostatečně citlivými zařízeními ho můžeme změřit.

V kvantové mechanice se ukazuje, že hybnost je něco jiného – už to není  $mv$ . Je těžké přesně definovat, co je to rychlost částice, ale hybnost přece existuje. V kvantové mechanice je rozdíl v tom, že když se částice chovají jako částice, je hybnost  $mv$ , ale když se chovají jako vlny, měří se hybnost počtem vln na jeden metr: Čím větší je počet vln, tím větší je hybnost. Bez ohledu na tyto rozdíly platí zákon zachování hybnosti i v kvantové mechanice. Ačkoli zákon  $f = ma$  v kvantové mechanice neplatí a Newtonovo odvození zákona zachování hybnosti je nesprávné, přece jen v kvantové mechanice samotný zákon zachování hybnosti platí!



---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 10.1 ■ Na vodorovné vzduchové dráze se mohou volně pohybovat dvě tělesa. Jedno z nich je na počátku v klidu a druhé do něho narazí. Dojde k dokonale pružné srážce, po níž se obě tělesa rozletí na opačné strany stejnou rychlostí. Jaký je poměr jejich hmotností? (*Poznámka redaktora překladu: Úlohu poprvé řešil v 17. století Christian Huygens*).
- 10.2 ■ Dvě stejná hmotná tělesa se pohybují na vodorovné vzduchové dráze naproti sobě rychlostmi  $v$  a  $-v$  téže velikosti. Dojde k téměř pružné srážce a tělesa se po ní rozletají na opačné strany s poněkud menšími rychlostmi. Při srážce se ztrácí díl kinetické energie  $f \ll 1$ . Určete úbytek rychlosti  $\Delta v$ . Kdyby před srážkou bylo jedno z těles v klidu, jaká by byla rychlost druhého tělesa po srážce? (Pozn. Malou ztrátu rychlosti  $\Delta v$  můžeme snadno vyjádřit pomocí rychlosti  $v$ . Tímto způsobem lze určit pružnost pružinových tlumičů. Využijte přibližného matematického vzorce  $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$  pro  $x \ll 1$ ).
- 10.3 ■ Umělá družice Země o hmotnosti 10 kg a středního průřezu o obsahu  $0,50 \text{ m}^2$  se pohybuje po kruhové dráze ve výšce 200 km, kde střední volná dráha molekul představuje několik metrů a hustota vzduchu je rovna  $1,6 \cdot 10^{-10} \text{ kg/m}^3$ . Nárazy molekul na družici budeme přibližně považovat za dokonale nepružné (ne že by se molekuly na družici přilepovaly, ale odrážejí se od ní velmi malými relativními rychlostmi). Vypočítejte, jaká brzdná síla bude působit na družici díky tření vzduchu. Jak bude tato síla záviset na rychlosti družice? Bude rychlost družice pod vlivem výslednice působících sil klesat? (Vezměte v úvahu závislost orbitální rychlosti družice na výšce dráhy.)
- 10.4 ■ Raketa má startovací hmotnost  $M_0$  kg a vystřeluje plyny vznikající spalováním paliva konstantní rychlostí  $v_0$  vzhledem k raketě. Za 1 s ztrácí  $dm/dt = -r_0$  kg/s plynů.
- Vypočítejte počáteční zrychlení rakety. Tíhovou sílu přitom zanedbejte.
  - Je-li výtoková rychlost plynů  $v_0 = 2,0 \text{ km/s}$ , jaká je hmotnost plynů, kterou musí raketa vystřelovat každou sekundu, aby vznikla tažná síla  $10^6 \text{ N}$ ?
  - Napište diferenciální rovnici, jež spojuje rychlost rakety s její zbytkovou hmotností, a jestli to umíte, tuto rovnici vyřešte.
- 10.5 ■ Pohybují-li se dvě tělesa po jedné přímce, potom existuje taková soustava souřadnic, v níž je hybnost jednoho tělesa stejně velká a opačně namířená než hybnost druhého tělesa. To znamená, že celková hybnost těchto dvou těles v této soustavě souřadnic je nulová. Takovou soustavu souřadnic nazýváme soustavou hmotného středu nebo častěji *těžišťová soustava*. Jsou-li hmotnosti těles rovny  $m_1$  a  $m_2$  a tělesa se pohybují rychlostmi  $v_1$  a  $v_2$ , dokažte, že rychlost těžiště je rovna

$$v_T = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

- 10.6 ■ Zobecněte výsledek úlohy 10.5 na libovolný počet těles pohybujících se po přímce, tj. najděte rychlost soustavy souřadnic, v níž je celková hybnost všech těchto těles nulová.
- 10.7 ■ Nechť  $T$  je celková kinetická energie dvou těles v úloze 10.5 a  $T_T$  jejich celková kinetická energie v těžišťové soustavě. Ukažte, že

$$T = T_T + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_T^2.$$

- 10.8 ■ Dokážete zobecnit výsledek úlohy 10.7 na libovolný počet těles?
- 10.9 ■ Neutron s kinetickou energií  $E$  narazí čelně na nehybné jádro  $^{12}\text{C}$  a odrazí se od něho po dokonale pružné srážce ve směru opačném k původnímu směru svého pohybu. Jak se změní kinetická energie neutronu po srážce?
- 10.10 ■ Rychlost kulky vystřelené z pušky lze měřit pomocí balistického kyvadla. Kulka o známé hmotnosti  $m$  a neznámé rychlosti  $v$  vletí do dřevěné bedničky s pískem o hmotnosti  $M$  zavěšené na vlákně délky  $L$  a uváže v ní. Bednička se tím uvede do pohybu. Amplitudu jejích kmitů  $x$  můžeme změřit, pomocí zákona zachování energie tak můžeme určit rychlost pohybu bedničky po vniknutí kulky a odtud pomocí zákona zachování hybnosti rychlost kulky. Vyjádřete rychlost kulky pomocí  $m$ ,  $M$ ,  $L$  a  $x$ .

# V11 Vektory

---

## 11.1 SYMETRIE VE FYZICE

## 11.2 TRANSLACE

## 11.3 ROTACE

## 11.4 VEKTORY

## 11.5 VEKTOROVÁ ALGEBRA

## 11.6 NEWTONOVY ZÁKONY VE VEKTOROVÉM TVARU

## 11.7 SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ

### 11.1 SYMETRIE VE FYZICE

V této kapitole zavedeme pojem, jenž je ve fyzice známý jako *symetrie fyzikálních zákonů*. Slovo „symetrie“ tu používáme ve zvláštním smyslu, a proto bude třeba ho definovat. Je-li nějaká věc symetrická – jak to můžeme definovat? Řekáme-li, že obraz je symetrický, rozumíme tím, že jeho jedna strana je nějak stejná jako druhá. Profesor Hermann Weyl definoval symetrii takto: Předmět je symetrický, můžeme-li ho podrobit určité operaci a po ní bude stejný jako původně. Například, podíváme-li se na vázu, jež má pravo-levou symetrii, pak otočením o  $180^\circ$  kolem vertikální osy bude vypadat opět stejně. Přijmeme Weylovu obecnější definici symetrie a na jejím základě budeme hovořit o symetrii fyzikálních zákonů.

Předpokládejme, že na určitém místě jsme postavili složité zařízení s množstvím interakcí, se srážejícími se kuličkami, mezi nimiž působí síly atd. Dále předpokládejme, že na jiném místě jsme vybudovali přesně stejné zařízení, jehož všechny části jsou shodné se stejnými rozměry a stejnou orientací – vše je stejné, jen je to posunuto o určitou vzdálenost. Ptáme se, zda se budou tato zařízení chovat úplně stejně, jestliže je uvedeme do činnosti za stejných počátečních podmínek? Budou všechny pohyby paralelní? Odpověď může být samozřejmě záporná, neboť místo pro druhé zařízení může být nevhodně zvoleno. Zvolíme-li toto místo někde u stěny, druhé zařízení nebude moci vůbec pracovat, neboť stěna při některých pohybech překáží.

Naše fyzikální úvahy vyžadují určitý zdravý smysl při jejich aplikaci, vždyť to nejsou čisté matematické nebo abstraktní myšlenky. Musíme vědět, co to znamená, když hovoříme, že při přesunu zařízení na nové místo pozorujeme stejné jevy. Znamená to, že přemisťujeme vše, co

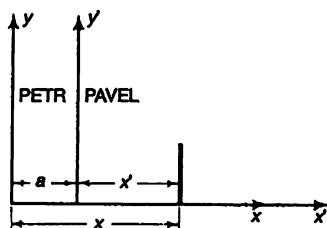
může mít na pohyb vliv. Nepozorujeme-li stejný jev, pak jsme něco důležitého nepřemístili a budeme muset zjistit, co to je. Nejistíme-li to nikdy, pak můžeme prohlásit, že fyzikální zákony nemají takovou symetrii. Mají-li však fyzikální zákony takovou symetrii, pak příčinu neshody můžeme najít – a my doufáme, že ji najdeme. Například, jestliže se pozorně rozhlédneme, můžeme zjistit, že stěna působí na naše zařízení. Základní otázkou je, zda při dostatečně dobře definovaných poměrech, při započtení všech podstatných sil a přesunu všech důležitých částí na jiné místo budou zákony stejné. Bude zařízení pracovat stejně?

Je jasné, že chceme přesunout celé zařízení a všechny *podstatné* vlivy, ale ne *všechno* na světě – planety, hvězdy a všechno ostatní. Kdybychom totiž přesunuli všechno, měli bychom stejný jev jako původně z toho prostého důvodu, že bychom se ocitli na stejném místě. *Všechno* tedy nemůžeme přesunout. V praxi se ukazuje, že při rozumném výběru přesouvaných věcí bude zařízení pracovat stejně. Jinými slovy, nenarazíme-li na stěnu, budeme-li znát původ vnějších sil a zabezpečíme i jejich přesun, pak bude zařízení pracovat na obou místech stejně.

## 11.2 TRANSLACE

V našich úvahách se omezíme na mechaniku, o níž toho víme již dost. V předcházející kapitole jsme poznali, že zákony mechaniky je možné shrnout do tří rovnic pro každou částici

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z. \quad (11.1)$$



Obr. 11.1 Dvě paralelní soustavy souřadnic

To znamená, že existuje způsob měření vzdáleností  $x$ ,  $y$ ,  $z$  na třech navzájem kolmých osách i sil podél těchto směrů, a při takovém měření jsou rovnice (11.1) pravdivé. Měření musí být realizována od nějakého počátku a my se ptáme, *kde má být tento počátek*. Newton by nám řekl jen tolik, že takové místo, ze kterého je možné začít měřit, existuje – snad je to střed vesmíru – a při takovém měření jsou uvedené zákony správné. Snadno však nahlédneme, že takový střed nikdy nenajdeme, protože nic by se nezměnilo, kdybychom si zvolili jiný počátek. Předpokládejme, že existují dva lidé – Petr, který si zvolil počátek na jednom místě, a Pavel, který má paralelní soustavu s počátkem na jiném místě (obr. 11.1). Při měření polohy bodu v prostoru zjistí Petr, že má souřadnice  $x$ ,  $y$  a  $z$  (obvykle budeme vynechávat  $z$ , abychom se vyhnuli komplikacím při kreslení obrázků). Když měří polohu stejného bodu Pavel, zjistí, že má hodnotu  $x'$  (pro rozlišení ji budeme označovat  $x'$ ) a obecně jinou hodnotu  $y$ , ačkoli v našem příkladu jsou tyto hodnoty číselně stejné. Máme tedy

$$x' = x - a, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (11.2)$$

## VEKTORY

Aby byla naše analýza úplná, musíme vědět, jaké síly naměří Pavel. Síla působí podél nějaké přímky a silou ve směru osy  $x$  rozumíme tu část z celkové síly, jež působí podél osy  $x$  a získáme ji tak, že násobíme velikost síly kosinem úhlu, který svírá s osou  $x$ . Tak zjišťujeme, že Pavel bude mít stejné průměty jako Petr a máme proto soustavu rovnic

$$F_{x'} = F_x, \quad F_{y'} = F_y, \quad F_{z'} = F_z. \quad (11.3)$$

Tyto rovnice představují vztahy mezi veličinami, které vidí Petr a Pavel.

Položme si otázku: Zná-li Petr Newtonovy zákony a snaží-li se Pavel objevit zákony pohybu, budou tyto jeho zákony shodné s Newtonovými? Projeví se nějak změněná volba počátku? Jinak řečeno, jsou-li rovnice (11.1) správné a rovnice (11.2) a (11.3) představují vztahy mezi měřenými veličinami, platí, nebo neplatí následující vztahy?

$$\text{a) } m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F_{x'} \quad \text{b) } m \frac{d^2 y'}{dt^2} = F_{y'} \quad \text{c) } m \frac{d^2 z'}{dt^2} = F_{z'}. \quad (11.4)$$

Abychom tyto rovnice prověřili, derivujeme dvakrát vztah pro  $x'$ . Nejprve dostaneme

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - a) = \frac{dx}{dt} - \frac{da}{dt}.$$

Budeme předpokládat, že Pavlův počátek je pevný, nepohybuje se vzhledem k Petrovu počátku. Proto je  $a$  konstanta a  $da/dt=0$ , takže máme

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

a dále

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Protože předpokládáme, že hmotnosti měřené Petrem a Pavlem jsou stejné, získá rovnice (11.4a) tvar

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{x'}.$$

Součin hmotnosti a zrychlení je tedy u obou pozorovatelů stejný. Získali jsme i vztah pro  $F_{x'}$ , neboť po dosazení do rovnice (11.1) zjistíme, že

$$F_{x'} = F_x.$$

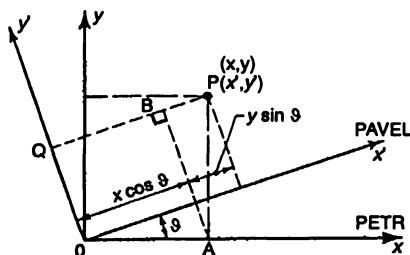
Zákony, jež odvodí Pavel, vypadají tedy stejně jako Petrovy. I pro něho platí Newtonovy zákony, i když s jinými souřadnicemi. To znamená, že neexistuje střed vesmíru a pohybové zákony budou stejné bez ohledu na místo, z něhož pozorujeme.

Platí i následující tvrzení: Je-li na určitém místě zařízení obsahující jistý mechanismus, pak stejné zařízení bude na jiném místě pracovat stejně. Proč? Protože zařízení analyzované Pavlem

vyhovuje stejným rovnicím jako zařízení analyzované Petrem. Protože jsou rovnice stejné, budou stejné i jevy. Důkaz toho, že zařízení se na novém místě chová stejně jako na původním, je stejný jako důkaz toho, že rovnice přenesené na jiné místo prostoru se reprodukují. Můžeme tedy prohlásit, že *fyzikální zákony jsou symetrické vzhledem k translaci v prostoru*, symetrické v tom smyslu, že zákony se nemění při translaci soustavy souřadnic. Že je to pravda, je celkem zřejmé intuitivně, ale je zajímavé a zábavné se zabývat matematickou stránkou této záležitosti.

### 11.3 ROTACE

Předcházející část byla věnována první z řady stále komplikovanějších tvrzení týkajících se symetrie fyzikálních zákonů. Další tvrzení praví, že nezáleží na tom, v jakém směru zvolíme souřadnicové osy. Jinými slovy, postavíme-li někde jedno zařízení a v sousedství stejné zařízení, ale pootočíme ho o určitý úhel vzhledem k prvnímu zařízení, ptáme se, zda budou obě dvě zařízení pracovat stejně. Určitě nebudou, jsou-li takovým zařízením, například, dědečkovy kyvadlové hodiny! Je-li kyvadlo ve svislé poloze, hodiny spolehlivě pracují, ale nakloníme-li hodiny, kyvadlo narazí na stěnu pouzdra a hodiny se zastaví. V případě kyvadlových hodin je naše tvrzení nesprávné, pokud do zařízení nezahrneme i Zemi, jež působí na pohyb kyvadla. Věříme-li, že fyzikální zákony jsou symetrické vzhledem k rotaci, musíme připustit, že na chod kyvadlových hodin má vliv i něco jiného než kyvadlový stroj, něco mimo hodiny, a my to musíme najít. Ještě můžeme předpovědět, že kyvadlové hodiny nebudou pracovat stejně, budou-li umístěny na různých místech, vzhledem k tomu záhadnému zdroji asymetrie, jímž je snad Země. Skutečně, kyvadlové hodiny umístěné například na umělé družici Země, nepůjdou, neboť tam není efektivní síla a na Marsu by zase měly jinou rychlost. Kyvadlové hodiny *představují* něco více než jednoduchý mechanismus v jejich vnitřku, zahrnují i něco, co je mimo ně. Známe-li tento faktor, pochopíme, že bychom museli společně s celým zařízením pootočit i Zemi. Nemusíme si však dělat starosti s pootočením Země, stačí chvíli počkat a Země se pootočí sama; pak půjdou kyvadlové hodiny v nové poloze stejně jako předtím. Zatímco rotujeme v prostoru mění se absolutně i naše úhly; tyto změny nás však příliš neznepokojují, neboť v nové poloze se cítíme stejně dobře jako ve staré. Taková situace nás může zmýlit. V nové pootočené poloze jsou sice zákony stejné jako před pootočením, *není však pravda*, že by *po dobu otáčení* věci podléhaly stejným zákonům, jako když se neotáčejí. Uskutečneme-li dostatečně přesné experimenty, můžeme zjistit, zda Země *rotuje*, ale nemůžeme zjistit, zda Země *rotovala*. Jinými slovy, takto nemůžeme zjistit její orientaci, ale jen skutečnost, že tato orientace se mění.



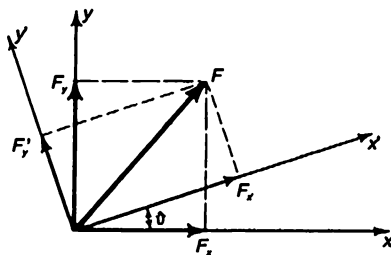
Obr. 11.2 Dvě soustavy souřadnic s různou úhlovou orientací

Nyní uvažujme vliv úhlové orientace na fyzikální zákony. Zjistíme, jak to bude nyní s Petrem a Pavlem. Abychom vyloučili zbytečné komplikace, budeme předpokládat, že Petr i Pavel vychá-

zejí ze společného počátku (již jsme ukázali, že jejich souřadnicové systémy se mohou translacací přesunout na jiné místo). Předpokládejme, že Pavlovy osy se pootočily vzhledem k Petrovým osám o úhel  $\vartheta$ . Omezíme-li se na dvojrozměrný prostor, můžeme dvě takové soustavy souřadnic znázornit jako na obr. 11.2. Uvažujme nějaký bod  $P$ , jež má v Petrově soustavě souřadnice  $(x, y)$  a v Pavlově soustavě souřadnice  $(x', y')$ . Podobně jako v předcházejícím případě, začneme tím, že vyjádříme souřadnice  $x', y'$  pomocí  $x, y$  a  $\vartheta$ . Abychom to mohli realizovat, vedeme nejprve kolmice z  $P$  ke všem čtyřem osám a nakreslíme  $AB$  kolmo k  $PQ$ . Z obrázku je vidět, že  $x'$  lze vyjádřit jako součet dvou úseček podél osy  $x'$  a  $y'$  zase jako rozdíl dvou úseček podél  $AB$ . Délky těchto úseček jsou vyjádřeny pomocí  $x, y$  a  $\vartheta$  v rovnicích (11.5), k nimž připojíme rovnici pro třetí rozměr

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \quad y' = y \cos \vartheta - x \sin \vartheta, \quad z' = z. \quad (11.5)$$

Dalším krokem je analýza vztahů mezi silami naměřenými dvěma pozorovateli, kterou provedeme podobně jako v předchozím případě. Předpokládejme, že síla  $F$ , kterou jsme již analyzovali, má složky  $F_x$  a  $F_y$  (při Petrově pozorování) a působí na částici o hmotnosti  $m$ , nacházející se v bodě  $P$  (obr. 11.2). Pro zjednodušení posuňme obě souřadnicové soustavy tak, že počátek bude v bodě  $P$  (obr. 11.3).



Obr. 11.3 Složky síly ve dvou soustavách

Pavel pozoruje podél svých os složky síly  $F'_x$  a  $F'_y$ .  $F'_x$  má složky ve směrech  $x'$  a  $y'$  a právě tak i  $F'_y$ . Abychom vyjádřili  $F'_x$  pomocí  $F_x$  a  $F_y$ , sčítáme složky těchto sil podél osy  $x'$ . Podobně můžeme vyjádřit  $F'_y$  pomocí  $F_x$  a  $F_y$ . Tak dostaneme

$$F'_x = F_x \cos \vartheta + F_y \sin \vartheta, \quad F'_y = F_y \cos \vartheta - F_x \sin \vartheta, \quad F'_z = F_z. \quad (11.6)$$

Je třeba si všimnout, že vztahy (11.5) a (11.6) pro souřadnice  $P$  a složky  $F$  mají shodný tvar. Tato náhodná shoda má velký význam.

Tak jako v přecházejícím případě, předpokládejme, že v Petrově soustavě platí Newtonovy zákony, jež jsou vyjádřeny rovnicemi (11.1). Opět se ptáme, zda Pavel může použít Newtonovy zákony – zda dostane správné výsledky ve své soustavě s pootočenými osami? Jinými slovy, předpokládáme-li, že rovnice (11.5) a (11.6) vyjadřují souvislost mezi měřeními, budou, nebo nebudou správné následující vztahy?

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F'_x, \quad m \frac{d^2 y'}{dt^2} = F'_y, \quad m \frac{d^2 z'}{dt^2} = F'_z. \quad (11.7)$$

## VEKTORY

Zkoušku správnosti provedeme tak, že nezávisle vypočteme jejich levé i pravé strany a porovnáme výsledky. Výpočet levých stran provádíme tak, že rovnice (11.5) násobíme  $m$  a za předpokladu, že úhel  $\vartheta$  je konstantní, dvakrát derivujeme podle času. Takovýmto způsobem dostaneme

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 x'}{dt^2} &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \cos \vartheta + m \frac{d^2 y}{dt^2} \sin \vartheta, \\m \frac{d^2 y'}{dt^2} &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \vartheta - m \frac{d^2 x}{dt^2} \sin \vartheta, \\m \frac{d^2 z'}{dt^2} &= m \frac{d^2 z}{dt^2}.\end{aligned}\tag{11.8}$$

Pravé strany rovnic (11.7) vypočteme tak, že rovnice (11.1) dosadíme do rovnic (11.6). Tak dostaneme

$$\begin{aligned}F'_x &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \cos \vartheta + m \frac{d^2 y}{dt^2} \sin \vartheta, \\F'_y &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \vartheta - m \frac{d^2 x}{dt^2} \sin \vartheta, \\F'_z &= m \frac{d^2 z}{dt^2}.\end{aligned}\tag{11.9}$$

Vida! Pravé strany rovnic (11.8) a (11.9) jsou shodné, a proto jsou-li Newtonovy zákony správné v jedné soustavě souřadnic, jsou správné i v druhé souřadnicové soustavě. Tento výsledek, platný pro translaci i rotaci os, má jisté důsledky. Především, nikdo nemůže tvrdit, že jím zvolené souřadnicové osy jsou jediné, ačkoli mohou být *nejvhodnější* pro určitý problém. Například, je vhodné zvolit souřadnicovou soustavu tak, aby gravitační síla působila ve směru jedné osy, ale není to fyzikálně nezbytné. Dalším důsledkem je skutečnost, že každé zařízení, zcela soběstačné v tom smyslu, že obsahuje vše, co na něho silově působí, bude pracovat stejně při jakémkoli pootočení.

### 11.4 VEKTORY

Nejen Newtonovy, ale pokud dnes víme i ostatní zákony fyziky mají dvě vlastnosti, jež nazýváme invariancí (nebo symetrií) vzhledem k translaci a rotaci souřadnicových os. Tyto vlastnosti jsou tak důležité, že k jejich využití při studiu fyzikálních zákonů vznikla speciální matematická metoda.

Předchozí analýza vyžadovala dosti pracné matematické výpočty. Aby při řešení těchto otázek bylo možno omezit detailní výpočty na minimum, byl vytvořen velmi účinný matematický aparát. Nazývá se *vektorová analýza* a je vlastně obsahem této kapitoly; přesně vzato však naše kapitola pojednává o symetrii fyzikálních zákonů. Předcházející metody nám umožňovaly získat všechny požadované výsledky, ale v praxi bychom je chtěli získat jednodušeji a rychleji, a proto zavedeme vektorovou metodu.

Začneme tím, že si všimneme některých rysů dvou druhů veličin, jež jsou ve fyzice důležité.



(Ve skutečnosti je takových druhů více, ale začneme jen se dvěma.) První druh veličin je takový, jako počet brambor v pytlí a tyto veličiny nazýváme obyčejnými nebo nesměrovanými čísly neboli *skaláry*. Takovou veličinou je například teplota. Jiné ve fyzice důležité veličiny mají směr. Je to například rychlost: Nestačí znát jen velikost rychlosti přemísťování tělesa, ale musíme znát i dráhu, po níž se těleso pohybuje. I hybnost a síla mají směr, právě tak jako posunutí. Když se někdo pohne z jednoho místa na druhé, můžeme zjistit, jakou dráhu urazil. Chceme-li však vědět, kam šel, musíme určit směr jeho pohybu.

Všechny veličiny, které mají směr (podobně jako posunutí v prostoru), nazýváme *vektory*.

Vektor je trojice čísel. Abychom vyjádřili posunutí v prostoru, například z počátku pohybu do bodu  $P$ , jenž má souřadnice  $(x, y, z)$ , skutečně potřebujeme tři čísla, ale my zavedeme jediný matematický symbol  $r$ , jenž se liší od dosud používaných matematických symbolů<sup>20)</sup>. *Není to* jediné číslo, představuje trojici čísel:  $x, y, z$ . Tento symbol představuje tři čísla, ale ve skutečnosti nejen tato tři čísla, neboť při změně souřadnicové soustavy se ta tři čísla změní na  $x', y', z'$ . Chceme však, aby naše matematika byla jednoduchá, a proto k označení trojice čísel  $(x, y, z)$  a  $(x', y', z')$  použijeme stejný znak. Použijeme vlastně stejný znak k vyjádření první trojice čísel v jedné souřadnicové soustavě nebo druhé trojice čísel v jiné souřadnicové soustavě. Tento způsob má tu výhodu, že při změně souřadnicového systému nemusíme měnit písmena v našich rovnicích. Zapišeme-li rovnici pomocí  $x, y, z$  a pak použijeme jiný systém, musíme přejít k  $x', y', z'$ , ale my budeme psát prostě  $r$  a dohodneme se, že to představuje  $(x, y, z)$  v jednom souřadnicovém systému nebo  $(x', y', z')$  v druhém souřadnicovém systému. Tři čísla, která popisují veličinu v dané souřadnicové soustavě, nazýváme *složkami* vektoru v směrech souřadnicových os uvažovaného systému. Používáme tedy stejný symbol pro tři písmena, která odpovídají *stejnému předmětu v pohledu z různých os*. Skutečnost, že říkáme „stejný předmět“ se zakládá na fyzikální intuici o tom, že krok v prostoru nezávisí na tom, jakými složkami ho popisujeme. Symbol  $r$  bude tedy představovat stejnou věc nezávisle na tom, jak otočíme osy.

Dále předpokládejme, že existuje nějaká jiná fyzikální veličina, jež má směr, a proto je možné ji určit trojicí čísel, přičemž tato tři čísla se podle určitého matematického pravidla změní na tři jiná čísla při změně  $(x, y, z)$  na  $(x', y', z')$ . Jinak řečeno, každá fyzikální veličina určená trojicí čísel, jež se transformují jako složky kroku v prostoru, je vektor. Rovnice typu

$$F = r$$

bude správná v *jakékoli* souřadnicové soustavě, je-li správná v jedné souřadnicové soustavě. Tato rovnice představuje, samozřejmě, tři rovnice

$$F_x = x \qquad F_y = y \qquad F_z = z$$

nebo

$$F'_x = x' \qquad F'_y = y' \qquad F'_z = z'.$$

Skutečnost, že fyzikální závislost je možno vyjádřit pomocí vektorové rovnice, je znakem toho, že závislost se nezmění otočením souřadnicové soustavy, a proto jsou vektory ve fyzice tak užitečné.

Nyní si všimněme některých vlastností vektorů. Jako příklady vektorů můžeme uvést rychlost, hybnost, sílu a zrychlení. Často bývá vhodné znázornit vektorovou veličinu pomocí šipky, která ukazuje směr jejího působení. Proč však můžeme znázornit sílu šipkou? Protože se transformuje

20)

V tisku jsou vektory vyjádřeny polotučnou kurzívou, v rukopise šipkou nad písmenem.

stejně jako posunutí v prostoru. Proto kreslíme sílu tak, jakoby byla posunutím a používáme takové měřítko, aby jednotce síly, například jednomu newtonu, odpovídala určitá vhodná délka. Jestliže jsme zavedli takovéto přiřazení, můžeme velikost všech sil vyjádřit pomocí úseček, neboť rovnice typu

$$F = kr,$$

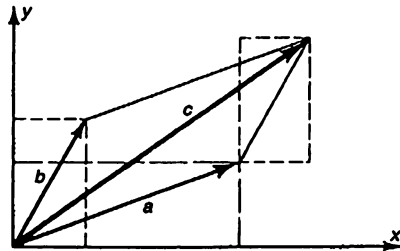
kde  $k$  je nějaká konstanta, je přípustná. Znázornění sil pomocí šipek je velmi výhodné, neboť pak se již nemusíme starat o souřadnice. Přitom můžeme snadno vypočítat, jak se budou měnit složky síly při otočení os, protože jde o geometrický problém.

## 11.5 VEKTOROVÁ ALGEBRA

Nyní musíme popsat zákony nebo pravidla pro různé kombinace vektorů. První takovou kombinací je sčítání dvou vektorů. Nechť vektor  $a$  má v určitém souřadnicovém systému složky  $(a_x, a_y, a_z)$  a vektor  $b$  složky  $(b_x, b_y, b_z)$ . Sestavme nyní trojici nových čísel  $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$  a zeptejme se, zda tato trojice tvoří vektor. Je možné říci, že jde o trojici čísel a každá trojice čísel tvoří vektor. Pozor, ne každá tři čísla tvoří vektor! Aby to byl vektor, musí jít nejen o tři čísla, ale tato čísla musí souviset se souřadnicovým systémem tak, aby se při jeho otočení vzájemně „pootočila“ a „promíchala“ podle zákona, o němž jsme již hovořili. Ptáme se proto, co se při takovém otočení souřadnicového systému, kdy  $(a_x, a_y, a_z)$  přechází v  $(a'_x, a'_y, a'_z)$  a  $(b_x, b_y, b_z)$  v  $(b'_x, b'_y, b'_z)$ , stane s  $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ . Dostaneme pak  $(a'_x + b'_x, a'_y + b'_y, a'_z + b'_z)$ ? Odpověď na tuto otázku je kladná, protože základní rovnice (11.5) vytvářejí tzv. *lineární transformaci*. Aplikujeme-li takovéto transformace na  $a_x$  a  $b_x$  a vypočteme  $a'_x + b'_x$ , zjistíme, že transformované  $a_x + b_x$  je stejné jako  $a'_x + b'_x$ . Jestliže  $a$  a  $b$  takto „sčítáme“, dostaneme vektor  $c$ . Můžeme to zapsat takto

$$c = a + b.$$

Ze složek vektoru  $c$ , okamžitě vyplývá zajímavá vlastnost  $c = b + a$ . Rovněž platí  $a + (b + c) = (a + b) + c$ . Vektory tedy můžeme sčítat v libovolném pořadí.



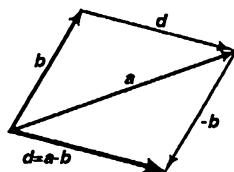
Obr. 11.4 Sčítání vektorů

Jaký je geometrický význam  $a + b$ ? Jak bude vypadat vektor  $c$ , nakreslíme-li vektory  $a$  a  $b$  pomocí šipek? Je to znázorněno na obr. 11.4. Vidíme, že složky vektoru  $b$  a vektoru  $a$  je možné nejhodněji sčítat tak, že obdélník představující složky vektoru  $b$  přiložíme tak, jak je vidět na

obrázku, k obdélníku představujícímu složky vektoru  $a$ . Protože  $b$  i  $a$  dobře „zapadnou“ do svých obdélníků, můžeme součet chápat jako přiložení „chvostu“ vektoru  $b$  k „hlavě“ vektoru  $a$ , přičemž šipka od „chvostu“ vektoru  $a$  k „hlavě“ vektoru  $b$  je vektor  $c$ . Kdybychom postupovali jinak a přiložili „chvost“ vektoru  $a$  k „hlavě“ vektoru  $b$ , dostali bychom ve shodě s geometrickými vlastnostmi obdélníků stejný výsledek pro  $c$ . Všimněte si, že takovýmto způsobem sčítáme vektory bez užití souřadnicových os.

Násobme vektor číslem  $\alpha$  a zkoumejme, co to znamená. Dohodněme se, že jde o nový vektor, jenž má složky  $\alpha a_x$ ,  $\alpha a_y$ ,  $\alpha a_z$ . Důkaz, že je to skutečně vektor, proveďte sami.

Uvažujme nyní odečítání vektorů. Odečítání můžeme definovat podobně jako sčítání, ale místo sčítání složky odečítáme. Můžeme postupovat i tak, že definujeme odečítání pomocí záporného vektoru  $-b$ , jenž je vlastně roven  $(-1)b$  a pak sčítání složky. Dostaneme totéž. Výsledek je znázorněn na obr. 11.5. Obrázek představuje  $d = a - b = a + (-b)$ . Všimněte si, že známe-li vektory  $a$  a  $b$ , můžeme snadno určit rozdíl  $a - b$  z ekvivalentního vztahu  $a = b + d$ . Rozdíl se proto hledá snadněji než součet: stačí nakreslit vektor od  $b$  k  $a$  a máme vektor  $a - b$ !



Obr. 11.5 Odečítání vektorů

Dále si všimněme rychlosti. Proč je rychlost vektor? Je-li poloha dána trojicí souřadnic  $(x, y, z)$ , co je potom rychlost? Rychlost je určena výrazy  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  a  $dz/dt$ . Je to vektor, nebo není? Derivováním výrazů rovnice (11.5) můžeme zjistit, zda se  $dx'/dt$  transformuje požadovaným způsobem. Je vidět, že složky  $dx/dt$  a  $dy/dt$  se transformují podle stejného zákona jako  $x$  a  $y$ , a proto je časová derivace vektor. Rychlost je tedy vektor. Rychlost můžeme vyjádřit zajímavým způsobem

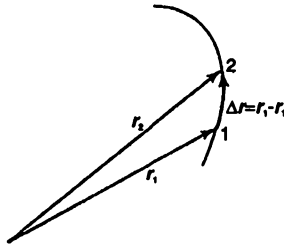
$$v = \frac{dr}{dt}.$$

Co je rychlost, a proč je vektor, lze také ukázat názorněji. Jak daleko se částice posune za krátkou dobu  $\Delta t$ ? Posune se o  $\Delta r$ , takže je-li částice v jednom okamžiku „zde“ a v dalším „tam“ vektorový rozdíl poloh  $\Delta r = r_2 - r_1$ , jenž leží ve směru pohybu (obr. 11.6), dá po dělení časovým intervalem  $\Delta t = t_2 - t_1$  vektor „průměrné rychlosti“.

Jinak řečeno, vektorem rychlosti rozumíme limitu z rozdílu polohových vektorů v okamžicích  $t + \Delta t$  a  $t$  děleného  $\Delta t$ , jde-li  $\Delta t$  k nule, tj.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}. \quad (11.10)$$

Rychlost je tedy vektor, neboť je rozdílem dvou vektorů. Tato definice rychlosti je správná, neboť složky rychlosti jsou pak  $dx/dt$ ,  $dy/dt$  a  $dz/dt$ . Tento důkaz nám vlastně říká, že derivováním libovolného vektoru podle času dostaneme nový vektor. Tak jsme poznali více způsobů tvorby vektorů: (1) násobením vektoru konstantou, (2) derivováním vektoru podle času, (3) sčítáním i odečítáním dvou vektorů.


 Obr. 11.6 Posunutí částice za krátkou dobu  $\Delta t = t_2 - t_1$ 

## 11.6 NEWTONOVY ZÁKONY VE VEKTOROVÉM ZÁPISU

Abychom mohli zapsat Newtonovy zákony ve vektorovém tvaru, musíme provést ještě jeden malý krok – definovat vektor zrychlení. Tento vektor je časovou derivací vektoru rychlosti a snadno lze ukázat, že jeho složky jsou druhé derivace  $x$ ,  $y$  a  $z$  podle  $t$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad (11.11)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (11.12)$$

Pomocí této definice lze Newtonovy zákony zapsat následujícím způsobem

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (11.13)$$

nebo

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (11.14)$$

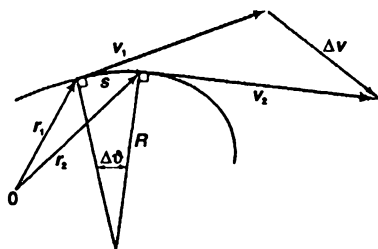
Máme dokázat, že Newtonovy zákony jsou invariantní vzhledem k otočení souřadnic. Proto musíme dokázat, že  $\mathbf{a}$  je vektor a  $\mathbf{F}$  je vektor. Již jsme však dokázali, že  $\mathbf{a}$  je vektor a o  $\mathbf{F}$  to budeme předpokládat. Jsou-li tedy síla i zrychlení vektory, bude rovnice (11.13) stejná ve všech souřadnicových systémech. Její zápis ve tvaru, jenž explicitně neobsahuje  $x$ ,  $y$  a  $z$ , je výhodný proto, že chceme-li zapsat Newtonovy rovnice, nebo jiné fyzikální zákony, nemusíme psát trojici zákonů. Píšeme něco, co vypadá jako jeden zákon, ale ve skutečnosti jde o tři zákony pro každý souřadnicový systém, neboť každá vektorová rovnice obsahuje výrok o rovnosti jednotlivých složek.

Skutečnost, že zrychlení je rychlost změny vektoru rychlosti, nám pomůže vypočítat zrychlení i ve složitých situacích. Předpokládejme například, že částice se pohybuje po nějaké složité křivce (obr. 11.7) a v daném časovém okamžiku  $t$  má určitou rychlost  $\mathbf{v}_1$  a v pozdějším čase  $t_2$  jinou rychlost  $\mathbf{v}_2$ . Jaké je zrychlení? Odpověď: Zrychlení je rozdíl rychlostí dělený malým časovým intervalem. Potřebujeme tedy znát rozdíl dvou rychlostí. Jak ho získáme? Kdybychom odečetli tyto dva vektory tak, že konce vektorů  $\mathbf{v}_2$  a  $\mathbf{v}_1$  spojíme vektorem  $\Delta\mathbf{v}$ , bylo by možné takto získaný vektor považovat za rozdíl  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ ? Ne! Takovýmto rozdílem by byl jen tehdy, kdyby počátky

## VEKTORY

vektorů byly ve stejném místě. Nemá smysl takto odečítat vektory, jež vycházejí z různých bodů. K jejich odečítání musíme nakreslit jiný obrázek. Na obrázku 11.8 jsou  $v_1$  a  $v_2$  rovnoběžné a stejně velké s jimi odpovídajícími vektory na obrázku 11.7. V takovémto případě je již možné hovořit o zrychlení. Zrychlení je, samozřejmě, prostě rovno  $\Delta v / \Delta t$ . Je zajímavé si všimnout, že rozdíl rychlostí je možné rozložit na dvě části; je možné si představit, že zrychlení má *dva složkové vektory*,  $\Delta v_{\parallel}$  ve směru tečny k trajektorii a  $\Delta v_{\perp}$  kolmo k trajektorii (obr. 11.8). Zrychlení, které je tečné k trajektorii, vyjadřuje změnu *délky* vektoru, tj. změnu *velikosti rychlosti*  $v$

$$a_{\parallel} = \frac{dv}{dt}. \quad (11.15)$$



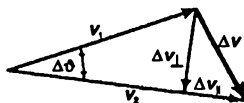
Obr. 11.7 Křivočará trajektorie

Druhou složku zrychlení, ve směru kolmém k trajektorii je možno snadno vypočítat z obrázků 11.7 a 11.8. Necht' se v krátké době  $\Delta t$  změnit úhel mezi  $v_1$  a  $v_2$  o malou hodnotu  $\Delta \theta$ . Je-li velikost rychlosti  $v$ , pak je samozřejmě.

$$\Delta v_{\perp} = v \Delta \theta$$

a zrychlení  $a$  je rovno

$$a_{\perp} = v \frac{\Delta \theta}{\Delta t}.$$



Obr. 11.8 Diagram pro výpočet zrychlení

Potřebujeme znát  $\Delta \theta / \Delta t$ . Tuto veličinu je však možno najít následujícím způsobem: Je-li v daném okamžiku křivka aproximována kružnicí s určitým poloměrem  $R$ , pak je v okamžiku  $\Delta t$  vzdálenost  $s$  rovna  $v \Delta t$ , kde  $v$  je velikost rychlosti. Tedy

$$\Delta \theta = v \Delta t / R \text{ neboli } \Delta \theta / \Delta t = v / R.$$

Proto dostaneme vztah

$$a_{\perp} = \frac{v^2}{R}, \quad (11.16)$$

s nímž jsme se již setkali.

## 11.7 SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ

Všimněme si ještě některých vlastností vektorů. Snadno zjistíme, že *délka* posunutí v prostoru je stejná v každém souřadnicovém systému. Jestliže tedy určitému posunutí  $r$  přísluší v jednom souřadnicovém systému souřadnice  $x, y, z$  a v druhém souřadnice  $x', y', z'$ , pak vzdálenost  $r = |r|$  musí být v obou systémech stejná. Pak

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{a také} \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Chceme si ověřit, jsou-li si tyto dvě veličiny rovny. Abychom se nemuseli trápit s odmocninou, uvažujme druhou mocninu vzdálenosti. Pak musíme zjistit, zda skutečně platí rovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (11.17)$$

Dosadíme-li za  $x', y', z'$  vztahy (11.5), zjistíme, že tato rovnost je splněna. Takto jsme poznali jiný druh rovnic, které platí v libovolných dvou souřadnicových systémech.

Setkáváme se s čímsi novým. Můžeme vytvořit novou veličinu, funkci  $x, y, z$ , nazvanou *skalární funkcí*, veličinu, která nemá směr, ale je stejná v obou systémech. Z vektoru můžeme vytvořit skalár a my chceme pro tuto operaci zformulovat obecné pravidlo. Je jasné, jaké bude pravidlo pro právě uvažovaný případ: je třeba sečíst druhé mocniny složek. Definujme nyní novou veličinu a označme ji  $a \cdot a$ . Tato veličina není vektor, ale skalár; je to číslo, které je stejné v každé souřadnicové soustavě a je definováno jako součet druhých mocnin tří složek vektoru

$$a \cdot a = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (11.18)$$

Můžeme se zeptat: A jak je to se souřadnicovými osami? Číslo však nezávisí na volbě os, a proto tento vztah platí v *každé* soustavě souřadnic. Získali jsme nový *druh* veličiny, nový *invariant* neboli skalár „umocněním“ jednoho vektoru. Definujme-li tedy nyní pro dva vektory  $a, b$  následující veličinu

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (11.19)$$

zjistíme, že zůstává stejná v čárkované i nečárkované soustavě souřadnic. Při důkazu tohoto tvrzení můžeme využít skutečnosti, že platí pro  $a \cdot a, b \cdot b$  a  $c \cdot c$ , kde  $c = a + b$ . Proto musí být součet druhých mocnin  $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$  invariantem, tj.

$$(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 = (a'_x + b'_x)^2 + (a'_y + b'_y)^2 + (a'_z + b'_z)^2. \quad (11.20)$$

Rozvineme-li obě dvě strany této rovnice, dostaneme takové křížové součiny jako ve vztahu (11.19) a kromě nich součty druhých mocnin složek  $a$  a  $b$ . Protože členy typu (11.18) jsou invariantní, budou invariantní i křížové součiny typu (11.19).

Veličina  $a \cdot b$  se nazývá *skalárním součinem* dvou vektorů  $a$  a  $b$  a má mnoho zajímavých a užitečných vlastností. Například lze snadno dokázat, že

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \quad (11.21)$$

Existuje i jednoduchý geometrický způsob výpočtu  $a \cdot b$ , při němž není třeba určovat složky vektorů  $a$  a  $b$ :  $a \cdot b$  je součin délek  $a$  a  $b$  násobený kosinem úhlu, jež svírají vektory  $a$  a  $b$ . Proč?

## VEKTORY

Zvolme soustavu souřadnic tak, aby její osa  $x$  ležela ve směru vektoru  $a$ ; pak jedinou složkou  $a$  je  $a_x$  a tato složka představuje i délku vektoru  $a$ . V takovém případě se rovnice (11.19) redukuje na  $a \cdot b = a_x b_x$ , což představuje součin délky  $a$  a složky  $b$  ve směru  $a$ , tedy  $b \cos \vartheta$ .

$$a \cdot b = ab \cos \vartheta.$$

Ukázali jsme, že v takto zvolené soustavě souřadnic je  $a \cdot b$  součinem délek  $a$  a  $b$  násobených  $\cos \vartheta$ . Platí-li to však v jedné souřadnicové soustavě, platí to ve všech souřadnicových soustavách, neboť  $a \cdot b$  nezávisí na volbě soustavy souřadnic.

Je skalární součin skutečně tak užitečná veličina? Existují ve fyzice takové případy, kdy ho opravdu potřebujeme? Ano, neustále ho potřebujeme. Například v 4. kapitole jsme nazvali kinetickou energií veličinu  $1/2 m v^2$ , ale jestliže se předmět pohybuje v prostoru, musíme samostatně umocnit jednotlivé složky rychlosti, takže kinetickou energii ve shodě s vektorovou analýzou vyjádříme

$$W_k = 1/2 m (v \cdot v) = 1/2 m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (11.22)$$

Energie nemá směr. Hybnost má směr; je to vektor představující součin hmotnosti a vektoru rychlosti.

Jiným příkladem skalárního součinu je práce konaná silou při přemístování předmětu z jednoho místa na druhé. Zatím jsme ještě práci nedefinovali, ale je ekvivalentní změně energie při zvedání závaží, když síla  $F$  působí podél vzdálenosti  $s$ . Práce

$$A = F \cdot s. \quad (11.23)$$

Někdy je účelné hovořit o složkách vektoru v určitém směru (například ve vertikálním směru, neboť je to směr působení gravitace). V takovém případě je vhodné zavést *jednotkový vektor* v uvažovaném směru. Jednotkovým vektorem rozumíme takový vektor, který skalárně násobený sebou samým je roven jedné. Označíme-li tento vektor  $i$ , pak platí  $i \cdot i = 1$ . Skalární součin  $a \cdot i$  je roven  $a \cos \vartheta$ , neboli složka vektoru  $a$  ve směru  $i$ . To je výhodný způsob získávání složek vektoru. Takovýmto způsobem můžeme najít všechny složky a získat dost zábavný vztah. Zavedme v daném souřadnicovém systému  $x, y, z$  tři vektory:  $i$  – jednotkový vektor ve směru osy  $x$ ,  $j$  – jednotkový vektor ve směru osy  $y$  a  $k$  – jednotkový vektor ve směru osy  $z$ . Víme, že  $i \cdot i = 1$ . Ptáme se, jaké je  $i \cdot j$ . Svírají-li dva vektory pravý úhel, jejich skalární součin je roven nule. Proto

$$\begin{aligned} i \cdot i &= 1 \\ i \cdot j &= 0 & j \cdot j &= 1 \\ j \cdot k &= 0 & j \cdot k &= 0 & k \cdot k &= 1. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Libovolný vektor lze tedy dá zapsat ve tvaru

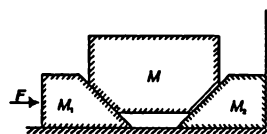
$$a = a_x i + a_y j + a_z k. \quad (11.25)$$

Takovým způsobem můžeme přejít od složek vektoru k samotnému vektoru.

Tyto úvahy o vektorech zdaleka nejsou úplné. Raději, než abychom se podrobněji zabývali touto problematikou, naučíme se používat některé z diskutovaných myšlenek ve fyzice. Pak, když zvládneme základní materiál, bude pro nás jednodušší proniknout hlouběji do problematiky a nebudeme dělat zbytečné chyby. Později poznáme, že je užitečné definovat jiný druh součinu dvou vektorů, nazývaný vektorovým součinem a označovaný symbolem  $a \times b$ . O tom však budeme hovořit až v další kapitole.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 11.1 ■ Jsou-li tři vektory zadány rovnostmi  $a = 3i + 2j - k$ ,  $b = 2i - j + k$ ,  $c = i + 3j$ , najděte  
a)  $a + b$ , b)  $a - b$ , c)  $a_x$ , d)  $a \cdot i$ , e)  $a \cdot b$ , f)  $(a \cdot c) b - (a \cdot b) c$ .
- 11.2 ■ Cyklista jede rychlostí 10 km/h směrem na sever a zdá se mu, že vítr (jenž vane rychlostí 6 km/s odněkud ze severovýchodu) míří skoro přímo na něj, pod úhlem  $15^\circ$  ke směru pohybu cyklisty.  
a) Určete skutečný směr větru.  
b) Určete zdánlivý směr větru s hlediska cyklisty, který jede opačným směrem toutéž rychlostí 10 km/h.
- 11.3 ■ Nacházíte se na lodi, jež směřuje k východu konstantní rychlostí 15 uzlů. Jiná loď, pohybující se ve stálém kurzu známou rychlostí 26 uzlů, je od vás vzdálena 6 mil v jižním směru. Za nějakou dobu vás bude míjet za zádi, přičemž se přiblíží na nejmenší vzdálenost 3 mil.  
a) Najděte kurz této lodi.  
b) Jaká doba proběhla mezi dvěma událostmi popsanými v úloze?
- 11.4 ■ Kolo o poloměru  $R$  se valí bez prokluzování po vodorovném povrchu. Kolo leží ve svislé rovině a jeho osa se pohybuje vodorovně se stálou rychlostí vzhledem k povrchu. Vypočítejte velikost a směr rychlosti nějakého bodu na obvodu kola. Přesvědčte se, že rychlosti bodů na obvodu kola jsou takové, jako kdyby se kolo otáčelo kolem okamžité osy procházející bodem doteku kola s vodorovným povrchem.
- 11.5 ■ Motorový člun, jehož rychlost vzhledem k vodě je rovna  $v$ , pluje po přímém úseku řeky. Rychlost toku je stálá a rovná  $u$ . Nejprve člun pluje proti proudu do vzdálenosti  $d$  od svého přístaviště a vrací se zpět. Potom pluje do místa na druhém břehu řeky přímo proti přístavišti a vrací se zpět. Šířka řeky je také rovna  $d$ . Pro jednoduchost budeme předpokládat, že člun se pohybuje stále stejnou rychlostí a na obrátkách neztrácí čas. Je-li  $t_V$  doba pohybu člunu podél řeky,  $t_A$  doba pohybu napříč řekou a  $t_L$  doba, za níž by člun uplul vzdálenost  $2d$  na jezeře, určete  
a) čemu je roven poměr  $t_V/t_A$ ,  
b) čemu je roven poměr  $t_A/t_L$ .
- 11.6 ■ Člověk stojící na břehu řeky se chce přepravit na druhý břeh, přímo do místa ležícího naproti přes řeku. Může to udělat dvojím způsobem:  
1) plavat po celou dobu pod úhlem ke směru proudu, tak aby výsledná rychlost byla stále kolmá ke břehu,  
2) plavat přímo k protějšímu břehu a vzdálenost, kterou bude proudem snesen, dojít po výstupu na protější břeh pěšky. Náš člověk plave rychlostí 2,5 km/h, chodí rychlostí 4 km/h, řeka teče rychlostí 2 km/h. Kterým způsobem dosáhne člověk dříve svého cíle?
- 11.7 ■ Na vodorovné rovině leží dva stejné klíny o hmotnostech  $M_1 = M_2 = 8,0$  kg a úhlech zkosení  $45^\circ$ . Pomocí klínů má být zvednuta zátěž o hmotnosti  $M = 384$  kg podle obrázku. Všechny roviny doteku jsou dokonale hladké. Také klíny leží na dokonale hladké rovině, přičemž jeden z nich se opírá o svislou stěnu a na druhý působí vodorovná síla 5 800 N.  
a) Najděte velikost a směr zrychlení pohyblivého klínu  $M_1$ .  
b) Najděte velikost a směr zrychlení zátěže  $M$ .  
c) Jakou silou tlačí nehybný klín  $M_2$  na zátěž  $M$ ?





11.8 ■ Na jednom konci niti visí hmotný bod  $m$ , druhý konec je připevněn ke kulovému, volně otočnému závěsu. Hmotný bod roztočíme po kruhové dráze ve vodorovné rovině, jež je vzdálena od bodu závěsu o  $H$  (tzv. *sférické kyvadlo*). Určete periodu tohoto pohybu.

11.9 ■ Zobecněte výsledky úloh 10.5 a 10.8 na trojrozměrný pohyb s použitím vektorové symboliky a označení  $M = \sum_{i=1}^n m_i$ .

11.10 ■ „Částice“ o hmotnosti  $m_1 = 2$  kg pohybující se rychlostí  $v_1 = 3i + 2j - k$  km/s se dokonale nepružně sráží s jinou částicí o hmotnosti  $m_2 = 3$  kg a rychlosti  $v_2 = -2i + 2j + 4k$  km/s. Najděte rychlost takto vzniklé složené částice.

11.11 ■ Najděte kinetickou energii částic popsaných v úloze 11.10 v těžiškové soustavě před srážkou.

11.12 ■ Těleso o hmotnosti 1 kg se pohybuje přesně na sever rychlostí 6 m/s a narazí na těleso o hmotnosti 2 kg, které je v klidu. Po nárazu se těleso s menší hmotností pohybuje pod úhlem  $45^\circ$  ke směru svého původního pohybu (na severovýchod) rychlostí 2,82 m/s.

- Jaká je rychlost tělesa o hmotnosti 2 kg?
- Jaká část kinetické energie v těžiškové soustavě se „ztratila“ v důsledku nepružné srážky?
- O jaký úhel se odchýlilo lehčí těleso v těžiškové soustavě?

11.13 ■ Pohybující se částice se dokonale pružně sráží s částicí o stejné hmotnosti, která je v klidu. Ukažte, že po srážce se částice rozletí pod pravým úhlem.

Při analýze srážek dvou částic je užitečné postupovat tímto způsobem:

- Najít  $v_T$  (rychlost těžiškové soustavy).
- Odečíst rychlost těžiškové soustavy  $v_T$  od  $v_1$  a  $v_2$  (rychlosti první a druhé částice před srážkou), abychom dostali rychlosti částic před srážkou v těžiškové soustavě  $v_1'$  a  $v_2'$ .
- Hybnosti obou částic v těžiškové soustavě mají nyní stejnou velikost a opačný směr.
- Dochází ke srážce, při níž
  - se otáčí přímka, v níž leží vzájemné rychlosti obou částic,
  - velikosti vektorů  $v_1'$  a  $v_2'$  se zvětšují, zmenšují nebo zůstávají beze změny podle toho, zda se při srážce uvolňuje, pohlcuje nebo nemění energie.
- Přičíst  $v_T$  k rychlostem  $v_1'$  a  $v_2'$  (rychlosti první a druhé částice v těžiškové soustavě po srážce). Tak dostaneme rychlosti částic v „laboratorní soustavě“ po srážce  $v_1$  a  $v_2$ .

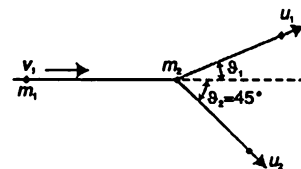
11.14 ■ Dvě malé kuličky A a B, každá o hmotnosti 1 g, se pohybují pod vlivem tíhové síly se zrychlením  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Osu  $z$  namíříme ve směru zrychlení. Dále jsou zadány následující počáteční podmínky při  $t = 0$ :

$$r_a(0) = 7i + 4,9k \text{ m}, \quad v_a(0) = 7i + 3j \text{ m/s}$$

$$r_b(0) = 49i + 4,9k \text{ m}, \quad v_b(0) = -7i + 3j \text{ m/s}.$$

Najděte  $r_a(t)$  a  $r_b(t)$  v libovolném časovém okamžiku  $t > 0$ .

11.15 ■ Částice o hmotnosti  $m_1$  nalétává rychlostí  $v_1$  na částici o hmotnosti  $m_2 = 3m_1$ , jež je v klidu. Dochází k dokonale pružné srážce, po níž se částice  $m_2$  pohybuje pod úhlem  $\vartheta_2 = 45^\circ$  k původnímu směru pohybu částice  $m_1$  (viz obrázek). Máte najít  $\vartheta_1$  – úhel odchýlení první částice a velikosti rychlostí  $u_1$  a  $u_2$ .



- 11.16 ■ Částice o hmotnosti  $M$  nalétává na částici o hmotnosti  $m < M$ , která je v klidu, a dochází k pružné srážce. Najděte největší možný úhel odchýlení nalétající těžké částice.
- 11.17 ■ Částice o hmotnosti  $m$  se pružně sráží s částicí o hmotnosti  $M > m$ , jež je v klidu, a odchyluje se od původního směru o  $90^\circ$ . Pod jakým úhlem  $\vartheta$  ke směru původního pohybu poletí těžká částice (úhel zpětného rázu)?
- 11.18 ■ Nechť se při srážce popsané v předchozí úloze ztratí  $(1 - \alpha^2)$ -tá část kinetické energie v těžiškové soustavě. Čemu bude v tom případě roven úhel zpětného rázu?
- 11.19 ■ Částice o hmotnosti 1 kg se pohybuje tak, že její poloha v libovolném časovém okamžiku je dána polohovým vektorem
- $$\mathbf{r} = It + \mathbf{j} \left( t + \frac{t^2}{2} \right) - k \left( \frac{4}{\pi^2} \right) \sin \frac{\pi t}{2}$$
- a) Určete polohu, rychlost, zrychlení a kinetickou energii částice v časových okamžicích  $t = 0$  a  $t = 1$  s.  
b) Najděte výraz pro sílu, jež nutí částici se takto pohybovat.  
c) Najděte poměr křivosti trajektorie částice v okamžiku  $t = 1$  s.
- 11.20 ■ V počátečním okamžiku se částice nachází v bodě o polohovém vektoru  $\mathbf{r}_0$  a má rychlost  $\mathbf{v}_0$ . Určete její další pohyb pod vlivem tíhové síly.
- 11.21 ■ Pomocí vektorové algebry najděte vzdálenost měřenou po hlavní kružnici mezi dvěma body na zemském povrchu, jejichž zeměpisná šířka a délka jsou  $(\lambda_1, \varphi_1)$  a  $(\lambda_2, \varphi_2)$ . Poznámka: Použijte pravoúhlou soustavu souřadnic s počátkem ve středu Země. Jednu osu nasměrujte podél zemské osy, druhou ve směru do bodu o zeměpisných souřadnicích  $\lambda = 0, \varphi = 0$  a třetí do bodu  $\lambda = 0, \varphi = 90^\circ$ . Zeměpisnou délku měřte od  $0^\circ$  do  $360^\circ$  od východu na západ.
- 11.22 ■ Čemu jsou rovny velikost a směr zrychlení Měsíce  
a) za novu,  
b) v první čtvrti,  
c) za úplňku?  
Poznámka: Vzdálenost od Země k Slunci je rovna  $1,5 \cdot 10^8$  km, vzdálenost od Země k Měsíci  $3,85 \cdot 10^5$  km, hmotnost Slunce je  $3,33 \cdot 10^5$  krát větší než hmotnost Země.

# Charakteristiky síly

---

## 12.1 CO JE TO SÍLA?

## 12.2 TŘENÍ

## 12.3 MOLEKULOVÉ SÍLY

## 12.4 FUNDAMENTÁLNÍ SÍLY. POLE

## 12.5 NEPRÁVÉ SÍLY

## 12.6 JADERNÉ SÍLY

### 12.1 CO JE TO SÍLA?

I když je studium fyzikálních zákonů zajímavé a vyplatí se už prostě proto, že nám pomáhá chápat a využívat přírodu, je třeba se čas od času zastavit a položit si otázku „Jaký je jejich skutečný smysl?“ Hledání smyslu jakéhokoli výroku je od nepaměti předmětem zájmu filozofů a hledání smyslu fyzikálních zákonů je ještě zajímavější, neboť obecně se věří, že tyto zákony reprezentují určitý druh reálného poznání. Význam poznání je hluboký filozofický problém a ptát se „Co to znamená?“, je vždy důležité.

Zeptejme se: „Co znamená Newtonův zákon, který píšeme jako  $F = m a$ ? Jaký smysl má síla, hmotnost a zrychlení?“ Smysl hmotnosti jsme schopni intuitivně chápat a zrychlení dokážeme *definovat*, jestliže chápeme smysl polohy a času. Těmto věcem se nebudeme věnovat, ale soustředíme se na to, co je to síla. Odpověď je stejně jednoduchá: „Když se těleso zrychluje, působí na něho nějaká síla“. To nám říká Newtonův zákon, takže nejpřesnější a nejkrásnější definicí síly může být prostě to, že řekneme, že síla, je hmotnost tělesa násobená zrychlením. Předpokládejme, že je-li součet všech vnějších sil roven nule, platí zákon zachování hybnosti. Pak vzniká otázka: „Co to znamená, že součet všech vnějších sil je roven nule“. Tady nemůže být něco v pořádku, neboť tento výrok neříká nic nového. Jestliže jsme objevili základní zákon, podle něhož je síla rovna součinu hmotnosti a zrychlení, a pak definujeme sílu jako hmotnost krát zrychlení, neobjevili jsme nic nového. Sílu bychom mohli *definovat* i tak, že nepůsobí-li na těleso žádná síla, těleso se nadále pohybuje po přímce s konstantní rychlostí. Jestliže pak zpozorujeme, že těleso

se *nepohybuje* po přímce s konstantní rychlostí, můžeme říci, že na ně působí síla. Takováto tvrzení nemohou tvořit obsah fyziky, neboť jsou to definice v kruhu. Uvedená newtonovská definice se zdá být takovou nejpřesnější definicí síly, která apeluje na matematiky, přesto je zcela neúčinná, neboť z takovéto definice nelze získat vůbec žádnou předpověď. Mohli bychom celý den sedět v křesle a vytvářet si definice podle libovůle, ale zjistit, co se stane, když se srazí dvě koule, nebo když se závaží zavěsí na strunu, je zcela jiná věc, neboť *chování* těles nelze vyjádřit žádnými definicemi.

Například, těleso odkázané samo na sebe si zachovává svou polohu a nepohybuje se. Když pak uvidíme, že se něco pohybuje, můžeme si vymyslet nové slovo a říct, že to způsobuje třeba „zřlá“<sup>21)</sup>. „Zřlá“ je rychlost změny polohy. Máme tedy pěkný zákon – vše setrvává v klidu, kromě případu, kdy působí nějaká „zřlá“. Vidíme, že by to byla analogická definice k uvedené definici síly a neobsahovala by žádnou informaci. Skutečný obsah Newtonových zákonů je, že navíc k zákonu  $F = m a$  by měla mít síla ještě nějaké *nezávislé vlastnosti*; ale tyto *specifické* nezávislé vlastnosti síly nebyly zcela popsány Newtonem, ani nikým jiným, a proto je fyzikální zákon  $F = m a$  neúplný. Z toho vyplývá, že studujeme-li součin hmotnosti a zrychlení, přičemž ho nazveme silou, tj. studujeme charakteristiky síly jako předmět našeho zájmu, zjistíme, že síly se vyznačují určitou jednoduchoostí; zákon tvoří dobrý program pro analýzu přírody, je náznakem toho, že síly budou jednoduché.

Prvním příkladem takovýchto sil byl úplný Newtonův gravitační zákon a při formulování tohoto zákona odpovídal Newton na otázku „Co je to síla?“. Kdyby neexistovalo nic jiného než gravitace, tvořila by kombinace tohoto zákona se zákonem síly (druhým pohybovým zákonem) úplnou teorii. Kromě gravitace však existuje mnoho jiného a my chceme použít Newtonovy zákony v mnoha různých situacích. Proto, abychom se dostali dále, musíme něco říci o vlastnostech síly.

Například, hovoříme-li o síle, vždy se mlčky předpokládá, že nejsou-li přítomna fyzikální tělesa, je síla vždy rovna nule. Najdeme-li nenulovou sílu, najdeme někde nablízku ještě něco, co je zdrojem této síly. Tento předpoklad se zcela liší od případu již výše uvedené „zřlá“. Jednou z nejdůležitějších charakteristik síly je její materiální původ a to *není* jen definice.

Newton měl ještě jedno pravidlo týkající se sil: síly mezi interagujícími tělesy jsou stejně velké a opačné – akce je rovna reakci. Ukazuje se, že toto pravidlo neplatí zcela přesně. Ani zákon  $F = m a$  neplatí zcela přesně; kdyby byl definicí, museli bychom říci, že *vždy* platí zcela přesně, ale není tomu tak.

Můžete namítnout: „Tato nepřesnost se mi nelíbí, měl bych rád všechno exaktně definováno; v některých knihách se říká, že jen taková věda je exaktní vědou, v níž je *vše* definováno“. Trváte-li na přesné definici síly, nikdy ji nedostanete! Za prvé, protože Newtonův druhý zákon neplatí přesně, za druhé, k pochopení fyzikálních zákonů je třeba pochopit i to, že všechny jsou určitou aproximací.

Každá jednoduchá idea je přibližným. Pro ilustraci si vezmeme nějaký předmět... Co je to předmět? Filozofové vždy řeknou: „No, například křeslo“. V okamžiku, kdy to řeknou, je jasné, že nevědí o čem hovoří. Co je to křeslo? Křeslo je určitá věc tamto... Určitá?, jak určitá? Čas od času se z něj vypařují atomy – ne mnoho, několik – padá na ně prach a rozpouští se v nátěru; takže podat přesnou definici křesla, přesně říci, které atomy jsou křesla a které jsou vzduch nebo které atomy jsou prach, které atomy jsou nátěr křesla – to je nemožné. Takže hmotnost křesla lze definovat jen přibližně. Stejně tak není možné definovat hmotnost jednotlivého předmětu,

21) V originále slovní hříčka force–gorce.

neboť ve světě neexistují žádné jednotlivé, osamocené předměty – každý je smíšeninou mnoha věcí, takže vždy máme co činit s řadou přiblížení a idealizací.

Celý trik spočívá v idealizaci. Ve velmi dobrém přiblížení (snad 1 ku  $10^{10}$ ) se počet atomů křesla za minutu nezmění a nejsme-li příliš přesní, můžeme si křeslo zidealizovat jako určitou věc. Stejně tak můžeme pomocí idealizace poznávat charakteristiky síly, nejsme-li příliš přesní. Můžeme být nespokojeni s přibližným pohledem na přírodu, o němž se pokouší fyzika (vždy se snaží o zvýšení přesnosti dané aproximace) a můžeme dát přednost matematické definici, ale matematické definice nemohou nikdy fungovat v reálném světě. Matematická definice bude dobrá pro matematiku, kde lze sledovat celou logiku, ale fyzikální svět je složitý. To jsme naznačili na více příkladech, jako byly vlny v oceánu nebo pohár vína. Jestliže se pokoušíme tento svět dělit na izolované části, například víno a pohár, a jestliže se snažíme hovořit o hmotnosti jedné z nich, jak můžeme vědět, co je co, když jedno se rozpouští v druhém? Již síly, působící na jednotlivé věci, obsahují přiblížení a jakýkoli systém názorů na reálný svět, aspoň dnes, musí obsahovat nějaké přiblížení.

Tento systém se zcela liší od systému matematiky, kde lze všechno definovat a pak *nevíme*, o čem je vlastně řeč. Skutečně, sláva matematiky spočívá v tom, že v ní *nemusíme říci, o čem hovoříme*. Její sláva spočívá v tom, že její zákony, důkazy a logika jsou nezávislé na tom, co „to“ je. Kdybychom měli jakoukoli jinou množinu předmětů, jež vyhovuje axiomům euklidovské geometrie, když vytvoříme nové definice a použijeme správnou logiku, budou správné i všechny důsledky, bez ohledu na to, jaké to byly předměty. Nakreslíme-li však v přírodě přímku, nebo ji vytvoříme pomocí světelného paprsku a teodolitu, jak se to dělá při mapování, je to přímka v euklidovském smyslu? Ne, děláme určitou aproximaci; nitkový kříž má určitou šířku, ale geometrická přímka nemá žádnou šířku, takže otázka, zda je, nebo není euklidovská geometrie vhodná k mapování, to je fyzikální a ne matematická otázka! Avšak z experimentálního hlediska, ne z hlediska matematiky, potřebujeme vědět, zda se Euklidovy zákony vztahují na takovou geometrii, kterou používáme při mapování; vyslovíme proto hypotézu, že ano, což celkem dobře souhlasí. Není to však přesné, neboť naše mapovací přímky nejsou skutečnými matematickými přímkami. Zda euklidovské přímky, jež jsou ve skutečnosti abstraktní, souvisí s přímkami, které používáme, to je otázka zkušenosti a nelze ji zodpovědět pouhým uvažováním.

Podobně,  $F = ma$  nemůžeme prostě nazvat definicí síly, dedukovat všechno čistě matematicky, a z mechaniky udělat matematickou teorii, když mechanika popisuje přírodu. Pomocí vhodných postulátů lze vždy sestavit matematický systém, jak to provedl Euklides, ale nemůžeme vytvořit matematiku přírody, neboť dříve či později, musíme zjistit, zda naše axiomy platí pro reálné přírodní objekty. Takto se bezprostředně dostáváme ke komplikovaným a „špinavým“ přírodním objektům, ale pomocí stále se zpřesňujících aproximací.

## 12.2 TŘENÍ

Předcházející úvahy ukazují, že ke skutečnému pochopení Newtonových zákonů je třeba diskuze o silách. Cílem této kapitoly je uvést takovou diskuzi jako určité dovršení Newtonových zákonů. Definici zrychlení a toho, co s ní souvisí, jsme již probrali; nyní je třeba se věnovat studiu vlastností síly. Tato kapitola, narozdíl od předcházející, nebude řešit problémy příliš detailně, neboť síly jsou dost složité.

Abychom začali s konkrétní silou, vezměme sílu, jež brzdí letadlo při letu vzduchem. Jaký je zákon této síly? Pro každou sílu určitě existuje zákon, takže nějaký *musíme* mít. Člověk by si těžko pomyslel, že by zákon takové síly byl jednoduchý. Představme si, co brzdí letadlo při jeho letu

vzduchem – vzduch obtékající křídla, víření za letadlem, změny proudění vzduchu podél trupu i mnohé jiné komplikace a vidíme, že to nebude jednoduchý zákon. Na druhé straně je pozoruhodný fakt, že síla brzdící letadlo je přibližně rovna konstantě násobené rychlostí umocněnou na druhou, tedy  $F \sim cv^2$ .

Jaké postavení má takovýto zákon? Není analogický s  $F = ma$ ? Vůbec ne, neboť tento zákon je v první řadě empirickou záležitostí, získanou zhruba pomocí zkoušek v aerodynamickém tunelu. Řeknete: „Dobře, ale  $F = ma$  může být i empirický zákon.“ To není důvod, proč by mezi nimi neměl být rozdíl. Tento rozdíl nespočívá v tom, že je to empirický zákon, ale v tom, jak chápeme přírodu – tento zákon je výsledným projevem celého komplexu jevů a ne v podstatě jedné věci. Čím více ho budeme zkoumat, čím přesněji budeme měřit, tím bude *komplikovanější* a nikoli jednodušší. Jinými slovy, stále podrobnějším studiem zákona brzdění letadla zjistíme, že je „chybnější“ a „chybnější“, a čím hlouběji se jím zabýváme, čím přesněji měříme, tím se pravda stává komplikovanější – takže v tom smyslu ho nepovažujeme za výsledek jednoduchého fundamentálního procesu, což souhlasí s naším původním předpokladem. Například, při velmi malé rychlosti, tak malé, že letadlo neletí, ale je třeba pomalu taženo vzduchem, změní se zákon brzdění a brzdné tření závisí na rychlosti spíše lineárně. Dalším příkladem je brzdné tření při pomalém pohybu kuličky, bubliny nebo čehokoli jiného, ve viskózní kapalině jako je med, kde je tření úměrné rychlosti, ale při rychlém pohybu, kdy za tělesem vznikají víry (med nevíří, ale voda a vzduch ano), se stává přímo úměrným druhé mocnině rychlosti ( $F = cv^2$ ) a při dalším zvyšování rychlosti začíná selhávat i tento zákon. Ti, co říkají, že dochází k malé změně koeficientu úměrnosti, se chtějí vyhnout problému. Jsou tu však ještě další velké komplikace, jež souvisí s tím, zda sílu působící na letadlo lze rozdělit na sílu působící na křídla, sílu působící na přední část letadla atd. Ano, toto lze skutečně provést, jestliže se zajímáme o napětí jednotlivých částí, ale pak musíme dostat speciální zákony pro sílu na křídlech a podobně. Je zajímavé, že síla působící na jedno křídlo, závisí na přítomnosti druhého křídla, tedy, kdybychom letadlo rozebrali a ve vzduchu nechali jen jedno křídlo, nebude tato síla stejná, jako když je letadlo celé. Je to způsobeno tím, že část větru, která naráží na přední část, se dostává až ke křídélům a změní sílu, jež na ně působí. Zdá se, že je to zázrak, že tu platí tak jednoduchý, přibližný, empirický zákon, použitelný při konstrukci letadel. Tento zákon však není toho druhu jako *základní zákony fyziky* a čím více ho studujeme, tím je komplikovanější. Studium závislosti koeficientu  $c$  na tvaru přední části letadla je, mírně řečeno, beznadějně. Jednoduchý zákon k určení tohoto koeficientu v závislosti na tvaru letadla ani neexistuje. Naopak, zákon gravitace je jednoduchý a jeho další studium jen potvrzuje jeho skutečnou jednoduchost.

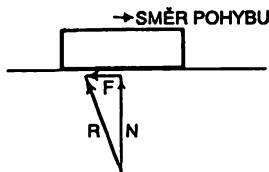
Dosud jsme hovořili o dvou druzích tření: o tření, jež vzniká při rychlém pohybu ve vzduchu a při pomalém pohybu v medu. Existuje i jiný druh tření, tzv. suché nebo smykové tření, jež vzniká při smýkání jednoho tuhého tělesa po druhém. K udržení pohybu je v tomto případě potřebná síla. Původ síly smykového tření – i to je velmi komplikovaná záležitost. Obě styčné plochy jsou na úrovni atomů nepravidelné. Existuje mnoho styčných bodů, kde se atomy jakoby silně navzájem přidržují a pak při smyku se od sebe odtrhnou, čímž vznikají vibrace. Tak nějak to musí probíhat.

Dříve se předpokládalo, že mechanismus tohoto tření je velmi jednoduchý – že plochy obsahují plno nerovností a že původ tření spočívá v překonávání takovýchto hrbolečků. To však není možné, neboť při takovém procesu by nedocházelo ke ztrátám energie. Ve skutečnosti však dochází ke spotřebě energie. Mechanismus ztráty energie je takový, že při smýkání po hrbolečcích se tyto deformují, čímž v obou tělesech vzniknou kmity, pohyby atomů a po chvíli teplo. Opět je pozoruhodné to, že toto tření lze empiricky popsat jednoduchým zákonem. Tento zákon říká,

že síla, potřebná k překonání tření při smýkání jednoho tělesa po druhém, závisí na síle kolmé k povrchu, v němž se obě tělesa dotýkají. Opravdu, ve velmi dobrém přiblížení platí, že síla tření je úměrná kolmé síle se skoro konstantním koeficientem. Platí

$$F = \mu N, \quad (12.1)$$

kde  $\mu$  je koeficient smykového tření (obr. 12.1). Ačkoli tento koeficient není roven přesně konstantě, je to dobrý empirický vztah, jenž slouží k přibližnému určení síly tření pro potřeby inženýrské praxe. Pro příliš velkou kolmou sílu nebo příliš velkou rychlost tento zákon selhává v důsledku nadměrného množství vytvářeného tepla. Je důležité si uvědomit, že každý z těchto empirických zákonů má svá omezení, mimo nichž přestává platit.



Obr. 12.1 Vztah mezi silou tření a kolmou silou při smýkání

Přibližnou správnost vztahu  $F = \mu N$  lze ukázat pomocí jednoduchého experimentu. Máme například rovinu nakloněnou pod malým úhlem  $\vartheta$  a položíme na ni kvádr s tíhou  $W$ . Potom zvětšujeme úhel nakloněné roviny, dokud se kvádr vlivem vlastní tíhy nezačne smýkat. Složka síly směrem dolů podél roviny je  $W \sin \vartheta$ . Ta se v případě, že se kvádr pohybuje rovnoměrně, musí rovnat síle tření  $F$ . Složka kolmá k rovině je  $W \cos \vartheta$ , což je kolmá síla  $N$ . Pro tyto hodnoty platí vztah  $W \sin \vartheta = \mu W \cos \vartheta$ , odkud máme  $\mu = \sin \vartheta / \cos \vartheta = \tan \vartheta$ . Kdyby tento zákon platil přesně, těleso by se začalo smýkat při určitém úhlu. Zatížíme-li kvádr zvláštním závažím, pak ačkoli se  $W$  zvětší, všechny síly vystupující v našem vztahu se zvětší v témž poměru a tíha  $W$  se vykrátí. Je-li  $\mu$  konstantní, zatížený kvádr se začne pohybovat při stejném sklonu. Při zkoumání určování úhlu  $\vartheta$  s původním zatížením zjistíme, že při zvětšení závaží se kvádr začne smýkat opět při stejném sklonu. To platí i tehdy, kdy se závaží v porovnání s původním závažím mnohonásobně zvětší. Z toho vyplývá, že koeficient tření nezávisí na hmotnosti tělesa.

V tomto experimentu je pozoruhodné, že je-li sklon roviny přibližně roven správnému úhlu  $\vartheta$ , nesmýká se kvádr rovnoměrně, ale zastavuje se. Na jednom místě se může zastavit a na jiném se může pohybovat zrychleně. Takový pohyb nasvědčuje tomu, že koeficient tření je jen přibližně konstantní a na rovině se mění od místa k místu. Takový pohyb nastane bez ohledu na to, zda je kvádr zatížen nebo ne. Tyto změny jsou způsobeny různým stupněm drsnosti roviny nebo snad špínou, rzi nebo cizími tělisky. Tabulky hodnot  $\mu$  pro „ocel na oceli“, „měď na mědi“ apod. jsou všechny špatné, neboť ignorují faktory, o nichž jsme se právě zmiňovali, a jež jsou pro správné určení  $\mu$  rozhodující. Tření „měď na měď“ je vlastně třením nečistot na povrchu mědi.

V experimentech popsánoho typu tření téměř nezávisí na rychlosti. Mnozí věří, že tření, jež je třeba překonat, abychom předmět uvedli do pohybu (statické tření), je mnohem větší než síla, potřebná k udržení pohybu (smykové tření), ale jsou-li kovy suché, je velmi obtížné určit nějaký rozdíl. Takový názor vznikl pravděpodobně na základě zkušeností s třením za přítomnosti oleje nebo mazadla, nebo například, když byla tělesa přidržována pružinami nebo nějakými pružnými podpěrkami, takže vznikla vazba.

Provést přesné kvantitativní experimenty s třením je dost obtížné a zákony tření stále nejsou zcela dobře prozkoumány navzdory mimořádné technické hodnotě takové přesné analýzy. Ačkoli zákon  $F = \mu N$  platí dost přesně pro povrchy se standardní úpravou, důvod proč má zákon právě takovou formu, není zcela znám. Abychom ukázali, že koeficient  $\mu$  téměř nezávisí na rychlosti, je třeba jemného experimentování, neboť zdánlivé tření se silně zmenší, jestliže spodní povrch velmi rychle vibruje. V experimentech při velmi vysokých rychlostech je třeba dbát, aby tělesa navzájem nevíbrovala, neboť při velkých rychlostech se tření často zdánlivě zmenší právě v důsledku vibrací. Zákon tření je rozhodně další z poloempirických zákonů, které důkladně neznáme a je překvapující, bereme-li v úvahu všechnu vynaloženou námahu, že jsme nedokázali tento jev lépe pochopit. V současnosti je opravdu takový stav, že teoretickou úvahou neumíme koeficient tření mezi dvěma látkami ani odhadnout.

Již jsme uvedli, že pokusy změřit  $\mu$  pomocí tření čistých látek, jako mědi po mědi, dají falešné výsledky, neboť dotykové plochy nejsou z čisté mědi, ale obsahují různé oxidy a jiné nečistoty. Když se pokusíme získat absolutně čistou měď, když vyčistíme a vyleštíme dotykové plochy, necháme materiál odplynovat ve vakuu a provedeme všechna možná bezpečnostní opatření, která nás jen napadnou, stále nedostaneme  $\mu$ , neboť nakloníme-li zařízení třeba do vertikální polohy, vrchní kvádr neodpadne – oba kusy mědi zcela přilnou! Koeficient  $\mu$ , jenž je menší než jedna pro poměrně tvrdé povrchy, se zvětší na několik jednotek! Důvodem takového neočekávaného chování je, že všechny stýkající se atomy jsou stejného druhu a nemohou rozeznat, že patří různým kusům mědi. Jsou-li mezi kovy jiné atomy, atomy oxidů, mazadel a složitějších kontaminovaných povrchových vrstev, atomy „vědí“, že nepatří do stejného tělesa. Když si uvědomíme, že jsou to právě síly působící mezi atomy, jež drží měď pohromadě jako tuhé těleso, mělo by nám být jasné, že najít správný koeficient tření pro čisté kovy je nemožné.

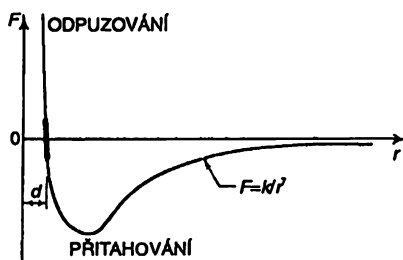
Stejný úkaz můžeme pozorovat, když provedeme jednoduchý domácí experiment se skleněnou deskou a skleněným pohárem. Pohár postavíme na sklo a posunujeme ho pomocí smyčky vlákna. Smyká se poměrně dobře a lze cítit koeficient tření. Je nepravidelný, ale přece je to koeficient. Když desku i spodek poháru navlhčíme, zjistíme, že se lepí, a když se dobře podíváme, najdeme na skle škrábance, protože voda dokáže odstranit mastnotu i jiné nečistoty, takže potom máme skutečně kontakt sklo na sklo. Tento kontakt je dobrý, pevně drží a klade rozdělení takový odpor, že se sklo vytrhává, tj. vznikají škrábance.

### 12.3 MOLEKULOVÉ SÍLY

Dále se budeme zabývat charakteristikami molekulových sil. Jsou to síly mezi atomy a jsou základním zdrojem tření. Na základě klasické fyziky nebyly molekulové síly nikdy uspokojivě vysvětleny. K jejich plnému pochopení je třeba kvantové mechaniky. Empiricky zjištěná síla mezi dvěma atomy je schématicky ilustrována na *obr. 12.2*, kde je znázorněna jako funkce vzdálenosti  $r$  mezi nimi. Existují různé případy: například, v molekule vody jsou záporné náboje posunuty k atomu kyslíku a střední polohy záporných a kladných nábojů nejsou ve stejném bodě. Na jinou blízkou molekulu vody tak působí relativně velká síla, které se říká dipól – dipólová síla. Mnohé jiné systémy však mají náboje mnohem lépe vyvážené, například molekuly kyslíku jsou plně symetrické. V tom případě, i když jsou záporné a kladné náboje rozloženy po celé molekule, středy rozložení kladných a záporných nábojů jsou totožné. Molekula, v níž nejsou tyto středy totožné, se nazývá polární molekulou a součin náboje a vzdálenosti mezi těmito středy se nazývá dipólový moment. Nepolární molekulou je taková molekula, pro níž jsou středy rozložení nábojů totožné. Ukazuje se však, že u nepolárních molekul, v nichž jsou všechny elektrické síly neutralizovány,



na ně při velkých vzdálenostech působí přitažlivá síla, která se mění nepřímo úměrně sedmé mocnině vzdálenosti, tedy  $F = k/r^7$ , kde konstanta  $k$  závisí na druhu molekul. Proč je tomu tak, to se dozvíme až při studiu kvantové mechaniky. Jde-li o dipóly, jsou síly větší. Když se atomy nebo molekuly příliš přiblíží, odpuzují se velikou silou. Tato síla způsobuje, že nepropadneme podlahou!



Obr. 12.2 Síla působící mezi dvěma atomy jako funkce jejich vzdálenosti

Molekulové síly lze poměrně snadno demonstrovat; jedním způsobem je experiment s třením skleněného poháru; jiným jsou dva zabroušené, velmi přesně rovné povrchy, které lze velmi těsně přiblížit. Příkladem takových povrchů jsou Johanssonovy měrky, jež se používají ve strojírenství jako standardy přesného měření délky. Jestliže opatrně posuneme jednu po druhé a pak vrchní nadzdvihneme, druhá k ní přilne a také se zdvihne působením molekulových sil, což přímo znázorňuje přitažlivost mezi atomy obou povrchů.

Přítom molekulové přitažlivé síly nejsou fundamentálními v tom smyslu jako gravitace; jsou výsledkem ohromného komplexu interakcí elektronů a jader v jedné molekule s elektrony a jádry druhé molekuly. Kterýkoli jednoduše vypadající vztah, který dostáváme, představuje součet složitých působení, takže ještě nemáme fundamentální jevy.

Protože molekulové síly jsou přitažlivé při velkých vzdálenostech a odpudivé při malých vzdálenostech, jak je to vidět na obr. 12.2, můžeme vytvořit pevné látky, v nichž jsou všechny atomy vzájemně přidržovány jejich přitažlivostí a oddalovány jejich odpudivostí, která se projeví, když se k sobě příliš přiblíží. Při určité vzdálenosti  $d$  (kde graf na obr. 12.2 protíná osu) jsou síly nulové, což znamená, že všechny jsou v rovnováze, takže molekuly si od sebe udržují tuto vzdálenost. Jsou-li molekuly stlačeny na vzdálenost kratší než  $d$ , projeví se odpudivé síly, jimž odpovídá část grafu nad osou  $r$ . K přiblížení molekul jen trochu blíže k sobě je třeba velké síly, neboť molekulová odpudivost se při vzdálenostech menších než  $d$  rapidně zvětšuje. Jestliže se molekuly trochu oddálí, působí na ně slabá přitažlivost, jež se zvětšuje se vzdáleností. Je-li síla, která je vzdaluje, dostatečně velká, oddělí se natrvalo – vazba se zruší.

Při sblížení molekul jen o velmi malou vzdálenost nebo při oddálení jen o velmi malou vzdálenost než je  $d$ , je odpovídající délka křivky na obr. 12.2 také velmi malá a lze ji proto aproximovat přímkou. Proto za mnohých okolností, není-li posunutí příliš velké, je síla úměrná posunutí. Tento princip je znám jako Hookův zákon nebo zákon pružnosti, jenž říká, že síla v tělese, která ho vrací do jeho původního stavu, jestliže bylo deformováno, je úměrná deformaci. Tento zákon samozřejmě platí jen pro relativně malé deformace. Je-li deformace příliš velká, těleso se roztrhne nebo rozdrtí podle druhu deformace. Velikost síly, pro niž platí Hookův zákon, závisí na materiálu. Například pro těsto nebo kyt je tato síla velmi malá, ale pro ocel je relativně velká. Hookův zákon lze pěkně demonstrovat pomocí dlouhé ocelové pružiny upevněné svisle. Vhodné závaží, zavěšené na dolním konci pružiny, způsobí mírné zkroucení drátu, což se projeví jako

malé vertikální výchylky každého závitů, které se sčítají, a když je závitů mnoho, dají velkou výchylku. Změříme-li celkové prodloužení, způsobené řekněme 100 g závaží, zjistíme, že dalších 100 g způsobí dodatečné prodloužení, jež se téměř rovná výchylce způsobené prvním 100 g závaží. Tento konstantní poměr sil a posunutí se začne měnit, když se pružina přetáhne, tj. Hookův zákon již dále neplatí.

## 12.4 FUNDAMENTÁLNÍ SÍLY. POLE

Nyní se chceme věnovat pouze zbývajícím fundamentálním silám. Nazýváme je fundamentálními v tom smyslu, že jejich zákony jsou fundamentálně jednoduché. Nejprve si vezmeme elektrickou sílu. Tělesa obsahují elektrické náboje, které jsou nesené pouze elektrony a protony. Mezi kterýmikoli dvěma elektricky nabitými tělesy působí elektrická síla, a jestliže velikosti nábojů jsou  $q_1$  a  $q_2$ , pak tato síla se mění nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti nábojů,  $F = \text{konst} \cdot q_1 \cdot q_2 / r^2$ . Pro náboje různého znamení je to stejný zákon jako zákon gravitace, ale pro náboje stejného znamení je síla odpuzivá a změnil své znamení (směr). Náboje  $q_1$  a  $q_2$  mohou být kladné nebo záporné a při konkrétní aplikaci vyjde znamení správně, jestliže nábojům správně připsáme kladné nebo záporné znamení. Síla má směr podél přímky mezi oběma náboji. Konstanta v tomto vztahu závisí na tom, v jakých jednotkách se měří síla, náboj a vzdálenost. V běžné praxi měříme náboj v coulombech, vzdálenost v metrech a sílu v newtonech. Abychom pak dostali sílu správně v newtonech, konstanta (která se z historických důvodů píše jako  $1/4\pi\epsilon_0$ ) má numerickou hodnotu

$$\epsilon_0 = 8854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \quad (\text{a})$$

neboli

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}. \quad (\text{b})$$

Zákon síly pro statické náboje tedy zní

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (12.2)$$

Nejdůležitějším nábojem v přírodě je náboj elektronu, jenž má velikost  $1,60 \cdot 10^{-19}$  coulombu. Při práci s elektrickými silami, jež působí mezi elementárními částicemi a ne mezi makroskopickými náboji, dává mnoho lidí přednost kombinaci  $(q_{\text{el}})^2 / 4\pi\epsilon_0$ , kde  $q_{\text{el}}$  je definováno jako náboj elektronu. Tato kombinace se vyskytuje často a pro zjednodušení výpočtů byla označena symbolem  $e^2$ . Její numerická hodnota je v soustavě SI rovna  $(1,52 \cdot 10^{-14})^2$ . Výhodou užití této konstanty je, že sílu mezi dvěma elektrony v newtonech lze zapsat jako  $e^2 / r^2$  ( $r$  udáváme v metrech), bez jednotlivých konstant. Elektrické síly jsou mnohem komplikovanější než naznačuje tento vztah, neboť tento vztah dává sílu mezi dvěma náboji, jen jsou-li tyto v klidu. Později si všimneme i obecnějšího případu.

Při analýze fundamentálnějších druhů sil (ne takových jako je tření, ale elektrických nebo gravitačních) vznikla zajímavá a velmi důležitá koncepce. Protože na první pohled jsou tyto síly mnohem složitější, než by vyplývalo z nepřímé úměrnosti druhé mocniny vzdálenosti, jež platí

jen pro interagující tělesa nacházející se v klidu, pro zvládnutí komplikovanějších sil, které vznikají při složitém pohybu těles, byla potřebná nějaká lepší metoda. Zkušenost ukázala, že pro analýzu sil tohoto typu je velmi užitečná koncepce „pole“. Abychom ilustrovali tuto ideu, řekněme, pro elektrické síly, předpokládejme, že máme dva elektrické náboje  $q_1$  a  $q_2$  umístěné v bodech  $P$  a  $R$ . Síla mezi náboji je pak dána jako

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 r}{r^3}. \quad (12.3)$$

Při analýze této síly pomocí koncepce pole říkáme, že náboj  $q_1$  v bodě  $P$  vytváří takový „stav“ v bodě  $R$ , že když se do  $R$  dostane náboj  $q_2$ , „cítí“ tuto sílu. Je to jeden, snad trochu podivný, způsob popisu síly. Říkáme, že sílu  $F$  působící na  $q_2$  lze napsat ve tvaru dvou částí – jako  $q_2$  vynásobené veličinou  $E$ , jež existuje bez ohledu na to, zda tam je  $q_2$  nebo není (za předpokladu, že všechny ostatní náboje zůstanou na svých místech). Říkáme, že  $E$  je „stav“ způsobený nábojem  $q_1$  a  $F$  je reakce  $q_2$  na  $E$ .  $E$  se nazývá *intenzitou elektrického pole* a je to vektor. Vztah pro intenzitu elektrického pole  $E$  v bodě  $R$ , vyvolaného nábojem  $q_1$  v bodě  $P$ , je: náboj  $q_1$  násobený konstantou  $1/4\pi\epsilon_0$  děleno  $r^2$  ( $r$  je vzdálenost z  $P$  do  $R$ ) a má směr polohového vektoru (polohový vektor  $r$  dělený svou vlastní délkou).

Vztah pro  $E$  je tedy

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 r}{r^3}. \quad (12.4)$$

Pak

$$F = q_2 E \quad (12.5)$$

vyjadřuje vztah mezi silou, polem a elektrickým nábojem v tomto poli. Co je účelem tohoto všeho? Účelem je rozdělit analýzu na dvě části. Jedna část říká, že *cosi vytváří* pole. Druhá část říká, že toto pole na něco *působí*. Takovéto rozdělení analýzy na dvě nezávislé části v mnoha případech zjednodušuje výpočet daného problému. Jde-li o mnoho nábojů, najdeme později celkové elektrické pole v bodě  $R$  od všech nábojů, a pak, když známe náboj v bodě  $R$ , najdeme sílu, jež na něj působí.

V případě gravitace můžeme provést přesně totéž. V tomto případě, kdy síla  $F = -\kappa(m_1 m_2)r/r^3$ , můžeme provést analogickou analýzu takto: Síla, působící na těleso, je rovna hmotnosti tělesa krát pole  $K$ . Síla působící na  $m_2$  je rovna hmotnosti  $m_2$  krát pole  $K$  vytvořené tělesem o hmotnosti  $m_1$ , tj.  $F = m_2 K$ . Pole  $K$ , vytvořené tělesem o hmotnosti  $m_1$ , je  $K = -\kappa m_1 r/r^3$ , přičemž má radiální směr, podobně jako v případě elektrického pole.

Oddělení jedné části od druhé není trivialita, navzdory tomu, že se takovou může zdát: Kdyby zákony síly byly jednoduché, bylo by to triviální rozdělení; jen jiný způsob zápisu stejné věci. Zákony síly jsou však tak složité, že jak se ukazuje, pole mají svou reálnou opodstatněnost, téměř nezávislou na objektech, jež je vytvářejí. Je možné dělat něco takového jako kmitat nábojem a vytvářet tak pole ve vzdálených místech. Jestliže se pak pohyb náboje zastaví, pole bude ovlivněno tím, co se dělo v minulosti, neboť interakce dvou částic není okamžitá. Je žádoucí mít nějaký způsob, jak si zapamatovat, co se stalo předtím. Jestliže síla, působící na nějaký náboj, závisí na tom, kde se jiný náboj nacházel včera, což je skutečně tak, pak potřebujeme mít možnost zaznamenat to, co se stalo včera – a takovouto vlastnost má pole. Tedy, čím jsou síly složitější, tím se pole stává reálnějším a tato technika rozdělení je čím dále, tím méně umělá.

Při analýze sil pomocí užití polí potřebujeme dva druhy zákonů platných pro pole. První – to je reakce na pole. Odtud dostáváme pohybové rovnice. Například, zákon pro chování tělesa v gravitačním poli určuje, že síla je rovna součinu hmotnosti a intenzity gravitačního pole nebo, je-li těleso i elektricky nabitě, pak reakce elektrického náboje na elektrické pole je rovno náboji krát intenzita elektrického pole. Druhou částí analýzy přírody v těchto podmínkách je formulace zákonů určujících velikost pole a to, jak vzniká. Tyto zákony někdy nazýváme *polní rovnice*. Později se o nich dovíme více než teď.

První nejpozoruhodnější skutečnost, která platí exaktně a kterou lze snadno pochopit, je ta, že celkové elektrické pole, vytvořené několika zdroji, je rovno vektorovému součtu elektrických polí způsobených prvním zdrojem, druhým zdrojem atd. Máme-li tedy množství nábojů vytvářejících pole a vytvořil-li první z nich sám od sebe pole intenzity  $E_1$ , druhý intenzity pole  $E_2$  atd., pak celkové pole dostaneme jednoduše sečtením těchto vektorů. Tento princip lze vyjádřit jako

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots \quad (12.6)$$

nebo s ohledem na uvedenou definici

$$E = \sum_i \frac{q_i r_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3}. \quad (12.7)$$

Lze tuto metodu použít i pro gravitaci? Síla působící mezi dvěma tělesy o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  je dána Newtonovým zákonem  $F = -\kappa m_1 m_2 r / r^3$ . Podle koncepce pole můžeme však říci, že  $m_1$  vytváří v celém obklopujícím prostoru takové pole  $K$ , že síla působící na  $m_2$  je

$$F = m_2 K. \quad (12.8)$$

V plné analogii s elektrickým polem

$$K_i = -\kappa \frac{m_i r_i}{r_i^3} \quad (12.9)$$

a gravitační pole vytvořené několika tělesy je

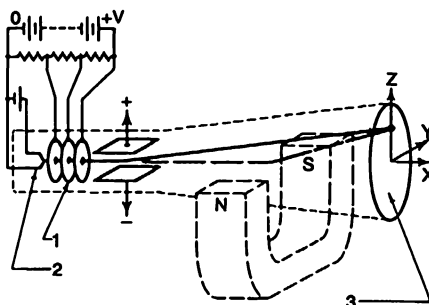
$$K = K_1 + K_2 + K_3 + \dots \quad (12.10)$$

V sedmé kapitole jsme v podstatě použili tento princip při výpočtu planetárního pohybu. Abychom dostali výslednou sílu působící na planetu, prostě jsme sečetli všechny vektory sil. Jestliže z ní vyčleníme hmotnost uvažované planety, dostaneme rovnici (12.10).

Rovnice (12.6) a (12.10) vyjadřují to, co je známo jako *princip superpozice* polí. Podle tohoto principu je celkové pole od všech zdrojů rovna součtu polí od každého zdroje. Podle dosavadních poznatků pro elektřinu tento zákon zaručeně platí, dokonce i tehdy, kdy se zákon síly zkomplikuje v důsledku pohybu nábojů. Vyskytla se i zdánlivá porušení tohoto zákona, ale podrobná analýza vždy odhalila, že šlo o přehlédnutí určitých pohybujících se nábojů. Ačkoli však pro elektrické síly platí zákon superpozice přesně, neplatí přesně pro gravitační pole, je-li toto pole příliš silné a Newtonova rovnice (12.10) podle Einsteinovy teorie gravitace je jen přibližná.

S elektrickou silou je úzce spjatý jiný druh síly – magnetická síla, jež lze také analyzovat pomocí polí. Některé kvalitativní vztahy mezi elektrickou a magnetickou silou lze ilustrovat pomocí experimentu s obrazovkou (*obr. 12.3*). Na jednom konci obrazovky je zdroj, který

emituje elektrony. V obrazovce jsou zařízení k urychlení elektronů na velkou rychlost a na jejich usměrnění do tvaru paprsku na fluorescenční stínítko na druhém konci obrazovky. Na stínítku vznikají na místě dopadu elektronů světlé skvrny, což nám umožňuje sledovat dráhu elektronů. Na cestě ke stínítku prochází elektronový paprsek úzkým prostorem podél dvou paralelních kovových destiček umístěných, dejme tomu, horizontálně. Desky je možné připojit k elektrickému napětí, takže libovolná deska může být, chceme-li, záporná. Je-li na deskách napětí, je mezi nimi elektrické pole.



Obr. 12.3 Obrazovka

1 – elektronové dělo 2 – žhavé vlákno – zdroj elektronů 3 – fluorescenční stínítko

V první části experimentu je záporné napětí na spodní desce, což znamená, že se na ni přivede více elektronů. Protože souhlasné náboje se odpuzují, světelný bod na stínítku se okamžitě posune nahoru. (Mohli bychom dokonce říci, že elektrony reagovaly na pole tím, že uhnuly směrem nahoru.) Dále změníme napětí, takže zápornou bude *horní* deska. Světelný bod na obrazovce poskočí dolů jako důsledek odpuzování mezi elektrony paprsku a elektrony na horní desce. (Znovu jsme mohli říci, že elektrony zareagovaly na pole, které má nyní opačný směr.)

V druhé části experimentu odpojíme napětí z desek a budeme zkoumat vliv magnetického pole na paprsek elektronů. Použijeme k tomu podkovovitý magnet s dostatečně vzdálenými póly, aby se obrazovka vešla mezi ně. Předpokládejme, že magnet držíme pod obrazovkou v poloze písmena *U*, s póly směrem nahoru a s částí obrazovky mezi nimi. Vidíme, že jak se od spodu přibližujeme s magnetem, světelný bod se posouvá, řekněme směrem nahoru. Zdá se, že magnet odpuzuje elektronový paprsek. Není to však tak jednoduché, neboť když magnet obrátíme, aniž bychom vyměnili vzájemnou polohu pólů, a k obrazovce se přibližujeme tentokrát shora, světelný bod se posune *nahoru*, takže elektronový paprsek *není* odpuzován, ale naopak, je přitahován. Vraťme magnet do jeho původní polohy *U* níže od obrazovky a začněme znovu. Ano, bod je stále posunutý směrem nahoru, nyní však otočme magnet o 180 stupňů kolem vodorovné osy, takže bude stále v poloze *U*, ale póly budou vzájemně vyměněny. Hle, bod nyní poskočí dolů a v této poloze bude i tehdy, kdy magnet převrátíme a přisuneme k obrazovce shora jako předtím.

Abychom pochopili toto divné chování, musíme mít nějakou novou kombinaci sil. Vysvětlíme to takto: mezi póly magnetu je *magnetické pole*. Směr tohoto pole je vždy od jednoho pólu (který si můžeme označit) k druhému. Obrácením magnetu se směr pole nezměnil, ale výměnou pólů se jeho směr změnil. Například, jestliže se elektrony pohybovaly vodorovně ve směru osy *x* a i magnetické pole bylo vodorovné ve směru osy *y*, magnetická síla, působící *na pohybující se elektrony*, měla směr osy *z*, tj. nahoru nebo dolů, podle toho, zda mělo pole směr kladné nebo záporné osy *y*.

I když ještě nemůžeme uvést přesný zákon síly mezi navzájem se libovolně pohybujícími náboji, neboť je příliš komplikovaný, uvedeme ho jen v jednom případě: *jsou-li známa pole*. Síla,

působící na nabitě těleso, závisí na jeho pohybu. Je-li těleso v klidu a působí na něho nějaká síla, tato síla je úměrná náboji a koeficient úměrnosti je to, čemu říkáme *intenzita elektrického pole*. Jestliže se těleso pohybuje, síla se může změnit a její korekce, nová přídavná síla, je přesně *lineárně závislá na rychlosti*, působí však pod *pravými úhly* k  $v$  a k druhé veličině, kterou nazýváme *magnetická indukce*  $B$ . Jestliže složky intenzity elektrického pole  $E$  jsou  $(E_x, E_y, E_z)$  a složky magnetické indukce  $B$  jsou  $(B_x, B_y, B_z)$  a jestliže složky rychlosti jsou  $(v_x, v_y, v_z)$ , pak celková elektrická a magnetická síla působící na pohybující se náboj má tyto složky

$$\begin{aligned} F_x &= q(E_x + v_y B_z - v_z B_y), \\ F_y &= q(E_y + v_z B_x - v_x B_z), \\ F_z &= q(E_z + v_x B_y - v_y B_x). \end{aligned} \quad (12.11)$$

Například, kdyby mělo magnetické pole jen složku  $B_x$  a kdyby byla jedinou složkou rychlosti  $v_x$ , pak by měla magnetická síla složku ve směru osy  $z$ , pod pravými úhly k  $B$  i k  $v$ .

## 12.5 NEPRAVÉ SÍLY

Další druh síly, o němž budeme diskutovat by bylo možné nazvat nepravou silou; říká se jim též *síly setrvačné*. V kapitole 11 jsme hovořili o dvou lidech, Petrovi a Pavlovi, kteří používali různé souřadnicové soustavy. Nechtě polohy částice, které naměřil Petr a Pavel jsou  $x$  a  $x'$ . Mezi nimi platí

$$x = x' + s, \quad y = y', \quad z = z',$$

kde  $s$  je vzájemné posunutí soustav. Předpokládáme-li, že zákony pohybu platí pro soustavu, v níž se nachází Petr, jak budou vypadat pro soustavu, v níž je Pavel? Nejprve máme

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{ds}{dt}.$$

Dříve jsme uvažovali o případě, kdy  $s$  bylo konstantní a zjistili jsme, že  $s$  vůbec neovlivňovalo zákony pohybu, neboť  $ds/dt = 0$ . Proto byly v konečném důsledku fyzikální zákony v obou soustavách stejné. Můžeme si však vzít jiný příklad, kdy  $s = ut$ , kde  $u$  je rovnoměrná přímochařá rychlost. Pak  $s$  není konstanta a  $ds/dt$  není nula, ale je rovno konstantě  $u$ . Ale zrychlení  $d^2x/dt^2$  je stále stejné jako  $d^2x'/dt^2$ , neboť  $du/dt = 0$ . To je důkaz principu, který jsme použili v kapitole 10, že pohybujeme-li se rovnoměrně přímochaře, jsou fyzikální zákony stejné, jako kdybychom byli v klidu. To je Galileova transformace. My si však chceme probrat zajímavý případ, kdy  $s$  je ještě komplikovanější, řekněme, že  $s = at^2/2$ . Pak  $ds/dt = at$  a  $d^2s/dt^2 = a$ , což je rovnoměrně zrychlený pohyb. V ještě komplikovanějším případě může být  $a$  obecnou funkcí času. Znamená to, že i když z hlediska Petra budou mít zákony síly tvar

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$

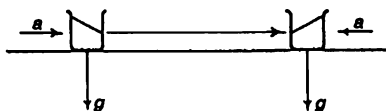
z Pavlova hlediska budou tedy ve tvaru

$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = F_x - ma.$$

Protože Pavlova soustava souřadnic se zrychluje s ohledem na Petrův systém, Pavel si bude muset svou sílu opravit o hodnotu  $ma$ , jestliže chce, aby byl Newtonův zákon splněn. Jinými slovy, vyskytuje se zde nová tajemná síla neznámého původu, která vzniká z toho důvodu, že Pavel má špatnou soustavu souřadnic. Je to příklad nepravé síly. Další příklady se vyskytují v *rotujících* souřadnicových soustavách.

Jedním z nich je tzv. „odstředivá síla“. Pozorovatel, nacházející se v rotující souřadnicové soustavě, například v otáčející se kabině, objeví tajemnou sílu (kterou nelze vysvětlit na základě žádného známého zdroje síly), jež vrhá předměty směrem ven, ke stěnám. Takové síly existují prostě proto, že pozorovatel se nenachází v newtonovské souřadnicové soustavě, jež je nejjednodušší souřadnicovou soustavou.

Nepravou sílu lze ilustrovat pomocí zajímavého experimentu, při němž po stole posouváme se zrychlením pohár s vodou. Na vodu působí tíha směrem dolů, ale v důsledku horizontálního zrychlení působí na ni i horizontální nepravá síla ve směru opačném ke zrychlení. Výslednice gravitační síly a nepravé síly svírá s vertikálou určitý úhel. Po dobu zrychlování bude povrch vody k této výslednici kolmý. Hladina bude svírat s povrchem stolu stejný úhel, přičemž voda na zadní straně poháru bude vyšší. Když přestaneme posouvat pohár, a ten se v důsledku tření začne zpomalovat, nepravá síla změní svůj směr a voda bude sahat výše na předním okraji poháru (*obr. 12.4*).



Obr. 12.4 Ilustrace nepravé síly

Velmi zajímavou vlastností nepravých sil je, že jsou vždy úměrné hmotnostem; totéž platí pro gravitaci. Existuje proto možnost, že i *sama gravitace je nepravou silou*. Není snad možné, aby gravitace existovala prostě proto, že nemáme správnou souřadnicovou soustavu? Konec konců, sílu úměrnou hmotnosti můžeme dostat vždy, když si představíme, že těleso se zrychluje. Například člověk, nacházející se v uzavřené kabině klidně ležící na Zemi, zjišťuje, že je přitahován k podlaze silou úměrnou své hmotnosti. Kdyby ale nebylo Země a kabina by byla v klidu, člověk by se v ní vznášel v prostoru. Na druhé straně, kdyby nebylo Země a kdyby něco se zrychlením  $g$  zvedalo kabinu, člověk v kabině by při fyzikální analýze zjistil nepravou sílu, která ho přitlačuje k podlaze, právě tak jako to dělá gravitace.

Einstein vyslovil známou hypotézu, že zrychlení imitují gravitaci, že síly v důsledku zrychlení (tj. nepravé síly) *není možné rozlišit* od gravitačních sil; nelze říci, jakou část z dané síly tvoří gravitace a jakou část tvoří nepravá síla.

Považovat gravitaci za nepravou sílu a říci, že dolů nás přitahuje proto, že jsme urychlováni nahoru, se může zdát správné, ale co potom s lidmi v Austrálii, na druhé straně Země – ti jsou také urychlováni? Einstein objevil, že gravitační sílu lze považovat za nepravou sílu současně jen v jednom bodě a svými úvahami dospěl k názoru, že *geometrie světa* je složitější, než obyčejná euklidovská geometrie. Naše diskuse o problému gravitace je jen kvalitativní a neklade si za cíl nic více, než načrtnout základních myšlenek. Abychom aspoň přibližně znázornili, jak může být gravitace výsledkem nepravých sil, uvedeme čistě geometrickou ilustraci, jež neodpovídá reálné situaci. Předpokládejme, že žijeme v dvojrozměrném světě a nic nevíme o existenci třetího rozměru. Mysi myslíme, že žijeme na rovině, ale nechť to je ve skutečnosti povrch koule. Dále předpokládejme, že podél povrchu vystřelíme nějaké těleso, na které nepůsobí žádné síly. Kam poletí? Bude se zdát,

že letí po přímce, ale protože musí zůstat na povrchu koule, kde nejkratší vzdáleností mezi dvěma body je oblouk, hlavní kružnice poletí po tomto oblouku. Vystřelíme-li podobně jiné těleso, ale v jiném směru, poletí podél jiné hlavní kružnice. Protože si myslíme, že žijeme na rovině, budeme očekávat, že dráhy těchto dvou těles se budou od sebe s rostoucím časem lineárně vzdalovat, ale přesným pozorováním zjistíme, že po průletu dost velké vzdálenosti se začnou znovu k sobě přibližovat, jako kdyby se vzájemně přitahovala. Ona se však navzájem nepřitahují – jen geometrie je jaksi „divná“. Tato ilustrace nepopisuje korektně co je „divné“ na euklidovské geometrii, znázorňuje jen to, že když dostatečně pozměníme geometrii, je možné, že celá gravitace nějak souvisí s neprávnými silami; a to je základní myšlenka Einsteinovy teorie gravitace.

## 12.6 JADERNÉ SÍLY

Tuto kapitulu uzavřeme krátkou diskuzí o jediných dalších známých silách – *jaderných silách*. Působí v jádrech atomů a ačkoli se o nich hodně hovoří, nikdo nikdy ještě nevypočítal sílu působící mezi dvěma jádry. Zákon jaderných sil není v současnosti znám. Tyto síly mají velmi krátký dosah, přibližně takový, jako je rozměr jádra, asi  $10^{-15}$  m. Pro tak malé částice a na tak malých vzdálenostech platí jen zákony kvantové mechaniky, ne zákony newtonovské. Při analýze atomových jader nepracujeme s představou sil; pojem síly můžeme nahradit pojmem energie interakce dvou částic, o čemž si pohovoříme později. Každý vztah, který lze napsat pro jaderné síly, je jen velmi hrubou aproximací, jež zanedbává množství komplikací. Jedním takovým vztahem může být tento: síly v jádře se nemění nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti, ale zanikají exponenciálně s  $r$ , jak to vyjadřuje vztah

$$F = \frac{1}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right),$$

kde  $r_0$  je rovno vzdálenosti řádu  $10^{-15}$  metru. Tedy síly zmizí, jakmile se částice vzdálí na větší vzdálenost, ačkoli v dosahu  $10^{-15}$  m jsou velmi silné. Podle současného chápání jsou zákony jaderných sil velmi složité; neznáme jednoduchý způsob, jak je pochopit a celý problém analýzy fundamentálních procesů, jež za nimi stojí, není vyřešen. Pokusy najít řešení vedly k objevům mnoha neobyčejných částic, jako například  $\pi$ -mezonů, ale podstata těchto sil zůstává nejasná.<sup>22)</sup>

22) Právě Feynmanovou zásluhou úsilí o pochopení jaderných sil značně pokročilo; přivedlo například k představě o kvarkovém modelu jaderných částic. (Pozn. red.)

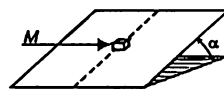


# PŘÍKLADY A CVIČENÍ

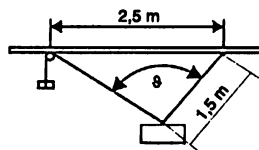
- 12.1 ■ Cihla o hmotnosti  $m$  klouže po nakloněné rovině, jež svírá s vodorovnou rovinou úhel  $\theta$ . Je-li koeficient smykového tření  $\mu < \tan \theta$ , s jakým zrychlením se bude cihla pohybovat
- vzhůru po rovině,
  - dolů po rovině,
  - pod úhlem  $\varphi$  k vodorovné přímkce na rovině. (Představte si, že k rovině je přiloženo hladké pravítko, podél něhož se cihla pohybuje. Na nakloněné rovině zaveďte souřadnice  $x$  a  $y$ ,  $x$  necht' míří horizontálně a  $y$  vzhůru po nakloněné rovině.

- 12.2 ■ Necht' v předcházející úloze  $m = 1$  kg,  $\mu = 0,22$  a  $\theta = 30^\circ$ . Pohybuje-li se cihla vzhůru po rovině s počáteční rychlostí 3,00 m/s, určete a) jak daleko vzhůru se dostane, b) jak dlouho jí bude trvat pohyb vzhůru a následný pohyb dolů po rovině, c) kolik energie za tu dobu ztratí.

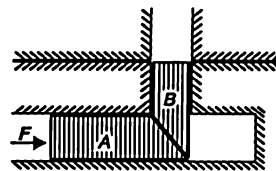
- 12.3 ■ Těleso o hmotnosti  $M$  leží v klidu na drsné rovině, jež svírá s vodorovnou rovinou úhel  $\alpha$  (viz obrázek).
- Koeficient statického tření  $\mu = 2 \tan \alpha$ . Najděte nejmenší vodorovnou sílu  $F$ , jež uvede těleso do pohybu.
  - V jakém směru se těleso začne pohybovat?



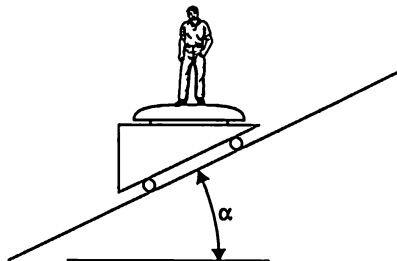
- 12.4 ■ Břemeno o hmotnosti 1 kg visí na dvou nitích. První nit o délce 1,5 m je přivázána ke kroužku, jenž může klouzat po vodorovné tyči (viz obrázek). Koeficient tření mezi kroužkem a tyčí je roven 0,75. Druhá nit je vedena přes kladku upevněnou k tyči ve vzdálenosti 2,5 m nalevo od kroužku a na jejím konci visí závažíčko. Hmotnost tohoto závažíčka postupně zvětšujeme, dokud se kroužek nedostane do pohybu. Určete
- hmotnost závažíčka  $m$ , při níž se kroužek začne pohybovat,
  - napětovou sílu nití o délce 1,5 m a úhel  $\vartheta$ .



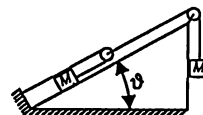
- 12.5 ■ Na obrázku vidíme v řezu nejjednodušší vertikální zámek. Jeho spodní část  $A$  se může pohybovat ve vodorovné vodicí dutině. Stěny dutiny jsou dokonale hladké, ale roviny dotyku částí  $A$  a  $B$  nakloněné pod úhlem  $45^\circ$  k vodorovné rovině jsou drsné a koeficient tření mezi nimi je roven  $\mu$ . Jakou nejmenší sílu  $F$  musíme použít, abychom uvedli části zámku do pohybu, je-li hmotnost části  $B$  rovna  $m$ ?



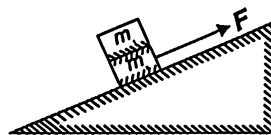
- 12.6 ■ Jeden neopatrný mladík provádí následující nebezpečný pokus. Postavil deskové lékařské váhy na dřevěnou podložku s válečky, jež se může valit bez tření po nakloněné rovině (viz obrázek). Pak se postavil na váhy a rozjel se dolů, při čemž stále sleduje údaje vah. Jaký je náklon šikmé roviny, ukazují-li váhy údaj 120 liber a mladík má hmotnost 160 liber?



- 12.7 ■ V zařízení na obrázku klouže břemeno  $M_1$  bez tření po nakloněné rovině; přitom  $\vartheta = 30^\circ$ ,  $M_1 = 400$  g,  $M_2 = 200$  g. Najděte zrychlení břemene  $M_2$  a napětovou sílu nití.

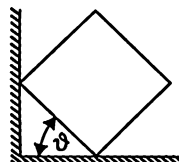


- 12.8 ■ Délka nakloněné roviny na obrázku je 130 cm a její horní konec je o 50 cm výše než dolní. Na této rovině leží na sobě dva kvádry o hmotnostech  $m_1 = 200$  g,  $m_2 = 60$  g. Koeficient statického tření mezi kvádry je roven 0,5 a koeficient smykového tření mezi rovinou a spodním kvádrem 0,33. Spodní kvádr je tažen vzhůru po rovině silou  $F$  rovnoběžnou s rovinou.

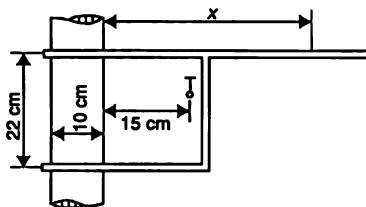


- a) Čemu je rovno zrychlení spodního kvádrů v okamžiku, kdy horní kvádr z něho právě začíná sklouzávat?  
 b) Jaká je velikost síly  $F$  než začne toto sklouzávání?

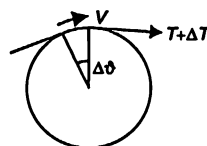
- 12.9 ■ Krychle o hmotnosti  $M$  je opřena o stěnu v nakloněné poloze, jak je vidět na obrázku. Mezi krychlí a stěnou není tření, mezi krychlí a podlahou je koeficient tření  $\mu$ , takový, že právě udržuje krychli, aby nezačala sklouzávat. Platí-li  $0 < \vartheta < 45^\circ$ , najděte tuto nejmenší hodnotu koeficientu tření jako funkci úhlu  $\vartheta$ . Ověřte si svůj výsledek tak, že prozkoumáte limitní případy  $\vartheta \rightarrow 0$  a  $\vartheta \rightarrow 45^\circ$ , a vypočítejte úhel  $\vartheta$ , pro nějž  $\mu = 1$ .



- 12.10 ■ Jednoduchá úchytka k zavěšování nepříliš těžkých břemen, kterou je možno snadno upevnit v potřebné výšce, je znázorněna na obrázku, i s udanými rozměry. Je možno ji posouvat podél svislé tyče a v dané poloze je udržována silou tření. Je-li koeficient statického tření mezi úchytkou a tyčí roven 0,30 a tíha závaží zavěšeného ve vzdálenosti  $x$  od tyče je 50 krát větší než tíha samotné úchytky, určete minimální vzdálenost  $x$ , při níž úchytka nebude sklouzávat po tyči.



- 12.11 ■ a) Provázek pohybující se nevelkou rychlostí  $v$  se tře o válcový sloup (viz obr.). Úhel  $\Delta\vartheta$  je mnohem menší než 1 radián. Je-li napěťová síla provázku na jedné straně sloupu rovna  $T + \Delta T$  a na druhé straně  $T$ , čemu je roven rozdíl sil  $\Delta T$  vznikající díky tření?  
 b) Zintegrujte výsledek pro  $\Delta T$  a najděte poměr napěťových sil na obou koncích provázku, jestliže provázek obepíná sloup v konečném úhlu  $\alpha$  a je napjat tak, že začíná prokluzovat.



- 12.12 ■ Těleso se nachází u základny dokonale hladké desky délky  $s = 1$  m nakloněné pod úhlem  $\vartheta = 20^\circ$  k vodorovné rovině. Deska se začne pohybovat s vodorovným zrychlením  $a = 4,00$  m/s<sup>2</sup>. Za jakou dobu se těleso dostane k hornímu okraji desky?

- 12.13 ■ Udejte fyzikální rozměr intenzity elektrického pole  $E$ , magnetické indukce  $B$ , poměru  $E/B$  a intenzity gravitačního pole  $K$ .

- 12.14 ■ Nabitá částice se pohybuje v rovině kolmé k magnetickému poli  $B$ . Ukažte, že pohyb probíhá po kružnici a najděte poloměr trajektorie.

- 12.15 ■ Najděte periodu pohybu z předcházející úlohy. Je nutno ji znát ke konstrukci cyklotronu. Proč?

- 12.16 ■ Částice o hmotnosti  $m$  a náboje  $q$  se pohybuje v elektrickém poli s jedinou nenulovou složkou  $E_y$  a magnetickém poli s jedinou nenulovou složkou  $B_z$ .

a) Napište pohybovou rovnici částice.

b) Proveďte se souřadnicemi částice Galileiho transformaci  $x' = x - (E_y/B_z)t$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ .

c) Jaký závěr odtud můžete udělat o pohybu částice ve vzájemně kolmých elektrickém a magnetickém poli?

# 13

# P

# Práce a potenciální energie

---

## 13.1 ENERGIE PADAJÍCÍHO TĚLESA

## 13.2 PRÁCE VYKONANÁ GRAVITACÍ

## 13.3 SČÍTÁNÍ ENERGIÍ

## 13.4 GRAVITAČNÍ POLE VELKÝCH TĚLES

### 13.1 ENERGIE PADAJÍCÍHO TĚLESA

V kapitole 4 jsme se zabývali zachováním energie. Přitom jsme nepoužili Newtonovy zákony, přestože je velmi zajímavé pozorovat, jak se energie podle těchto zákonů zachovává. Pro přehlednost začneme s nejjednodušším možným příkladem a postupně přejdeme k složitějším příkladům.

Nejjednodušším příkladem zachování energie je těleso padající svisle dolů, pohybující se ve vertikálním směru. Těleso, jež mění svoji výšku jen na základě gravitace, má při svém pohybu během pádu kinetickou energii  $T$  (nebo  $W_k$ ) a potenciální energii  $mgh$ , označenou  $U$  (nebo  $W_p$ ), jejichž součet se nemění:

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgh = \text{konst.},$$

$$W_k + W_p = \text{konst.} \quad \text{nebo} \quad T + U = \text{konst.} \quad (13.1)$$

Nyní bychom chtěli dokázat, že toto tvrzení je správné. Co tím myslíme, že dokážeme správnost? Z druhého Newtonova zákona lze snadno určit pohyb tělesa a zjistit, jak se mění jeho rychlost v závislosti na čase, tj. že roste úměrně s časem a výška tělesa se mění s druhou mocninou času. Když tedy měříme výšku od bodu, kde bylo těleso v klidu, není nic zvláštního na tom, že výška je rovna druhé mocnině času vynásobené několika konstantami. Ale podívejme se na to trochu blíže.

Derivováním kinetické energie podle času a použitím Newtonových zákonů vypočítáme přímo z druhého Newtonova zákona, jak by se měla měnit kinetická energie. Derivováním  $(1/2) m v^2$  podle času dostáváme

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m 2 v \frac{dv}{dt} = m v \frac{dv}{dt}, \quad (13.2)$$

## ENERGIE PADAJÍCÍHO TĚLESA

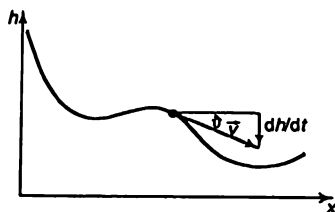
neboť  $m$  považujeme za konstantu. Z druhého Newtonova zákona vyplývá, že  $m(dv/dt) = F$ , takže

$$\frac{dT}{dt} = Fv. \quad (13.3)$$

Obecně dostáváme  $F \cdot v$ , ale v našem jednorozměrném případě můžeme ponechat součin velikosti síly a rychlosti.

V tomto našem jednoduchém příkladě je síla konstantní, je rovna  $-mg$ , má vertikální směr (znaménko minus znamená, že působí směrem dolů) a rychlost je samozřejmě dána změnou vertikální polohy nebo výšky  $h$  s časem. To znamená, že míra změny kinetické energie je  $-mg(dh/dt)$ , což není kupodivu nic jiného, než rychlost změny veličiny  $mgh$ . Proto s rostoucím časem jsou si změna kinetické energie a změna veličiny  $mgh$  rovny, až na znaménko, takže součet obou veličin zůstává konstantní.

Na základě druhého Newtonova zákona jsme ukázali, že pro konstantní síly se energie zachovává, jestliže ke kinetické energii  $(1/2)mv^2$  přičteme potenciální energii  $mgh$ . Zkoumejme dále tento poznatek, zda ho lze zobecnit a zda může dále prohloubit naše chápání. Platí jen pro volně padající těleso nebo i obecně? Na základě naší diskuze o zachování energie očekáváme, že by měl platit pro libovolné těleso, jež se pod vlivem gravitace pohybuje bez tření po trajektorii zjednoho bodu do druhého (obr. 13.1). Dostane-li se těleso z původní výšky  $H$  do výšky  $h$ , měl by znovu platit stejný vztah, ačkoli nyní není směr rychlosti vertikální. Rádi bychom věděli, proč zákon zachování energie ještě platí.



Obr. 13.1 Těleso pohybující se bez tření po zakřivené trajektorii pod vlivem gravitační síly

Proveďme stejnou analýzu. Najdeme změnu kinetické energie v závislosti na čase. Opět bude rovna  $mv(dv/dt)$ , ale  $m(dv/dt)$  je rovno změně hybnosti, tj. síle ve směru pohybu – tečné síle  $F_t$ . Tedy

$$\frac{dT}{dt} = mv \frac{dv}{dt} = F_t v.$$

Velikost rychlosti je tedy dána změnou vzdálenosti podél křivky,  $ds/dt$  a tečná síla  $F_t$  není rovna  $mg$ , ale je slabší v poměru vzdálenosti  $ds$  podél křivky k vertikální vzdálenosti  $dh$ . To znamená

$$F_t = -mg \sin \vartheta = -mg \frac{dh}{ds},$$

tedy

$$F_t \frac{ds}{dt} = -mg \frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = -mg \frac{dh}{dt},$$

neboť  $ds$  se vykrátí. Tak, jako v předchozím případě, i nyní jsme dostali veličinu  $-mg(dh/dt)$ , jež je rovna změně  $mgh$ .

Aby bylo zcela jasné, jak se zákon zachování energie uplatňuje v mechanice obecně, uvedeme několik pojmů, jež nám pomohou při jeho analýze.

Nejdříve se budeme zabývat změnou kinetické energie v obecném trojrozměrném případě. V případě pohybu v trojrozměrném prostoru je kinetická energie

$$T = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad T = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Derivováním podle času dostaneme tři hrozivě vypadající členy

$$\frac{dT}{dt} = m \left( v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right). \quad (13.4)$$

Ale  $m(dv_x/dt)$  je složka síly  $F_x$ , jež působí na těleso ve směru osy  $x$ , takže pravá strana rovnice (13.4) je rovna  $F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$ . Podle vektorové analýzy je to rovno  $F \cdot v$ , a proto

$$\frac{dT}{dt} = F \cdot v. \quad (13.5)$$

Tento výsledek lze rychleji odvodit takto: jestliže  $a$  a  $b$  jsou dva vektory, které mohou záviset na čase, pak derivace  $a \cdot b$  je rovna

$$\frac{d(a \cdot b)}{dt} = a \cdot \frac{db}{dt} + \frac{da}{dt} \cdot b. \quad (13.6)$$

Použijeme-li tento vztah pro  $a = b = v$ , dostaneme

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv \cdot v\right)}{dt} = m \frac{dv}{dt} \cdot v = F \cdot v = F \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (13.7)$$

Protože pojem kinetické energie a energie vůbec je tak důležitý, dostaly důležité členy v těchto rovnicích své názvy. Jak víme,  $(1/2)mv^2$  se nazývá *kinetická energie*,  $F \cdot v$  je *výkon*, síla působící na těleso vynásobená rychlostí tělesa (skalární součin) je výkon dodaný tělesu silou. Takže máme velkolepou větu: *rychlost změny kinetické energie tělesa je rovna výkonu vynaloženému silami působícími na těleso.*

Abychom dobře prostudovali zákon zachování energie, musíme jít s analýzou ještě dál. Určíme změnu kinetické energie za velmi krátkou dobu  $dt$ . Vynásobíme-li obě strany rovnice (13.7)  $dt$ , zjistíme, že diferenciální změna kinetické energie je rovna skalárnímu součinu síly a diferenciálu dráhy

$$dT = F \cdot ds. \quad (13.8)$$

Jestliže tento výraz integrujeme, dostaneme

$$\Delta T = \int_1^2 F \cdot ds. \quad (13.9)$$

## PRÁCE VYKONANÁ GRAVITACÍ

Co to znamená? Znamená to, že pohybuje-li se těleso pod vlivem síly libovolně z jednoho bodu do druhého, je změna kinetické energie rovna integrálu složky síly podél dráhy, vynásobené diferenciálem posunutí  $ds$ , přičemž se integruje od prvního bodu k druhému. Tento integrál má svůj název; je to *práce vykonaná silou působící na těleso*. Z toho je hned zřejmé, že *výkon je roven práci vykonané za jednotku času*. Vidíme také, že k vykonané práci přispívá jen složka síly *ve směru pohybu*. V našem jednoduchém příkladě byly pouze vertikální síly s jedinou složkou, řekněme  $F_z$ , rovnající se  $-mg$ . Při těchto podmínkách nezáleží na tom, jak se těleso pohybuje. Například při pádu po parabole nezůstane z výrazu  $F \cdot ds$ , což můžeme zapsat jako  $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ , nic kromě  $F_z dz = -mg dz$ , neboť ostatní složky síly jsou nulové. Proto v našem případě

$$\int_1^2 F \cdot ds = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mg(z_2 - z_1). \quad (13.10)$$

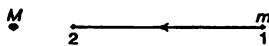
Opět vidíme, že potenciální energie závisí jen na *vertikální výšce*, z níž těleso padá.

Několik slov o jednotkách. Chceme-li vypočítat práci, násobíme sílu vzdáleností. Protože síla se měří v newtonech a vzdálenost v metrech, měří se práce v jednotkách *newton krát metr* ( $N \cdot m$ ). Lidé neradi používají newtonmetr, raději říkají *joule* [J]. Práce se měří v joulech. Výkon je potom joule za sekundu, což označujeme jako *watt* [W]. Vynásobíme-li výkon časem, dostaneme vykonanou práci. Práce vykonaná elektrickým proudem je rovna wattu vynásobenému časem. Z toho pocházejí názvy jako kilowatthodina, což je 1000 wattů krát 3600 sekund, nebo  $3,6 \cdot 10^6$  joulů.

Nyní si vezmeme jiný příklad zákona zachování energie. Uvažujme těleso, jež má na počátku kinetickou energii, pohybuje se velmi rychle a třením se smýká po podložce. Zastaví se. Kinetická energie na počátku *není* nulová, ale na konci *je*. Síly konají práci, neboť kdekoli se vyskytuje tření, je vždy složka síly v opačném směru než pohyb a energie se postupně ztrácí. Uvažujme nyní těleso upevněné na kyvadle, které bez tření kmitá v gravitačním poli ve vertikální rovině. To je jiný případ, neboť pohybuje-li se těleso nahoru, síla směřuje dolů, a pohybuje-li se těleso pohybuje směrem dolů, i síla směřuje dolů, takže  $F \cdot ds$  má určité znaménko při pohybu nahoru a opačné při pohybu dolů. Každému bodu z části dráhy směřující dolů odpovídá bod části dráhy směřující nahoru, v němž má součin  $F \cdot ds$  hodnotu, co do velikosti, přesně stejnou, ale co do znaménka, opačnou, takže celkový výsledek integrace bude v tomto případě nulový. Kinetická energie, s níž se těleso vrací do nejnižšího bodu, je tedy stejná, jako když ho opouštělo. To je princip zachování energie. (Všimněme si, že když působí síly tření, na první pohled se zdá, že energie se nezachovává. Znamená to, že je třeba najít jinou *formu* energie. Ve skutečnosti se v tělese, jež se pohybuje s třením po jiném tělese, vyvíjí *teplo*, ale zatím předpokládáme, že to nevíme.)

## 13.2 PRÁCE VYKONANÁ GRAVITACÍ

Další problém, jímž se budeme zabývat, je mnohem těžší. Týká se případu, kdy síly nejsou stálé a svislé, jako byly předtím. Budeme například zkoumat pohyb planety kolem Slunce nebo družice kolem Země.



Obr. 13.2 Těleso o malé hmotnosti  $m$  padá pod vlivem gravitace na těleso o velké hmotnosti  $M$

Nejdříve vezmeme v úvahu pohyb tělesa, které je v nějakém počátečním bodě 1 a řekněme, že padá *přímo* na Slunce nebo na Zemi (*obr. 13.2*). Bude za těchto okolností platit zákon zachování energie? Jediný rozdíl proti předcházejícímu případu je ten, že nyní není síla konstantní, ale *mění se* podél dráhy.<sup>23)</sup> Jak víme, síla je rovna součinu  $\kappa M/r^2$  a hmotnosti  $m$  pohybujícího se tělesa. Samozřejmě, když těleso padá na Zemi, narůstá se *zvětšující se* dráhou jeho kinetická energie, právě tak jako v případě, kdy jsme změnu síly s výškou neuvážovali. Je otázkou, zda lze najít jiné vyjádření pro potenciální energii (odlišné od  $mgh$ ), takovou funkci vzdálenosti od Země, že zákon zachování energie bude stále splněn.

Tento jednorozměrný případ lze snadno zvládnout, neboť víme, že změna kinetické energie je rovna integrálu od jednoho konce dráhy k druhému  $z - \kappa Mm/r^2$  vynásobeného změnou polohy  $dr$

$$T_2 - T_1 = - \int_1^2 \kappa Mm \frac{dr}{r^2}. \quad (13.11)$$

V tomto případě nevystupuje ve vztahu žádný kosinus, neboť síla i změna polohy mají stejný směr. Integrál  $z dr/r^2$  není těžké vypočítat, je roven  $-1/r$ , takže

$$T_2 - T_1 = + \kappa Mm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (13.12)$$

Tak jsme dostali nové vyjádření pro potenciální energii. Vztah (13.12) říká, že veličina  $(1/2)mv^2 - \kappa Mm/r$  vypočítaná v bodě 1 nebo 2 nebo v kterémkoli jiném místě, má konstantní hodnotu.

Nyní máme vztah pro výpočet potenciální energie při vertikálním pohybu v gravitačním poli. Objevuje se zajímavý problém. Lze v gravitačním poli dosáhnout *věčného pohybu*? Gravitační pole se mění, na různých místech má různý směr a různou sílu. Lze najít pevnou dráhu bez tření, po níž bychom těleso zvedli z nějakého bodu do jiného bodu, pak ho přenesli po oblouku do dalšího bodu, spustili ho o určitou vzdálenost, dále jím pohnuli pod určitým sklonem nějakým jiným směrem atd. tak, aby po návratu do výchozího bodu vykonala gravitační síla určitou práci a kinetická energie tělesa se *zvětšila*? Lze vyznačit takovou dráhu, po níž se těleso po návratu bude pohybovat o něco rychleji než předtím, takže vytvoří věčný pohyb? Protože perpetuum mobile není možné, mělo by jít dokázat, že ani toto není možné. Měli bychom dokázat tvrzení: Neexistuje-li tření, těleso by se nemělo vrátit ani větší ani menší rychlostí – mělo by být schopné pohybovat se jen dokola po této uzavřené dráze. Vyjádřeno jinak: *Celková práce vykonaná gravitačními silami po dráze celého cyklu, musí být rovna nule*, neboť kdyby nebyla rovna nule, bylo by možné takovýmto kruhovým pohybem získávat energii. (Ukáže-li se, že tato práce je menší než nula, že by se tedy po proběhnutí jednoho cyklu rychlost zmenšila, stačí, abychom prostě změnili směr pohybu na opačný, neboť síly závisí jen na poloze, ne na směru pohybu. Bude-li v jednom směru práce kladná, v opačném směru záporná, tedy půjdeme-li tím či oním směrem, bude nenulová hodnota znamenat věčný pohyb.)

Skutečně je tato práce rovna nule? Pokusme se ukázat, že ano. Nejprve více či méně objasníme, proč je rovna nule a pak to trochu podrobněji prozkoumáme matematicky. Předpokládejme, že použijeme jednoduchou dráhu, jako je dráha na *obr. 13.3*, kde se malé těleso pohybuje

<sup>23)</sup> V českém fyzikálním názvosloví se v uvedeném smyslu nepoužívá termín dráha, ale trajektorie (pod dráhou se rozumí délka trajektorie). Přesto však vzhledem k živému a poněkud kolokviálnímu charakteru výkladu ponecháme těleso pohybovat se po „dráze“. (Pozn. red.)

## PRÁCE VYKONANÁ GRAVITACÍ

z bodu 1 do bodu 2, pak po oblouku do bodu 3, dále do bodu 4, potom do bodů 5, 6, 7, 8 a nakonec zpět do bodu 1. Všechny úseky dráhy jsou buď radiální nebo jsou to oblouky kružnic se středem v hmotnosti  $M$ . Jaká práce se vykoná při pohybu tělesa podél této dráhy? Mezi body 1 a 2 je to  $\kappa Mm$  vynásobeno rozdílem  $1/r$  mezi těmito body

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 -\kappa Mm \frac{dr}{r^2} = \kappa Mm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

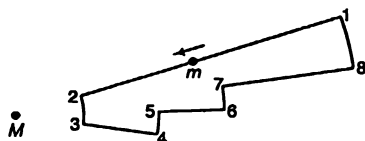
Z bodu 2 do bodu 3 svírá síla s dráhou přesně pravé úhly, takže  $W_{23} = 0$ . Práce z bodu 3 do bodu 4 je

$$W_{34} = \int_3^4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \kappa Mm \left( \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} \right).$$

Podobně zjistíme, že  $W_{45} = 0$ ,  $W_{56} = \kappa Mm(1/r_6 - 1/r_5)$ ,  $W_{67} = 0$ ,  $W_{78} = \kappa Mm(1/r_8 - 1/r_7)$ . Tedy

$$W = \kappa Mm \left( -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_7} + \frac{1}{r_8} \right).$$

Všimněme si však, že  $r_2 = r_3$ ,  $r_4 = r_5$ ,  $r_6 = r_7$ ,  $r_8 = r_1$ . Proto  $W = 0$ .



Obr. 13.3 Uzavřená dráha v gravitačním poli

Samozřejmě bychom mohli namítnout, zda to není příliš jednoduchá křivka. Co se stane, použijeme-li nějakou reálnou křivku? Zkusme to s takovouto křivkou. Především bychom rádi poznamenali, že jakoukoli křivku lze dostatečně dobře napodobit pomocí sledu pilových zubů (obr. 13.4), a tak bychom mohli naše tvrzení dokázat, avšak bez určité analýzy není ihned jasné, že práce vykonaná při pohybu podél trojúhelníka, ač malého, je rovna nule. Zvětšíme jeden z trojúhelníků, jako na obr. 13.4. Je práce vykonaná při přechodu po obvodu trojúhelníka z A do B a B do C rovna práci vykonané při přímém přechodu z A do C? Předpokládejme, že síla působí v určitém směru. Vyberme si například takový trojúhelník, jehož strana BC leží v tomto směru. Předpokládáme, že trojúhelník je tak malý, že síla po celém trojúhelníku je v podstatě konstantní. Jaká práce se vykoná při přechodu z A do C? Je to

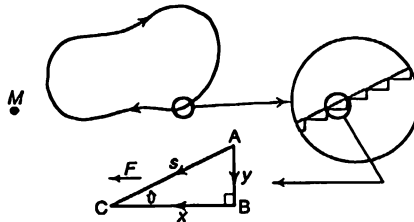
$$W_{AC} = \int_A^C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Fx \cos \vartheta,$$

neboť síla je konstantní. Nyní vypočítejme, jaká práce se vykoná při přechodu podél dalších dvou stran trojúhelníka. Na vertikální straně AB je síla kolmá k  $d\mathbf{s}$ , takže zde je práce rovna nule. Na horizontální straně BC je

$$W_{BC} = \int_B^C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Fx.$$



Vidíme, že práce, která se koná při přechodu po odvěsnách malého trojúhelníka je rovna práci při přechodu po přeponě, neboť  $s \cos \vartheta$  je rovno  $x$ . Předtím jsme si ukázali, že výsledek je roven nule pro jakoukoli dráhu složenou z řady malých schodů, jako na obr. 13.3, a nyní vidíme, že vykonáme stejnou práci, když si cestu zkrátíme napříč, místo toho, abychom šli po schůdkách (pokud jsou to schůdky dostatečně jemné a na takové je vždy můžeme upravit), proto práce vykonaná podél jakékoli uzavřené dráhy v gravitačním poli je rovna nule.



Obr. 13.4 „Hladká“ uzavřená dráha: zvětšenina části dráhy aproximované posloupností radiálních a obvodových kroků a pohled na jeden zvětšený schod

To je velmi pozoruhodný výsledek. Říká o planetárním pohybu něco, co jsme předtím nevěděli. Tvrdí, že jestliže se planeta pohybuje kolem Slunce (aniž by nablízku byla jiná tělesa, tj. za nepřítomnosti jiných sil), pohybuje se takovým způsobem, že když od druhé mocniny rychlosti v kterémkoli bodě dráhy odečteme nějaké konstanty vydělené průvodičem  $r$  v tomto bodě, dostaneme pro každý bod oběžné dráhy stejnou hodnotu. Například, čím blíže ke Slunci je planeta, tím rychleji se pohybuje. O kolik rychleji? O takovouto hodnotu: Kdybychom při pohybu kolem Slunce změnili směr její rychlosti (nikoli však velikost této rychlosti) tak, aby se planeta pohybovala radiálně a nechali bychom ji spadnout z určité vzdálenosti až na požadovanou délku průvodiče, její nová rychlost by byla taková, jakou má planeta na této oběžné dráze, protože jde jen o jiný případ komplikované dráhy. Kdyby se planeta vrátila do původní vzdálenosti, její kinetická energie by byla stejná jako předtím. Ať už planeta doletí do nějakého bodu po nenarušené dráze nebo směr jejího pohybu byl změněn prostřednictvím vazeb bez tření, její kinetická energie v tomto bodě bude stejná.

Proto, když provádíme numerickou analýzu pohybu planety po oběžné dráze, jak jsme již dělali, můžeme se krok za krokem přesvědčit výpočtem energie, zda jsme neudělali chybu. Energie by se neměla měnit. Pro oběžnou dráhu podle tab. 9.2 se však energie <sup>24)</sup> mění podél dráhy přibližně o 1,5 %. Proč? Buď proto, že jsme při numerické metodě použili konečné intervaly, nebo proto, že jsme udělali chybu někde v aritmetice.

Sledujme, co se děje s energií v jiném případě – v případě tělesa zavěšeného na pružině. Vychýlíme-li těleso z jeho rovnovážné polohy, je síla, která ho chce vrátit zpět, úměrná velikosti výchylky. Lze najít zákon zachování energie při těchto podmínkách? Ano, neboť práce vykonaná takovouto silou je rovna

$$W = \int_0^x F \cdot dx = \int_0^x (-kx) dx = -\frac{1}{2} kx^2, \quad (13.13)$$

<sup>24)</sup> V jednotkách tab. 9.2 je energie rovna  $\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \frac{1}{r}$ .

## SČÍTÁNÍ ENERGIÍ

tedy pro těleso na pružině platí, že součet kinetické energie oscilujícího tělesa a  $(1/2) kx^2$  je roven konstantě. Podívejme se, jak to probíhá. Těleso potáhneme směrem dolů; je v klidu, takže jeho rychlost je rovna nule. Ale  $x$  není rovno nule, je maximální, je tu tedy nějaká energie, zřejmě potenciální. Když uvolníme těleso, nastane kmitání, které nebudeme podrobně rozebírat. V každém okamžiku však musí být součet kinetické a potenciální energie konstantní. Například, když těleso prochází rovnovážným bodem,  $x$  je rovno nule, tehdy je  $v^2$  největší. Čím je větší  $x^2$ , tím je menší  $v^2$  atd., takže při kmitání se udržuje rovnováha mezi  $x^2$  a  $v^2$ . Tak jsme dostali další pravidlo: Je-li síla rovna  $-kx$ , je potenciální energie pružiny rovna  $(1/2) kx^2$ .

### 13.3 SČÍTÁNÍ ENERGIÍ

Nyní přejdeme k obecnějším úvahám o tom, co se stane, máme-li velké množství těles. Předpokládejme, že máme komplikovaný problém mnoha těles, označených indexy  $i = 1, 2, 3, \dots$ , jež na sebe všechna gravitačně působí. Co se bude dít? Dokážeme, že když sečteme kinetické energie všech částic a k tomu přičteme součet z jejich vzájemné gravitační potenciální energie  $-\kappa Mm/r_{ij}$ , vypočtenou přes všechny páry částic, dostaneme tento celkový součet rovnající se konstantě

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{\text{páry } ij} \left( -\frac{\kappa m_i m_j}{r_{ij}} \right) = \text{konst.} \quad (13.14)$$

Jak to dokážeme? Budeme diferencovat obě strany podle času a přesvědčíme se, že dostaneme nulu. Diferencováním  $(1/2) m_i v_i^2$  dojdeme k derivacím rychlostí, což jsou vlastně síly, jako v rovnici (13.5). Za tyto síly dosadíme jejich vyjádření známé z Newtonova gravitačního zákona a všimneme si, že to, co zůstane, je právě časová derivace výrazu

$$\sum_{\text{páry } ij} \left( -\frac{\kappa m_i m_j}{r_{ij}} \right).$$

Derivace kinetické energie podle času

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i m_i v_i \cdot \left( \frac{dv_i}{dt} \right) = \sum_i F_i \cdot v_i = \sum_i \left( \sum_i -\frac{\kappa m_i m_j r_{ij}}{r_{ij}^3} \right) \cdot v_i. \quad (13.15)$$

Derivace potenciální energie podle času je

$$\frac{d}{dt} \sum_{\text{páry}} \left( -\frac{\kappa m_i m_j}{r_{ij}} \right) = \sum_{\text{páry}} \left( +\frac{\kappa m_i m_j}{r_{ij}^2} \right) \left( \frac{dr_{ij}}{dt} \right).$$

Ale

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{d r_{ij}}{d t} &= \frac{1}{2 r_{ij}} \left[ 2 (x_i - x_j) \left( \frac{d x_i}{d t} - \frac{d x_j}{d t} \right) + 2 (y_i - y_j) \left( \frac{d y_i}{d t} - \frac{d y_j}{d t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 (z_i - z_j) \left( \frac{d z_i}{d t} - \frac{d z_j}{d t} \right) \right] = r_{ij} \cdot \frac{v_i - v_j}{r_{ij}} = r_{ij} \cdot \frac{v_i}{r_{ij}} + r_{ij} \cdot \frac{v_j}{r_{ji}}, \end{aligned}$$

protože  $r_{ij} = -r_{ji}$ , zatímco  $r_{ij} = r_{ji}$ . Tedy

$$\frac{d}{d t} \sum_{\text{páry}} \left( -\frac{\kappa m_i m_j}{r_{ij}} \right) = \sum_{\text{páry}} \left[ \frac{\kappa m_i m_j r_{ij}}{r_{ij}^3} \cdot v_i + \frac{\kappa m_i m_j r_{ji}}{r_{ji}^3} \cdot v_j \right]. \quad (13.16)$$

Nyní si musíme pozorně všimnout, co znamenají symboly  $\sum_i \left( \sum_j \right)$  a  $\sum_{\text{páry}}$ . V rovnici (13.15)

$\sum_i \left( \sum_j \right)$  znamená, že  $i$  nabývá postupně všech hodnot  $i = 1, 2, 3 \dots$  a pro každou hodnotu  $i$  nabývá index  $j$  všech hodnot kromě  $i$ . Takže je-li  $i = 3$ , pak  $j$  nabývá hodnot 1, 2, 4 ...

Na druhé straně symbol  $\sum_{\text{páry}}$  v rovnici (13.16) znamená, že daná dvojice  $i$  a  $j$  se v sumě vyskytuje

jen jednou, takže pár částic 1 a 3 přispívá do sumy jen jedním členem. V souladu s tím můžeme připustit, aby index  $i$  nabýval postupně všech hodnot 1, 2, 3, ... a pro každé  $i$  necht  $j$  nabývá jen hodnot *všech* než  $i$ . Tedy jestliže  $i = 3$ ,  $j$  může nabývat hodnot 4, 5, 6 ... Všimněme si však, že pro každou hodnotu indexů  $i, j$  se v sumě nacházejí příspěvky od dvou členů, v jednom je  $v_i$  a v druhém je  $v_j$ , a že tyto členy jsou podobné členům ve vztahu (13.15), kde jsou v sumě zahrnuty *všechny* hodnoty  $i$  a  $j$  (kromě  $i = j$ ). Proto, porovnáme-li příslušné výrazy člen po členu, vidíme, že rovnice (13.16) a (13.15) jsou si přesně rovny, pouze mají opačné znaménko, takže derivace podle času ze součtu kinetické a potenciální energie je skutečně rovna nule. Z toho vyplývá, že pro systém mnoha těles je *kinetická energie dána součtem příspěvků od jednotlivých těles* a potenciální energie je také dána prostě součtem potenciálních energií všech párů. *Proč* zde vystupuje energie každého páru, můžeme pochopit takto: Předpokládejme, že chceme vypočítat celkovou práci, kterou je třeba vynaložit, abychom tělesa dostali na určité vzdálenosti od sebe. Toho můžeme dosáhnout pomocí více kroků tím, že je po jednom přeneseme z nekonečna, kde na sebe silově nepůsobí. Nejprve přeneseme první těleso, k čemuž není potřeba žádné práce, neboť nejsou přítomna žádná tělesa, která by na něho mohla silově působit. Dále přeneseme druhé těleso, což si vyžádá určitou práci, jmenovitě  $W_{1,2} = -\kappa m_1 m_2 / r_{12}$ . Nyní, a to je důležité, předpokládejme, že přeneseme další těleso do třetí polohy. Síla, která působí na třetí těleso je v každém okamžiku rovna součtu dvou sil – sil vyvolaných prvním a druhým tělesem. Proto *vykonaná práce je rovna součtu prací vykonaných každou silou zvlášť* neboť lze-li  $F_3$  rozložit na součet dvou sil

$$F_3 = F_{13} + F_{23},$$

pak práce je rovna

$$\int F_3 \cdot ds = \int F_{13} \cdot ds + \int F_{23} \cdot ds = W_{13} + W_{23}.$$

Znamená to, že vykonaná práce je rovna součtu prací vykonaných proti první a druhé síle, jako by každá síla působila nezávisle. Pokračujeme-li takovýmto způsobem dále, vidíme, že celková

práce potřebná k vytvoření dané konfigurace těles, je přesně rovna hodnotě, uvedené ve vztahu (13.14) jako potenciální energie. Potenciální energii můžeme psát ve tvaru součtu přes všechny dvojice částic, neboť pro gravitaci platí princip superpozice sil.

### 13.4 GRAVITAČNÍ POLE VELKÝCH TĚLES

Nyní vypočítáme pole, s nimiž se ve fyzice setkáváme za takových okolností, které souvisejí s rozložením hmoty. Dosud jsme brali v úvahu jen částice a neuvažovali jsme o rozložení hmoty, ale je zajímavé provést i výpočet sil způsobených ne jen jednou, ale více částicemi. Nejprve vypočteme gravitační sílu způsobenou nekonečnou hmotnou rovinou. Síla způsobená touto hmotnou plochou působící na jednotkovou hmotnost v daném bodě  $P$  (obr. 13.5), bude samozřejmě směřovat k ploše. Necht' je vzdálenost bodu od roviny  $a$  a na jednotkovou plochu této roviny připadá hmotnost  $\mu$ . Budeme předpokládat, že  $\mu$  je konstanta, tj. že jde o homogenní vrstvu materiálu. Jak velké pole  $dK$  vytvoří hmotnost  $dm$ , jež se nachází ve vzdálenosti mezi  $\rho$  a  $\rho + d\rho$  od bodu  $O$ , jenž je nejbližším bodem roviny k bodu  $P$ ? Bude to pole  $dK = \kappa (dmr/r^3)$ . Toto pole má směr  $r$ , ale víme, že když sečteme malé vektory  $dK$ , abychom dostali  $K$ , zůstane z něho jen  $x$ -ová složka. Zřejmě  $x$ -ová složka  $dK$  je rovna

$$dK_x = \kappa \frac{dmr_x}{r^3} = \kappa \frac{dma}{r^3}.$$

Všechny hmotnosti  $dm$ , jež jsou stejně vzdáleny od bodu  $P$ , dávají stejné  $dK_x$ , proto hned můžeme místo  $dm$  psát celkovou hmotnost prstence mezi  $\rho$  a  $\rho + d\rho$ , tj.  $dm = \mu 2\pi\rho d\rho$  ( $2\pi\rho d\rho$  je plocha prstence s poloměrem  $\rho$  a šířkou  $d\rho$ , jestliže platí  $d\rho \ll \rho$ ). To znamená, že

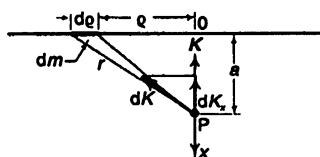
$$dK_x = \kappa\mu 2\pi\rho \frac{d\rho a}{r^3}.$$

Ale  $\rho d\rho = r dr$  neboť  $r^2 = \rho^2 + a^2$ . Proto

$$K_x = 2\pi\kappa\mu a \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = 2\pi\kappa\mu a \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\infty} \right) = 2\pi\kappa\mu. \quad (13.17)$$

Síla nezávisí na  $a$ ! Proč? Nezmýlili jsme se? Zdálo by se, že čím je vzdálenost větší, tím je síla slabší. Nikoli! Při malé vzdálenosti se přitažlivost většiny hmoty projevuje pod nepřiznivým úhlem a při velké vzdálenosti má větší část hmoty příznivější polohu k tomu, aby způsobovala přitažlivost směrem k rovině. Při jakékoli vzdálenosti leží hmota, která se nejvíce uplatňuje, v určitém kuželi. Se vzrůstající vzdáleností se síla zmenšuje nepřímou úměrně druhé mocnině vzdálenosti, ale v tomto kuželi, pod stejným úhlem, bude mnohem víc hmoty, úměrně druhé mocnině vzdálenosti! Tuto analýzu lze provést přesně, stačí, když si všimneme, že diferenciální příspěvek v kterémkoli daném kuželi skutečně nezávisí na vzdálenosti, neboť s měnící se vzdáleností se velikost síly dané hmoty a množství hmoty v kuželi mění recipročně. Samozřejmě, síla ve skutečnosti není konstantní, neboť na druhé straně roviny má opačné znaménko.

## PRÁCE A POTENCIÁLNÍ ENERGIE

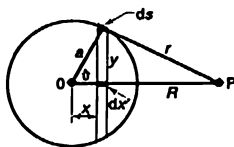


Obr. 13.5 Gravitační síla  $F$  působící na hmotný bod vyvolaná hmotností nekonečné rovinné desky

Tak jsme v podstatě vyřešili i problém z elektřiny: máme-li elektricky nabitou desku s nábojem  $\sigma$  na jednotku plochy, pak je elektrické pole v daném bodě mimo desku rovno  $\sigma/2\epsilon_0$  a směřuje od desky, jestliže je tato nabitá kladně, a k ní, je-li nabitá záporně. K důkazu nám stačí, všimneme-li si, že  $x$  má v gravitaci stejnou úlohu jako  $1/4\pi\epsilon_0$  v elektrostatice.

Předpokládejme nyní, že máme dvě desky; jednu s kladnou hustotou náboje  $+\sigma$  a druhou se zápornou hustotou náboje  $-\sigma$  ve vzdálenosti  $D$  od první. Jaké je jejich pole? Z vnější strany desek je rovno nule. Proč? Protože jedna deska přitahuje a druhá odpuzuje. Síla *nezávisí na vzdálenosti*, proto se jejich účinky ruší! Mezi deskami je síla dvakrát větší než síla jedné desky, tj.  $E = \sigma/\epsilon_0$  a směřuje od kladné k záporné desce.

Nyní se dostáváme k nejzajímavějšímu a nejdůležitějšímu problému, jehož řešení jsme celou dobu předpokládali. Síla, kterou Země působí na hmotný bod na svém povrchu nebo mimo něj, je taková, jako kdyby hmotnost celé Země byla soustředěna v jejím středu. Platnost tohoto předpokladu není zřejmá, neboť těsně u zemského povrchu je část hmotnosti velmi blízko, část je dále atd. Zdá se být div, že po sečtení všech těchto sil by výsledná síla měla být stejná jako ta, kterou bychom dostali, kdybychom hmotnost celé Země stlačili do jejího středu!



Obr. 13.6 Tenká sférická slupka hmoty nebo náboje

Dokážeme správnost tohoto zázraku. Za tím účelem nahradíme představu celé Země tenkou homogenní kulovou slupkou. Nechť  $m$  je její celková hmotnost. Vypočítáme *potenciální energii* části o hmotnosti  $m'$  ve vzdálenosti  $R$  od středu koule (obr. 13.6) a objasníme si, že potenciální energie je stejná, jako kdyby hmotnost  $m$  byla soustředěna v jednom bodě ve středu koule. (S potenciální energií se nám pracuje snadněji než s intenzitou pole, neboť nemusíme brát v úvahu úhly, prostě sečteme potenciální energie všech částí hmotnosti.) Označíme-li vzdálenost určitého rovinného řezu od středu  $x$ , pak celá hmotnost ve vrstvě  $dx$  má stejnou vzdálenost  $r$  od  $P$  a potenciální energie vyvolaná tímto kulovým pásem je  $-x m' d m / r$ . Jakou hmotnost má vrstva  $dx$ ? Je rovna

$$d m = 2 \pi \gamma \mu d s = \frac{2 \pi \gamma \mu d x}{\sin \vartheta} = \frac{2 \pi \gamma \mu d x a}{y} = 2 \pi a \mu d x,$$

kde  $\mu = m/4\pi a^2$  je plošná hustota hmotnosti kulové slupky. (Je obecným pravidlem, že povrch kulového pásu je úměrný jeho výšce.) Proto potenciální energie způsobená hmotností  $d m$  je rovna

$$d U = -\frac{x m' d m}{r} = -\frac{x m' 2 \pi a \mu d x}{r}.$$

## GRAVITAČNÍ POLE VELKÝCH TĚLES

Vidíme však, že

$$r^2 = y^2 + (R - x)^2 = y^2 + x^2 + R^2 - 2Rx = a^2 + R^2 - 2Rx,$$

tedy  $2r dr = -2R dx$  neboli  $\frac{dx}{r} = -\frac{dr}{R}$ .

Proto

$$dU = -\frac{\kappa m' 2\pi a \mu dr}{R},$$

a tak

$$U = -\frac{\kappa m' 2\pi a \mu}{R} \int_{R-a}^{R+a} dr = -\frac{\kappa m' 2\pi a \mu}{R} 2a = -\frac{\kappa m' (4\pi a^2 \mu)}{R} = -\frac{\kappa m' m}{R}. \quad (13.18)$$

Pro tenkou kulovou slupku tedy má hmotnost  $m'$  takovou potenciální energii, jako kdyby hmotnost slupky byla zkoncentrována v jejím středu. Zemi si můžeme představit rozdělenou na celou řadu sférických slupek, jejichž příspěvky k potenciální energii závisí jen na jejich hmotnostech a na vzdálenosti od středu. Když je sečteme, dostaneme *celkovou hmotnost*. Proto působí Země tak, jakoby celá její hmotnost byla v jejím středu!

Všimněme si, co se stane, bude-li bod  $P$  *uvnitř* slupky. Provedeme-li stejný výpočet pro  $P$  uvnitř, opět dostaneme rozdíl dvou  $r$ , ale nyní ve formě  $(a + R) - (a - R) = 2R$ , tj. dvojnásobek vzdálenosti od středu. Jinými slovy, potenciální energie je rovna  $U = -\kappa m' m / a$ , což je *nezávislé* na  $R$  a na poloze, tj. *kdekoli* uvnitř bude energie stejná. Proto k pohybu uvnitř není potřebná síla, ani se nekoná práce. Je-li potenciální energie stejná, bez ohledu na to, kde se v kulové slupce těleso nachází, nemůže na něj působit žádná síla. Uvnitř tedy síla nepůsobí, jen mimo kouli, a tato síla je taková, jakoby celá hmotnost kulové slupky byla soustředěna v jejím středu.

# P

# Práce a potenciální energie (závěr)

---

## 14.1 PRÁCE

## 14.2 VÁZANÝ POHYB

## 14.3 KONZERVATIVNÍ SÍLY

## 14.4 NEKONZERVATIVNÍ SÍLY

## 14.5 POTENCIÁLY A POLE

### 14.1 PRÁCE

V předcházející kapitole jsme uvedli mnoho nových myšlenek a výsledků, jež jsou ve fyzice velmi významné. Jsou tak důležité, že bude zajisté užitečné věnovat jejich bližšímu zkoumání celou další kapitolu. Nebudeme tu opakovat „důkazy“ nebo zvláštní triky, pomocí nichž jsme k nim dospěli, ale místo toho se soustředíme na diskusi samotných poznatků.

Při studiu kteréhokoli technického předmětu, k jehož pochopení je důležitá matematika, stojíme před úlohou porozumět a zapamatovat si množství fakt a myšlenek. Ty jsou navzájem spjaty určitými vztahy, jejichž existenci lze „dokázat“ nebo „ukázat“. Snadno se splete důkaz se vztahem, který ustanovuje. Samozřejmě, co je důležité naučit se a zapamatovat si, to je samotný vztah a ne jeho důkaz. Pak v jakékoli situaci můžeme buď říci „lze ukázat, že to a to je pravda“, nebo to můžeme ukázat sami. Použitý důkaz je téměř ve všech případech tak přizpůsoben, aby se především dal snadno provést na tabuli nebo na papíře, a aby byl i co možná nejuhlašenější. Důkaz se v důsledku toho může omylem zdát jednoduchým, zatímco ve skutečnosti mohl autor zkoušet vypočítat tutéž věc různými způsoby a možná na něm pracoval celé hodiny, než našel nejvhodnější cestu – tu, která vede k výsledku za nejkratší dobu! Když před sebou máme důkaz, je důležité uvědomit si ne samotný důkaz, ale fakt, že to a to *lze dokázat*. Samozřejmě, jestliže důkaz obsahuje nějaký nový matematický postup nebo „trik“, který jsme ještě neznali, je třeba mu věnovat pozornost – ne však samotnému triku, ale použité matematické myšlence.

Je jisté, že ze všech důkazů, jež jsou uvedeny v této knize, si autor nepamatuje ani jeden od dob, kdy sám studoval základní kurz fyziky. Ba právě naopak – pamatuje si jen, že to a to platí, a aby vysvětlil, jak to lze dokázat, vymýšlel si důkazy podle potřeby. Každý, kdo se věnoval studiu nějakého předmětu, by měl být schopen postupovat podobným způsobem, ale není třeba si

pamatovat důkazy. Proto se v této kapitole vyhneme důkazům různých tvrzení, která jsme předtím uvedli a jen shrneme výsledky.

První myšlenka, s níž bude třeba si trochu pohrát, je ta, že *síla koná práci*. Fyzikální význam slova práce se liší od běžného významu tohoto slova. Fyzikální práci lze vyjádřit ve tvaru  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , což je křivkový integrál ze skalárního součinu  $\mathbf{F}$  a  $d\mathbf{s}$ . To například znamená, že působí-li síla na objekt v jednom směru a objekt sám se posune v jiném směru, pak práci koná *jen složka síly ve směru posunutí*. Kdyby byla například síla konstantní a posunutí by bylo jen o malou vzdálenost  $\Delta s$ , pak by práce vykonaná konstantní silou na této dráze byla rovna jen složce síly podél  $\Delta s$  vynásobené  $\Delta s$ . Pravidlo zní „síla krát dráha“, ale myslíme tím jen složku síly ve směru posunutí krát  $\Delta s$  nebo složku posunutí ve směru síly krát  $F$ , což je ekvivalentní. Je jasné, že síla, která svírá s posunutím pravý úhel, nekoná žádnou práci.

Rozložíme-li vektor posunutí  $\Delta s$  dále na složky, nebo jinými slovy, chceme-li se na skutečně posunutí  $\Delta s$  dívat jako na posunutí  $\Delta x$  ve směru osy  $x$ ,  $\Delta y$  ve směru osy  $y$  a  $\Delta z$  ve směru osy  $z$ , pak práci, která se koná posunutím tělesa z jednoho místa na druhé, lze vypočítat ze tří částí: vypočtením práce vykonané ve směru osy  $x$ , ve směru osy  $y$  a ve směru osy  $z$ . K určení práce vykonané ve směru osy  $x$  je třeba znát složku síly ve směru osy  $x$ , tj.  $F_x$  atd., takže práce je rovna  $F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$ . V případě, že síla není konstantní a jde o komplikovaný křivočarý pohyb, musíme celou dráhu rozdělit na množství malých posunutí  $\Delta s$ , sečíst práci vykonanou pohybem tělesa podél všech  $\Delta s$  a určit limitu pro  $\Delta s$  jdoucí k nule. To je význam pojmu „křivkový integrál“.

Vše, co jsme dosud řekli, je obsaženo ve vztahu  $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ . Můžeme říci, že je to nádherný vztah, ale něco zcela jiného je pochopit ho i v jeho důsledcích.

Ve fyzice má slovo práce tak odlišný význam od běžného smyslu, že je třeba si dobře uvědomit, za jakých okolností se navzájem liší. Například, podle fyzikální definice práce, jestliže chvíli držíme zvednuté padesátikilové závaží, nekonáme práci. Naproti tomu je jasné, že se začneme potit, třást se a těžko dýchat, jako bychom běželi nahoru po schodech. Ale při běhu nahoru po schodech se práce *koná*, při běhu *dolů* po schodech se podle fyziky práce získává, zatímco držení tělesa v pevné poloze, se práce nekoná. Tedy fyzikální definice práce se liší od fyziologické definice z důvodů, které stručně prozkoumáme.

Zůstává faktem, že drží-li někdo závaží, koná „fyziologickou“ práci. Proč se potí? Proč se potřebuje najíst, aby udržel závaží? Jaké procesy probíhají v jeho těle, které se namáhá na plné obrátky, jen aby udrželo závaží? Vždyť závaží lze bez námahy udržet, když ho položíme na stůl. Stůl ho tiše a pokojně udrží ve stejné výšce, aniž bychom museli nějak dodávat energii! Fyziologie nám dává toto vysvětlení. Člověk i jiné druhy živočichů mají dva druhy svalů. Jsou to *příčně pruhované* nebo *kosterní* svaly (například na rukách), které lze vědomě ovládat a *hladké* svaly (například svaly střev nebo velký sval měkkýšů, který zavírá lasturu). Hladké svaly jsou pomalé, ale mohou se „zatnout“, což znamená, že jestliže chce měkkýš zavřít lasturu v určité poloze, udrží ji v ní i proti značně velké síle, jež by mu v tom chtěla zabránit. Navzdory zátěži si udrží danou polohu celé hodiny, aniž by se unavil, podobně jako stůl, na kterém je závaží. Sval se zatne, jeho molekuly dočasně fixují svou polohu, nekoná se práce a měkkýš nemusí vynakládat žádnou námahu. Skutečnost, že když chceme udržet závaží, musíme vynaložit úsilí, souvisí s konstrukcí příčně pruhovaných svalů. Když svalové vlákno dostane nervový impulz, na okamžik se stáhne a znovu se uvolní. Když něco držíme, do svalu přichází obrovské množství nervových impulzů, tíha tělesa se vyrovnává stahy mnoha svalových vláken, zatímco jiná vlákna odpočívají. Důkazem je fakt, že když držíme těžké závaží a unavíme se, začnou se svaly třást. Třesou se proto, že přivály nervových signálů nejsou pravidelné, sval je unaven a nereaguje dostatečně rychle. Proč jsou svaly zkonstruovány tak neefektivně? To přesně nevíme, ale v přírodě neexistují *rychlé* hladké svaly. K držení závaží by bylo



možné využít hladkých svalů efektivněji, protože by se prostě ztuhnuly. Práce by se nekonala a nebylo by třeba energie. Tyto svaly mají však svou nevýhodu – jsou velmi pomalé.

Ale vraťme se k fyzice a položme si otázku: *Proč* potřebujeme znát vykonanou práci? Je to i zajímavé i užitečné, neboť práce, kterou dodá částici výslednice všech sil, jež na ni působí, se přesně rovná změně kinetické energie částice. Znamená to, že jestliže na těleso působí síla, a těleso nabírá rychlost, platí

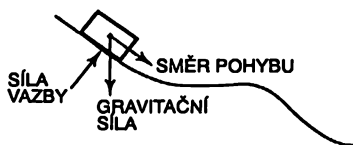
$$\Delta(v^2) = \frac{2}{m} F \cdot \Delta s.$$

## 14.2 VÁZANÝ POHYB

Síly a práce mají ještě další zajímavou vlastnost. Mějme nakloněnou nebo zakřivenou cestu a částici, jež se bude po ní pohybovat bez tření. Nebo uvažujme kyvadlo – závaží na vláknech. Vlákno omezuje pohyb závaží na pohyb po kružnici kolem bodu závěsu. Bod závěsu lze změnit, necháme-li vlákno narazit na kolík. Pak se dráha závaží bude skládat ze dvou kružnic s různými poloměry. To jsou příklady tzv. *tuhé vazby bez tření*.

Při pohybu s tuhou vazbou bez tření nekoná vazba žádnou práci, neboť síly vazby svírají s dráhou pohybu pravý úhel. Vazbovými silami rozumíme síly, jež působí na těleso pod vlivem samotné vazby – reakce podložky nebo napětí vlákna.

Síly, které působí na pohyb částice pod vlivem gravitace po nakloněné dráze, jsou dost složité. Je tu síla vazby, gravitační síla atd. Když však při výpočtu pohybu vyjdeme ze zachování energie a jen *samotné gravitační síly*, dostaneme správný výsledek. Zdá se to být divné, neboť to není ten správný postup – měli bychom počítat s *výslednicí* sil. Nicméně se ukáže, že je to práce vykonaná gravitační silou, která je rovna změně kinetické energie, protože práce vykonaná vazbovou složkou síly je rovna nule (*obr. 14.1*).



Obr. 14.1 Síly působící na těleso, které klouže bez tření

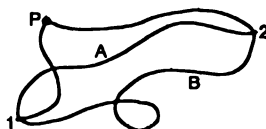
Důležitá je tu ta vlastnost, že lze-li sílu rozložit na součet dvou nebo více „částí“, pak práce, vykonaná výslednou silou při pohybu po určité dráze, je rovna součtu prací vykonaných různými „složkami“ síly, na něž byla výsledná síla rozložena. Rozložíme-li sílu na vektorový součet více sil (gravitační síly, vazbové síly atd. nebo *x*-ovou složku všech sil, *y*-ovou složku všech sil nebo jakýmkoli jiným způsobem), pak se práce vykonávaná celkovou silou rovná součtu prací vykonaných všemi složkami, na něž jsme celkovou sílu rozložili.

## 14.3 KONZERVATIVNÍ SÍLY

V přírodě se vyskytují určité síly (například gravitační síla), které se vyznačují velmi pozoruhodnou vlastností – jsou konzervativní (nejde o žádné politické ideje, je to jen jeden z těch „šfle-

ných“ názvů). Vypočítáme-li práci vykonanou silou při přemístění tělesa z jednoho bodu do druhého podél nějaké zakřivené dráhy, závisí tato práce obecně na dráze, ale ve zvláštních případech na ní nezávisí. Nezávisí-li práce na dráze, říkáme, že síla je konzervativní. Jinak řečeno, jestliže se integrál síly vynásobené přírůstkem vzdálenosti při přechodu z bodu 1 do bodu 2 na obr. 14.2 spočítá nejprve podél křivky *A* a pak podél křivky *B*, jestliže přitom dostaneme stejné množství joule, jestliže dále toto platí pro každou dráhu, na níž leží body 1 a 2, a jestliže toto tvrzení platí nezávisle na tom, které dva body bereme v úvahu, pak říkáme, že síla je konzervativní. Za takových okolností lze integrál práce mezi body 1 a 2 vypočítat jednoduchým způsobem a můžeme uvést výsledný vzorec. Obecně to není tak jednoduché, neboť musíme specifikovat i dráhu, ale v případě, že práce nezávisí na tvaru dráhy, je samozřejmé, že závisí jen na *polohách* 1 a 2.

Abychom dokázali platnost těchto závěrů, vezměme si pevný bod *P* v libovolné poloze (obr. 14.2). Pak lze dráhový integrál práce z bodu 1 do bodu 2 vypočítat jako práce vykonaná po dráze z bodu 1 do *P* plus práce po dráze z *P* do 2, neboť síly jsou konzervativní a vykonaná práce nezávisí na tvaru dráhy. Práce, která se koná při pohybu z bodu *P* do určitého bodu v prostoru, je funkcí polohy tohoto bodu. Samozřejmě, že závisí i na bodu *P*, ale v naší analýze ho považujeme za pevný. Za tohoto předpokladu práce, vykonaná při pohybu z bodu *P* do bodu 2, je funkcí konečné polohy bodu 2. Závisí na tom, kde se bod 2 nachází; přemístíme-li těleso do nějakého jiného bodu, dostaneme jiný výsledek.



Obr. 14.2 Možné dráhy mezi dvěma body v silovém poli

Tuto funkci polohy budeme značit  $-U(x, y, z)$ , a jestliže půjde o bod 2, jehož souřadnice jsou  $(x_2, y_2, z_2)$ , budeme jako zkratku pro  $U(x_2, y_2, z_2)$  psát prostě  $U(2)$ . Práci, vykonanou při posunutí tělesa z bodu 1 do bodu *P*, lze napsat jako práci vykonanou při *opačném posunutí*, přičemž je třeba změnit znaménka všech *ds*. To znamená, práce vykonaná při posunutí z bodu 1 do bodu *P* je rovna práci vykonané při posunutí z bodu *P* do bodu 1 se *znaménkem* -

$$\int_1^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_P^1 \mathbf{F} \cdot (-d\mathbf{s}) = -\int_P^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Takže práce při posunutí z bodu *P* do bodu 1 je rovna  $-U(1)$  a z bodu *P* do bodu 2 je rovna  $-U(2)$ . Proto integrál od 1 do 2 je roven  $-U(2)$  plus  $-U(1)$  zpětným směrem, tj.  $+U(1) - U(2)$ :

$$U(1) = -\int_P^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad U(2) = -\int_P^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U(1) - U(2). \quad (14.1)$$

Veličina  $U(1) - U(2)$  se nazývá změna potenciální energie a  $U$  nazýváme potenciální energií. Říkáme, že těleso má potenciální energii  $U(2)$ , jestliže se nachází v poloze 2 a v poloze 1 má potenciální energii  $U(1)$ . Nachází-li se v bodě *P*, má nulovou potenciální energii.

Kdybychom místo bodu *P* použili kterýkoli jiný bod, řekněme bod *Q*, vyšlo by (důkaz ponecháme vám), že *potenciální energie se mění jen o aditivní konstantu*. Protože zachování energie závisí na *změněch* energie, nic se nezmění, když k potenciální energii přičteme takovou konstantu. Proto bod *P* je libovolný.

## PRÁCE A POTENCIÁLNÍ ENERGIE (ZÁVĚR)

Máme tedy dvě tvrzení:

1. Práce vykonaná silou je rovna změně kinetické energie.
2. Matematicky pro konzervativní sílu platí, že vykonaná práce je rovna záporné změně funkce  $U$  nazvané potenciální energií.

Z těchto dvou tvrzení vyplývá, že *působí-li jen konzervativní síly, součet kinetické energie  $T$  a potenciální energie  $U$  zůstává konstantní*:

$$T + U = \text{konst.} \quad (14.2)$$

Podívejme se na vztahy pro výpočet potenciální energie v několika konkrétních případech. V případě homogenního gravitačního pole, nebudeme-li se pohybovat ve výškách srovnatelných s poloměrem Země, je síla stálá a směřuje vertikálně. Vykonaná práce je prostě rovna síle vynásobené vzdáleností. Tedy

$$U(z) = mgz \quad (14.3)$$

a bod  $P$ , jenž odpovídá nulové potenciální energii, bude kdekoli v rovině  $z=0$ . Kdybychom chtěli, můžeme říci, že potenciální energie bude například  $mg(z-6)$  a všechny výsledky našeho rozboru by zůstaly stejné, jen hodnota potenciální energie pro  $z=0$  by byla  $-6mg$ <sup>25)</sup>. Na tom však nezáleží, neboť v úvahu se berou jen *změny* potenciální energie.

Energie potřebná k stlačení lineární pružiny o vzdálenost  $x$  z rovnovážné polohy je rovna

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (14.4)$$

a potenciální energie je rovna nule v bodě  $x=0$ , tj. v rovnovážné poloze. Znovu bychom mohli přidat libovolnou konstantu.

Gravitační potenciální energie pro bodové hmotnosti  $M$  a  $m$  vzdálené od sebe na vzdálenost  $r$  je rovna

$$U(r) = -\alpha \frac{Mm}{r}. \quad (14.5)$$

V tomto případě byla konstanta zvolena tak, aby se potenciál ztratil v nekonečno. Stejný vztah samozřejmě platí i pro elektrické náboje, neboť pro ně platí stejný zákon.

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (14.6)$$

Vezměme si nyní jeden z těchto vztahů, abychom se přesvědčili, zda mu rozumíme.

*Otázka:* Jakou rychlost musí mít raketa, aby se odpoutala od Země?

*Řešení:* Součet kinetické a potenciální energie musí být konstantní. Odpoutat se znamená vzdálit se na milióny kilometrů. Má-li raketa dostatek energie k odpoutání se, můžeme předpokládat, že v takové vzdálenosti bude její rychlost rovna nule, raketa bude téměř stát. Nechť  $a$  je poloměr Země a  $M$  je její hmotnost. Součet kinetické a potenciální energie je na začátku roven  $(1/2)mv^2 - \alpha mM/a$  a musí být roven celkové energii na konci pohybu. Kinetickou energii na konci pohybu budeme považovat za nulovou, neboť raketa by se měla vzdalovat již v podstatě s nulovou rychlostí a potenciální energie je rovna  $\alpha mM$  děleno nekonečnem, což je nula. Takže na jedné straně rovnice je nula, z čehož vyplývá, že druhá mocnina rychlosti musí být rovna

<sup>25)</sup> Samozřejmě s fyzikálním rozměrem energie. (Pozn. red.)

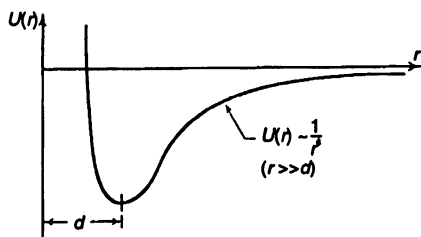
$2 \kappa M / a$ . Ale  $\kappa M / a^2$  je veličina, kterou nazýváme gravitačním zrychlením  $g$ . Takže

$$v^2 = 2ga.$$

Jakou rychlostí se musí pohybovat družice, aby stále obíhala kolem Země? To jsme již dříve vypočítali a zjistili jsme, že  $v^2 = \kappa M / a$ . K odpoutání se od Země tedy potřebuje rychlost rovnou  $\sqrt{2}$  násobku rychlosti, kterou potřebujeme k tomu, abychom právě obíhali kolem Země u jejího povrchu. K odpoutání se od Země tedy potřebujeme *dvakrát tolik energie* (neboť energie závisí na druhé mocnině rychlosti) než k jejímu oblétnutí. Proto historicky prvním krokem bylo dostat družici na oběžnou dráhu kolem Země, k čemuž je potřebná rychlost kolem 7,8 km/s. Druhým krokem bylo vyslat kosmickou loď tak, aby se nikdy nevrátila na Zemi; k tomu bylo třeba dvakrát tolik energie neboli rychlost kolem 11,2 km/s.

V naší další diskuzi o potenciální energii uvažujeme interakci dvou molekul nebo atomů, například dvou atomů kyslíku. Když jsou od sebe velmi vzdálené, síla je přitažlivá a mění se jako převrácená hodnota sedmé mocniny vzdálenosti, a když jsou velmi blízko, interakce je silně odpuzivá. Integrováním minus sedmé mocniny vzdálenosti (abychom našli potřebnou práci) zjistíme, že potenciální energie  $U$ , jež je funkcí vzájemné vzdálenosti dvou kyslíkových atomů, se při velkých vzdálenostech mění jako minus šestá mocnina vzdálenosti.

Jestliže nakreslíme závislost potenciální energie  $U(r)$  (obr. 14.3), pro velké hodnoty  $r$  se chová jako  $r^{-6}$ , když se však dostatečně přiblížíme, dostaneme se do bodu  $d$ , kde je minimum potenciální energie. Minimum potenciální energie pro  $r = d$  znamená, že vychýlíme-li se z bodu  $d$  o malou vzdálenost, vykonaná práce, která je rovna změně potenciální energie při této výchylce, je přibližně rovna nule, neboť v minimu křivky se potenciální energie mění jen velmi málo. V tomto bodě nepůsobí síla, což znamená, že je rovnovážným bodem. Jiný způsob jak je možné se přesvědčit, zda je to bod rovnovážný, je ten, že k vychýlení z bodu  $d$  kterýmkoli směrem je potřebná energie. Když se dva atomy kyslíku ustálí v poloze, kde již silou, jež je mezi nimi, nelze uvolnit více energie, nacházejí se v nejnižším energetickém stavu a jejich vzdálenost bude  $d$ . Takto vypadá kyslíková molekula za studena. Když ji zahřejeme, atomy se rozkmitají a vzdálí se, až je můžeme zcela oddělit. Potřebujeme k tomu určitou práci či energii, jež je rovna rozdílu potenciálních energií mezi  $r = d$  a  $r = \infty$ . Pokusíme-li se atomy k sobě velmi těsně přiblížit, energie prudce vzrůstá, neboť se navzájem odpuzují.



Obr. 14.3 Potenciální energie mezi dvěma atomy jako funkce jejich vzájemné vzdálenosti

Tyto věci připomínáme proto, že koncepce *síly* není zvláště vhodná pro kvantovou mechaniku, kde je přirozenější koncepce *energie*. Zatímco pojmy *síly* a *rychlosti* se „vytratí“ při studiu složitějších sil v jádře, mezi molekulami apod., koncepce *energie* zůstává. Proto v učebnicích kvantové mechaniky najdeme grafy potenciální energie, ale velmi zřídka, jestliže vůbec někdy, najdeme

grafické znázornění síly působící mezi dvěma molekulami, neboť lidé, kteří studují tyto jevy, myslí spíše v pojmech energie než síly.

Dále si všimněme, že jestliže na těleso působí více konzervativních sil současně, je potenciální energie tělesa rovna součtu potenciálních energií od každé síly zvlášť. Je to stejné tvrzení, jako jsme měli předtím, neboť dá-li se síla vyjádřit jako vektorový součet více sil, pak práce vykonaná výslednou silou je rovna součtu prací vykonaných jednotlivými silami a lze ji vyjádřit jako změny potenciální energie odděleně pro každou sílu. Takže celková potenciální energie je rovna součtu jednotlivých příspěvků.

Lze provést zobecnění i pro systém navzájem interagujících těles, jako jsou Jupiter, Saturn, Uran atd. nebo kyslíku, dusíku, uhlíku atd., jež navzájem interagují v párech prostřednictvím sil, které jsou všechny konzervativní. V takovém případě je kinetická energie celé soustavy prostě rovna součtu kinetických energií všech atomů, planet nebo čehokoli a potenciální energie soustavy je rovna součtu potenciálních energií vzájemných interakcí každého páru samostatně, jakoby tam další ani nebyly. (To ve skutečnosti přesně neplatí pro molekulární síly a vztah je o něco komplikovanější; určitě to však platí pro newtonovskou gravitaci a pro molekulární síly je vztah vhodný jen přibližně. V případě molekulárních sil je možné hovořit o potenciální energii, ale ta je o něco složitější funkcí poloh atomů než prostý součet příspěvků od párů.) Proto speciálně v případě gravitace je potenciální energie rovna součtu ze  $- \kappa m_i m_j / r_{ij}$  pro všechny páry  $i$  a  $j$ , jak jsme ukázali ve vztahu (13.14). Rovnice (13.14) je matematickým vyjádřením tvrzení, že součet celkové kinetické energie a celkové potenciální energie se s časem nemění. Vypočítáme-li celkovou kinetickou a potenciální energii planet, i když jakkoli obfhajf, točf se a vrtf, zjistíme, že tento součet zůstává konstantní.

## 14.4 NEKONZERVATIVNÍ SÍLY

Dost času jsme se věnovali diskuzi o konzervativních silách; ale jak je to se silami, které nejsou konzervativní? V této kapitole zaujmeme hlubší stanovisko než je obvyklé a řekneme, že nekonzervativní síly neexistují! Skutečně, všechny základní síly v přírodě jsou konzervativní. Není to důsledkem Newtonových zákonů. Co se týče samotného Newtona, věděl, že síly mohou být i nekonzervativní, jako například tření, jež se zdá být nekonzervativním. Když říkáme, že se *zdá*, přijímáme moderní názor, podle něhož bylo zjištěno, že všechny základní síly, síly interakcí mezi částicemi na nejjednodušší úrovni, jsou konzervativní.

Kdybychom například provedli analýzu systému, jako je kulová hvězdokupa (jejíž obrázek jsme již viděli), v níž jsou tisíce interagujících hvězd, dostali bychom vzorec pro celkovou potenciální energii jako prostý součet jednotlivých členů, přičemž se sčítá přes všechny hvězdné páry a kinetická energie je rovna součtu kinetických energií všech jednotlivých hvězd. Hvězdokupa se však pohybuje v prostoru i jako celek, a kdybychom od ní byli dostatečně vzdáleni, že bychom neviděli detaily, mohli bychom si myslet, že je to jeden objekt. Kdybychom na ni nechali působit síly, některé by ji poháněly jako celek a střed hvězdokupy by se pohyboval. Na druhé straně se může stát, že část sil by se „vyplytvala“ na zvětšení kinetické a potenciální energie těles, která jsou uvnitř. Předpokládejme například, že působením těchto sil celá hvězdokupa expanduje a že hvězdy se budou pohybovat rychleji. Celková energie systému se skutečně zachovává, ale při pohledu zvenku našima nedokonalýma očima, kterýma nepostřehneme složitost pohybu uvnitř, a uvažující kinetickou energii celého objektu jako by to byla energie jednoho tělesa, by se nám zdálo, že energie se nezachovává, ale je to jen následek toho, že jsme nepostřehli všechny detaily.

Ukazuje se, že věci se mají takto: při detailním pohledu je celková energie tohoto vesměrného objektu, kinetická plus potenciální, rovna konstantě.

Při studiu látek v těch nejjednodušších detailech na úrovni atomů není vždy *snadné* rozdělit celkovou energii na dvě složky – kinetickou a potenciální a takové rozdělení není vždy nutné. Lze to však provést *téměř* vždy, a proto můžeme říci, že to *je* možné a že součet potenciální a kinetické energie světa je konstantní. Takže celkový součet potenciální a kinetické energie v celém světě je konstantní a je-li „světem“ kousek izolovaného materiálu, energie je konstantní, nepůsobí-li vnější síly. Jak jsme však dokázali, část kinetické energie a potenciální energie objektu může být vnitřní energií, například energie vnitřních molekulových pohybů, vnitřních v tom smyslu, že je nevidíme. Víme, že v poháru vody všechno kmitá, všechny části se stále pohybují, uvnitř je tedy určitá kinetická energie, jíž si obvykle ani nevšimneme. Pohyb atomů, jenž se projevuje jako teplo, nevidíme, proto ho nenazýváme kinetickou energií, ale teplo je v první řadě kinetickou energií. Vnitřní potenciální energie může existovat například ve formě chemické energie: spalováním benzínu se uvolňuje energie, neboť potenciální energie atomů v jejich novém uspořádání je nižší, než byla původně. Přesněji, teplo není jen čistou kinetickou energií, ale částečně i potenciální energií a obrácené tvrzení platí o chemické energii, takže obě formy energie spojujeme dohromady a říkáme, že celková kinetická a potenciální energie uvnitř objektu existuje z části ve formě tepla, z části ve formě chemické energie a tak dále. Jinak ovšem všechny tyto formy energie považujeme za „ztracenou“ energii, v uvedeném smyslu; ujasníme si to při studiu termodynamiky.

Dalším příkladem bude tření. Není pravda, že kinetická energie se ztrácí za přítomnosti tření, i když se smýkající těleso zastaví a zdá se, že kinetická energie se ztratila. Kinetická energie se samozřejmě neztratila, neboť atomy uvnitř kmitají s větší kinetickou energií než předtím a ačkoli to nevidíme, můžeme to zjistit měřením teploty. Samozřejmě, nevezmeme-li v úvahu tepelnou energii, pak věta o zachování energie se bude jevit neplatnou.

Jiný příklad, při němž se zdá, že zachování energie neplatí, vzniká, když se zajímáme jen o část systému. Je zcela přirozené, že věta o zachování energie se bude zdát neplatnou, zanedbáme-li tu část interakce, jež probíhá s nějakým vnějším objektem.

V klasické fyzice se do potenciální energie zahrnuje jen gravitace a elektřina, ale dnes známe jadernou energii i jiné druhy energie. Například světlo by v klasické teorii představovalo novou formu energie, ale chceme-li, můžeme si představit, že světelná energie je kinetická energie fotonu, takže náš vztah (14.2) bude stále platit.

## 14.5 POTENCIÁLY A POLE

Nyní rozebereme některé myšlenky spojené s potenciální energií a s koncepcí *pole*. Předpokládejme, že máme dvě velká tělesa  $A$ ,  $B$  a třetí velmi malé těleso, na které působí gravitační přitažlivost prvních dvou těles s výslednou silou  $F$ . Již v kapitole 12 jsme si všimli, že gravitační sílu, působící na částice, lze napsat jako součin její hmotnosti  $m$  a vektoru  $K$ , který závisí jen na *poloze* částice:

$$F = mK.$$

Gravitaci lze tedy analyzovat, jestliže si představíme, že v každém bodě prostoru je dán vektor  $K$ , jenž „působí“ na těleso, které tam můžeme vložit, ale který tam je sám, ať už tam těleso, na které působí, vložíme nebo ne. Vektor  $K$  má tři složky, z nichž každá je funkcí  $(x, y, z)$ , tj. funkcí polohy v prostoru. Takovouto veličinu nazýváme *polem* a říkáme, že tělesa  $A$  a  $B$  *vytvářejí* pole, tj. „dělají“

vektor  $K$ . Vložíme-li těleso do pole, je síla, která na něho působí, rovna součinu jeho hmotnosti a hodnoty vektoru pole v bodě, kde se těleso nachází.

Totéž je možné provést s potenciální energií. Potenciální energii – integrál z výrazu (síla)  $\cdot (ds)$  – můžeme napsat jako  $m$  krát integrál z (pole)  $\cdot (ds)$ , čímž se změní jen škála, takže potenciální energii  $U(x, y, z)$  tělesa v bodě prostoru  $(x, y, z)$  lze napsat jako  $m$  krát jiná funkce, kterou můžeme nazvat *potenciálem*  $\Psi$ . Integrál  $\int K \cdot ds = -\Psi$ , podobně jako  $\int F \cdot ds = -U$ ; liší se navzájem škálovým faktorem:

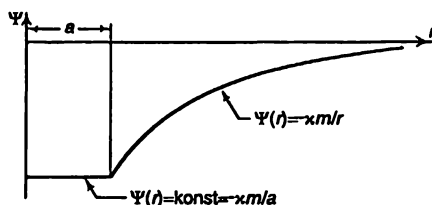
$$U = -\int F \cdot ds = -m \int K \cdot ds = m\Psi. \quad (14.7)$$

Známe-li funkci  $\Psi(x, y, z)$ , můžeme bezprostředně vypočítat potenciální energii tělesa v každém bodě prostoru, jmenovitě  $U(x, y, z) = m\Psi(x, y, z)$ , což se zdá být zcela triviální záležitostí, ale ve skutečnosti to není triviální věc, protože někdy je mnohem výhodnější popsat pole zadáním hodnoty  $\Psi$  v celém prostoru než zadáním  $K$ . Místo tří komplikovaných složek vektorové funkce je jednodušší zadat skalární funkci  $\Psi$ . Navíc, je-li pole vyvoláno více tělesy, mnohem snadněji lze vypočítat  $\Psi$  než kteroukoli složku  $K$ , neboť potenciály jsou skaláry a můžeme je tedy prostě sčítat, aniž bychom se museli starat o směr. Dále, jak ihned uvidíme, pole  $K$  lze snadno určit, známe-li  $\Psi$ .

Předpokládejme, že v bodech 1, 2 ... se nacházejí hmotné body hmotnostech  $m_1, m_2, \dots$  a chceme znát potenciál  $\Psi$  v nějakém libovolném bodě  $P$ . Je to prostě součet potenciálů jednotlivých těles v bodě  $P$ .

$$\Psi(P) = \sum_i -\frac{\kappa m_i}{r_{ip}} \quad i = 1, 2, \dots \quad (14.8)$$

Vztah, že potenciál je roven součtu potenciálů jednotlivých těles, jsme použili v předcházející kapitole, k výpočtu potenciálu vytvořeného kulovou slupkou, sečtením příspěvků k potenciálu v daném bodě od všech částí slupky. Výsledek výpočtu je graficky znázorněn na obr. 14.4. Potenciál je záporný, pro  $r = \infty$  nabývá nulovou hodnotu, mění se jako  $1/r$  pokud  $r$  není rovno  $a$  a uvnitř slupky je konstantní. Venku je potenciál roven  $-\kappa m/r$ , kde  $m$  je hmotnost slupky, což je stejný výsledek, jako kdyby byla všechna látka soustředěna ve středu. To neplatí *všude*, uvnitř kulové slupky je potenciál roven  $-\kappa m/a$  a je konstantní! *Kde je potenciál konstantní, tam není pole*, je-li potenciální energie konstantní, neexistuje žádná síla, protože přemísťujeme-li těleso z místa na místo v prostoru uvnitř slupky, je vykonaná práce přesně rovna nule. Proč je tomu tak? Protože práce vykonaná při pohybu tělesa je rovna změně potenciální energie vzaté záporně (nebo odpovídající integrál pole je roven změně potenciálu). Ale potenciální energie je *stejná* v kterýchkoli dvou vnitřních bodech, takže změna potenciální energie je rovna nule a při pohybu mezi dvěma vnitřními body se nekoná práce. Jediná možnost, jak může být práce rovna nule při pohybu ve všech směrech, je ta, že nepůsobí vůbec žádná síla.



Obr. 14.4 Potenciál vyvolaný dutou koulí o poloměru  $a$

Zde můžeme najít klíč k řešení problému určení síly nebo pole, známe-li potenciální energii. Předpokládejme, že známe potenciální energii tělesa, které je v bodě  $(x, y, z)$  a chceme vědět, jaká síla na něj působí. Jak uvidíme, se znalostí potenciálu v tomto jednom bodě problém nevyřešíme. Potřebujeme znát hodnotu potenciálu i v okolních bodech. Proč? Jak lze vypočítat složku síly  $x$ ? (Dokážeme-li to, podobně najdeme i složku  $y$  a složku  $z$  a tím budeme znát vlastně celou sílu.) Kdybychom tělesem pohnuli o malou vzdálenost  $\Delta x$ , práce, kterou vykoná síla, by byla rovna součinu  $x$ -ové složky síly a  $\Delta x$  (za předpokladu, že  $\Delta x$  je dostatečně malé) a to by byla změna potenciální energie při přechodu z jednoho bodu do druhého:

$$\Delta W = -\Delta U = F_x \Delta x. \quad (14.9)$$

Pouze jsme zde využili vztah  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\Delta U$  pro *velmi krátkou* dráhu. Vydělením  $\Delta x$  dostáváme, že síla je rovna

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}. \quad (14.10)$$

Samozřejmě, tento výsledek není zcela přesný. Co chceme skutečně vypočítat, je limita (14.10) pro  $\Delta x$  stále menší a menší, protože výpočet platí *přesně* jen pro infinitezimální  $\Delta x$ . Pak je to vlastně derivace  $U$  podle  $x$  a můžeme psát  $-dU/dx$ . Ale  $U$  závisí na  $x, y, z$  a matematici vynalezli jiný symbol, jenž nám má připomínat, že při diferencování takové funkce musíme být velmi opatrní a mít na paměti, že uvažujeme *jen změnu  $x$* , zatímco  $y$  a  $z$  se nemění. Místo  $d$  píšou prostě obrácenou šestku nebo  $\partial$ . (V diferenciálním počtu se to mělo zavést již od začátku, neboť  $d$  se chce člověku vykrátit, ale  $\partial$  ne!) Takže píšou  $\partial U/\partial x$  a navíc, chtějí-li být *mimořádně* důslední a opatrní, napíšou vedle svislou čáru s malým  $yz$  dole  $(\partial U/\partial x)_{yz}$ , což znamená: „Zderivuji  $U$  podle  $x$ , zatímco  $y$  a  $z$  nech konstantní.“ Znak toho, které proměnné se mají nechat konstantní, se obvykle vynechává, neboť je to jasné z kontextu. Zato *vždy* budeme psát  $\partial$  místo  $d$ , aby bylo jasné, že je to derivace, při níž některé další proměnné jsou konstantní. Nazývá se *parciální derivací* a je to derivace v níž měníme jen část proměnných, v tomto případě proměnnou  $x$ .

Máme tedy výsledek, že síla ve směru osy  $x$  je rovna záporně vzaté parciální derivaci  $U$  podle  $x$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (14.11)$$

Podobným způsobem diferencováním  $U$  podle  $y$  při konstantním  $x$  a  $z$  lze najít sílu ve směru souřadnice  $y$ . Třetí složka se vypočítá derivováním podle  $z$  při konstantním  $x$  a  $y$ :

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (14.12)$$

Tak lze vypočítat sílu z potenciální energie. *Pole* lze získat z *potenciálu* přesně stejným způsobem

$$K_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad K_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad K_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (14.13)$$

Připomeňme ještě další označení, které zatím ještě nějakou dobu nebudeme potřebovat. Protože  $K$  je vektor se složkami  $x, y, z$  a získáváme ho pomocí symbolů  $\partial/\partial x, \partial/\partial y$  a  $\partial/\partial z$ , připomínají tyto symboly složky vektoru. Matematici vynalezli nový symbol  $\nabla$ , zvaný „grad“ nebo „gradient“,



## PRÁCE A POTENCIÁLNÍ ENERGIE (ZÁVĚR)

jenž není veličinou, ale je to *operátor*, který ze skaláru udělá vektor. Má tyto „složky“: složka  $x$  je  $\partial/\partial x$ , složka  $y$  je  $\partial/\partial y$ , složka  $z$  je  $\partial/\partial z$ , a proto s potěšením můžeme přepsat naše vztahy v elegantním tvaru

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad \mathbf{K} = -\nabla \Psi. \quad (14.14)$$

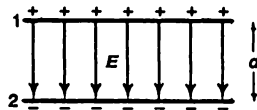
Používáme-li zápis s  $\nabla$ , ihned vidíme, zda máme před sebou vektorové rovnice nebo ne. Ve skutečnosti (14.14) znamená přesně totéž jako rovnice (14.11) a (14.12). Je to jen způsob jejich zápisu a protože se nám vždy nechce psát tři rovnice, píšeme místo nich prostě  $\nabla U$ .

Ještě jeden příklad polí a potenciálů z elektřiny. V tomto případě je síla působící na stacionární náboj rovna součinu náboje a elektrického pole:  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . (Obecně  $x$ -ová složka síly má i část, jež závisí na magnetickém poli. Z rovnice (12.10) lze snadno ukázat, že síla, jež působí na částici dleky magnetickému poli, svírá vždy pravý úhel s rychlostí částice i s magnetickým polem. Protože síla magnetického pole působí na pohybující se náboj pod pravým úhlem k směru rychlosti, magnetické pole v tomto případě *nekoná práci*. Při výpočtech kinetické energie v elektrickém a magnetickém poli nemusíme brát v úvahu příspěvek od magnetického pole, neboť toto pole nemění kinetickou energii nebo vykonanou práci jako při gravitaci a můžeme vypočítat veličinu  $\varphi$ , jež je rovna zápornému dráhovému integrálu z  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ , z libovolného pevného bodu do bodu, v němž potenciál počítáme. Potenciální energie v elektrickém poli je pak právě rovna součinu náboje  $q$  a potenciálu  $\varphi$

$$\varphi(r) = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \quad U = q\varphi.$$

Vezměme jako příklad dvě paralelní kovové desky, každou s povrchovým nábojem  $\pm\sigma$  na jednotkové ploše, tzv. rovinný kondenzátor. Již dříve jsme vypočítali, že mimo kondenzátor je síla nulová a že mezi deskami je konstantní elektrické pole ve směru od  $+$  k  $-$  velikosti  $\sigma/\epsilon_0$  (obr. 14.5). Chtěli bychom zjistit, jaká práce se vykoná přenesením náboje z jedné desky na druhou. Práce bude rovna integrálu z výrazu (síla)  $\cdot (d\mathbf{s})$ , jenž lze napsat jako součin náboje a potenciálu na první desce mínus tatáž veličina na druhé desce:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$



Obr. 14.5 Pole mezi rovnoběžnými deskami

Tento integrál lze snadno vypočítat, neboť síla je konstantní a označíme-li vzdálenost desek jako  $d$ , dostáváme

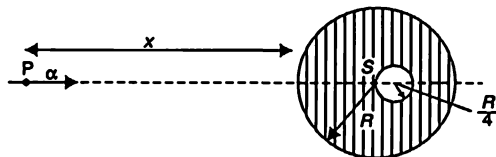
$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q\sigma}{\epsilon_0} \int_1^2 dx = \frac{q\sigma d}{\epsilon_0}.$$

Rozdíl potenciálu  $\Delta\varphi = \sigma d/\epsilon_0$  se nazývá *napětí* a  $\varphi$  se měří ve voltech. Řekáme-li, že desky jsou nabitě na určité napětí, znamená to, že rozdíl potenciálů těchto desek je tolik a tolik voltů. Pro kondenzátor ze dvou paralelních desek s plošnou hustotou náboje  $\pm\sigma$  je napětí nebo rozdíl potenciálů desek roven  $\sigma d/\epsilon_0$ .

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 14.1 ■ Síla  $F = 1,5 y \mathbf{i} + 3 x^2 \mathbf{j} - 0,2 (x^2 + y^2) \mathbf{k}$  newtonů působí na částici o hmotnosti 1,00 kg. Při  $t = 0$  má částice polohový vektor  $r = 2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$  metrů a pohybuje se rychlostí  $v = 2 \mathbf{j} + \mathbf{k}$  m/s. Při  $t = 0$  určete
- sílu, jež působí na částici,
  - zrychlení částice,
  - kinetickou energii částice,
  - rychlost změny kinetické energie.
- 14.2 ■ Najděte přibližnou polohu, rychlost a kinetickou energii částice z předchozí úlohy v okamžiku  $t = 0,01$  s.
- 14.3 ■ Částice se pohybuje z bodu  $(0, -1, 0)$  do bodu  $(0, 1, 0)$  bez tření působením téže síly  $F$  jako v úloze 14.1. Předpokládejme, že na částici působí další síla, která ji udržuje na předepsané trajektorii. Najděte práci, kterou koná síla  $F$  pro dvě varianty trajektorií:
- přímku podél osy  $y$ ,
  - kružnici v rovině  $z, y$ . Je pole síly  $F$  konzervativní?
- 14.4 ■ Částice o hmotnosti 6,0 kg se může pohybovat podél osy  $x$  bez tření. Svůj pohyb začíná v okamžiku  $t = 0$  v bodě  $x = 0$ .
- Částice projde vzdálenost 3 m za působení síly  $F = (3 + 4x)$  newtonů ( $x$  je udáno v metrech).
    - Jakou přitom získá rychlost?
    - Jaké bude její zrychlení na konci dráhy?
    - Jaký bude výkon síly v tomto okamžiku?
  - Částice se pohybuje po dobu 3 s za působení síly  $F = (3 + 4 t)$  newtonů ( $t$  je udáno v sekundách). Odpovězte na otázky a) – c) v tomto případě.
- 14.5 ■ Kulová slupka s poloměrem 0,5 m je rovnoměrně nabitá na potenciál  $10^6$  V. Určete její náboj.
- 14.6 ■ Kondenzátor je zpravidla tvořen dvěma kovovými tělesy, jež jsou nabitá náboji opačného znamení. Kapacita  $C$  se definuje jako poměr náboje na jednom z těles k rozdílu potenciálů mezi nimi:
- $$C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2} [F].$$
- Určete kapacitu dvou koncentrických koulí o poloměrech  $R_1$  a  $R_2$ .
- 14.7 ■ Kdyby Země byla nabitá nábojem 1 C, jaký by byl její potenciál?
- 14.8 ■ Automobil má hmotnost 1 t. Maximální výkon jeho motoru je 120 kW. Nechť automobil dosahuje tohoto maximálního výkonu při rychlosti 60 km/h. Jaké je zrychlení automobilu při této rychlosti?
- 14.9 ■ Ohebný kabel délky  $L$  a lineární hmotnosti  $M$  kilogramů na metr je přehozen přes kladku, jejíž hmotnost a poloměr jsou zanedbatelně malé. Také tření v kladce lze zanedbat. V počátečním okamžiku je kabel v rovnováze, z níž je vyveden slabým zatáhnutím za jeden konec. Delší část kabelu začne nabývat převahy a kabel začne se zrychlením sklouzávat z kladky. Najděte rychlost kabelu v okamžiku, kdy jeho konec opouští kladku.
- 14.10 ■ Voda protéká hadicí s hladkými stěnami a vyráží z jejího nástavce o obsahu průřezu  $35 \text{ cm}^2$ . Proud vody míří pod úhlem  $30^\circ$  k vodorovné rovině a dosahuje výšky 4,8 m nad ústím hadice. Druhý konec hadice je ponořen ve velké nádrži, kde je hladina vody o 2,4 m níže než je ústí hadice. Je-li celková účinnost pumpy poháněné elektromotorem 60%, jaký výkon vyvíjí elektromotor?
- 14.11 ■ Světové rekordy ve vrhu koulí, hodu diskem a vrhu oštěpem byly v roce 1960 19,40 m, 59,96 m a 86,09 m. Hmotnosti těchto vrhaných nářadí jsou 7,257 kg, 1,99 kg a 0,806 kg. Zaokrouhlete tyto údaje a porovnejte práci vykonanou každým sportovcem při těchto rekordních výkonech. Pokaždé předpokládejte, že vrh probíhá z počáteční výšky 1,8 m nad zemí pod elevačním úhlem  $45^\circ$ . Odpor vzduchu zanedbejte.

- 14.12 ■ Výkon automobilového motoru je 63 kW a hmotnost automobilu 1,2 t. Při pohybu po rovině konstantní rychlostí 48 km/h vyvíjí motor výkon pouze 15 kW. Určete největší stoupání silnice na němž se automobil může pohybovat touto rychlostí za předpokladu, že síly tření nezávisí na velikosti stoupání. (Velikost stoupání charakterizujte buď pomocí úhlu s vodorovnou rovinou nebo nějaké funkce tohoto úhlu.)
- 14.13 ■ Mějme homogenní kouli o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$ . Jak závisí gravitační potenciál a intenzita gravitačního pole vytvářeného tímto tělesem na vzdálenosti od jeho středu? Zobraďte výsledek i graficky.
- 14.14 ■ Miska pružinových vah má hmotnost 0,025 kg a tuhost pružiny je 15,3 N/m. Z výšky  $h = 9,0$  cm dopadne na misku závažíčko o hmotnosti  $m = 50$  g. Náraz je dokonale nepružný. O jakou největší vzdálenost závažíčko klesne? Vzdálenost odečítejte z bodu, z něhož začalo padat.
- 14.15 ■ Pružina tuhosti  $k$  je roztazena působením konstantní síly  $F$  a nachází se v rovnováze. Předpokládejte, že prodloužení pružiny zůstává úměrné velikosti síly a ukažte, že při výchylkách vzhledem k nové rovnovážné poloze je tuhost pružiny táž.
- 14.16 ■ Malý vozík se pohybuje bez tření po nakloněné rovině, jež je dole zakončena uzavřenou kruhovou smyčkou poloměru  $R$ . Z jaké výšky  $H$  se musí vozík začít pohybovat, aby projel celou smyčkou a neodtrhl se?
- 14.17 ■ Hmotný bod je v klidu v nejvyšším bodě dokonale hladké koule poloměru  $R$  a pak začne po povrchu koule klouzat dolů působením tíhové síly. Jakou vzdálenost projde, než se od povrchu koule odtrhne?
- 14.18 ■ Malé těleso o hmotnosti  $m$  obíhá pod vlivem gravitační přitažlivé síly kolem těžkého tělesa o hmotnosti  $M$  po eliptické dráze. Těžké těleso můžeme považovat za nehybné. Velká poloosa orbity je rovna  $a$ , její excentricita  $e$ . Vypočítejte celkovou energii tělesa (kinetickou plus potenciální)  $E$ . Všimněte si toho, že výsledek nezávisí na excentricitě.
- 14.19 ■ a) Dokažte, že obsah elipsy je roven  $\pi ab$ .  
b) Odvoďte třetí Keplerův zákon pro eliptické dráhy.  
c) Ukažte, že dráhy všech těles, u nichž na jednotku hmotnosti připadá stejná energie, mají stejné oběžné doby. (Pro jednoduchost předpokládejte, že  $m \ll M$ .)
- 14.20 ■ Rychlost, jakou musíme udělit tělesu, aby opustilo gravitační pole Země, je přibližně rovna 11 km/s. Jestliže mezplanetární loď, jež při výstupu z atmosféry spálí všechno palivo, získá rychlost 12 km/s, jaká bude její rychlost ve vzdálenosti  $10^6$  km od Země.
- 14.21 ■ Motory kosmické lodi přestávají pracovat někde v blízkosti Země. Jakou nejmenší rychlost musí loď získat, aby opustila sluneční soustavu, má-li mít „při výstupu“ rychlost 16 km/s vzhledem k Slunci? Rychlost Země při jejím oběhu kolem Slunce je rovna 30 km/s.
- 14.22 ■ Kosmická loď z předchozí úlohy má opustit sluneční soustavu v určitém směru. Jaká je maximální rychlost vypuštění ze Země, která k tomu může být zapotřebí?
- 14.23 ■ Kosmická loď má být navedena na oběžnou dráhu kolem Slunce s periheliem 0,01 AU a oběžnou dobou stejnou jako je oběžná doba Země (1 rok). Jakou rychlostí a v jakém směru vzhledem ke spojnici Země–Slunce musí být loď vypuštěna? Orbitální rychlost Země je rovna 30 km/s.
- 14.24 ■ Uvnitř koule poloměru  $R$  a hustoty  $\rho$  je kulová dutina poloměru  $R/4$ . Její střed je ve vzdálenosti  $R/4$  od bodu  $S$  (středu velké koule) na spojnici  $PS$ , kde  $P$  je bod ve vzdálenosti  $x$  od povrchu velké koule (viz obrázek). Najděte zrychlení volného pádu  $a$  v bodě  $P$ .



# Speciální teorie relativity

---

## 15.1 PRINCIP RELATIVITY

## 15.2 LORENTZOVA TRANSFORMACE

## 15.3 MICHELSONŮV-MORLEYŮV EXPERIMENT

## 15.4 TRANSFORMACE ČASU

## 15.5 LORENTZOVSKÁ KONTRAKCE

## 15.6 SOUČASNOST

## 15.7 ČTYŘVEKTORY

## 15.8 RELATIVISTICKÁ DYNAMIKA

## 15.9 EKVIVALENCE HMOTNOSTI A ENERGIE

### 15.1 PRINCIP RELATIVITY

Více než 200 let se věřilo, že Newtonovy rovnice správně popisují přírodu. Když se v nich poprvé našla chyba, našel se i způsob, jak ji odstranit. Oboje, chybu i její korekci, objevil Einstein v roce 1905.

V druhém Newtonově zákoně, daném vztahem

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

se mlčky předpokládalo, že  $m$  je konstantní veličina. Ale nyní víme, že to není pravda a že hmotnost tělesa roste, zvyšuje-li se jeho rychlost. V Einsteinově opraveném vztahu má  $m$  hodnotu

SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

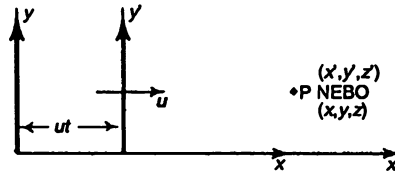
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (15.1)$$

kde  $m_0$  je „klidová hmotnost“, (hmotnost tělesa, jež se nepohybuje), a  $c$  je rychlost světla, která je přibližně rovna  $3 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pro ty, jímž stačí se z teorie naučit jen to, aby se mohli pustit do řešení úloh, tento vztah zcela postačí. Stačí, jestliže se v Newtonových zákonech zavede korekční člen pro hmotnost. Ze vztahu je vidět, že za normálních okolností je přírůstek hmotnosti velmi malý. Dokonce i pro družici Země, jež se pohybuje rychlostí třeba  $9,0 \text{ km/s}$ , je  $v/c = 3 \cdot 10^{-5}$ , a po dosazení do uvedeného vztahu dostaneme korekci hmotnosti ne větší než dvě až tři miliardtiny, což téměř nelze pozorovat. Platnost vztahu však byla dostatečně potvrzena pozorováním mnoha druhů částic, jejichž rychlosti dosahují prakticky až rychlosti světla. Za normálních okolností je tento efekt velmi malý, proto je pozoruhodné, že byl objeven nejprve teoreticky a až potom experimentálně. Ačkoli při dostatečně velkých rychlostech je růst hmotnosti velmi velký, nebyl objeven empiricky. Proto je zajímavé sledovat, jaká kombinace experimentů a fyzikálních úvah vedla k odhalení tak jemné modifikace zákona (v době původního objevu). Přispělo k tomu nemálo lidí, přičemž konečným výsledkem byl Einsteinův objev.

Existují dvě Einsteinovy teorie relativity. Tato kapitola hovoří o speciální teorii relativity z roku 1905. V roce 1915 uveřejnil Einstein dodatečnou teorii nazvanou Obecná teorie relativity. Ta je zobecněním speciální teorie relativity pro případ gravitace (my se jí zde nebudeme zabývat).

Newton byl první, kdo vyslovil princip relativity jako jeden z důsledků pohybových zákonů: „Vzájemné pohyby těles, nacházejících se v daném prostoru, jsou stejné, ať je prostor v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře vpřed.“ To například znamená, že jestliže se kosmická loď pohybuje rovnoměrnou rychlostí, všechny experimenty a všechny jevy v lodi budou probíhat tak, jakoby se loď nepohybovala (samozřejmě za předpokladu, že se nikdo nebude dívat ven). To je smyslem principu relativity. Myšlenka je jednoduchá, jedinou otázkou je, zda je *pravda*, že ve všech experimentech provedených v pohybující se soustavě budou všechny fyzikální zákony stejné, jako v soustavě, která je v klidu. Nejprve zjistíme, zda v pohybující se soustavě mají Newtonovy zákony stejný tvar.



Obr. 15.1 Dvě souřadnicové soustavy v rovnoměrném relativním pohybu podél svých  $x$ -ových os

Předpokládejme, že se Pavel pohybuje s konstantní rychlostí  $u$  ve směru osy  $x$ , přičemž měří polohu určitého bodu (obr. 15.1). Ve své souřadnicové soustavě si značí souřadnici ve směru osy  $x$  jako  $x'$ . Petr je v klidu, přičemž měří polohu téhož bodu. Souřadnici ve směru osy  $x$  ve své souřadnicové soustavě označí jako  $x$ . Počátek souřadnicové soustavy, v níž je Pavel, se posunul za čas  $t$  o vzdálenost  $ut$ , a jestliže obě soustavy zpočátku splývaly, máme

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (15.2)$$

Dosadíme-li tuto transformaci do Newtonových zákonů, zjistíme, že se přetransformovaly do stejných zákonů v čárkované soustavě. To znamená, že Newtonovy zákony mají stejný tvar v pohybující se soustavě jako v stacionární soustavě, a proto na základě mechanických experimentů není možné říci, zda se soustava pohybuje nebo ne.

Princip relativity se v mechanice používal již velmi dávno. Použili ho různí lidé; například Huygens ho použil při odvození pravidel platných při srážkách kulečkových koulí podobně, jako jsme ho použili my v kapitole 10 při diskuzi o zachování hybnosti. Zájem o tento princip vzrostl v minulém století v důsledku výzkumů elektrických, magnetických a světelných jevů. Dlouhá série podrobných studií těchto jevů mnoha lidmi kulminovala v Maxvellových rovnicích elektromagnetického pole, které jednotně popisují elektřinu, magnetismus a světlo. Zdálo se však, že Maxvellovy rovnice *nevyhovovaly* principu relativity, neboť přetransformujeme-li Maxvellovy rovnice pomocí rovnic (15.2), *nebudou mít stejný tvar*. Proto by se elektrické a optické jevy v letící kosmické lodi měly lišit od jevů v nehybné lodi. Tyto jevy by pak bylo možné použít k určení rychlosti lodi, a ve speciálním případě pomocí vhodných optických nebo elektrických měření by bylo možno určit absolutní rychlost lodi. Jedním z důsledků Maxvellových rovnic je, že dojde-li k určité poruše pole, při níž vzniká světlo, toto elektromagnetické vlnění se šíří všemi směry stejnou rychlostí  $c = 3 \cdot 10^5$  km/s. Dalším důsledkem těchto rovnic je, že pohybuje-li se zdroj poruchy, šíří se vyzářené světlo prostorem stejnou rychlostí  $c$ . Je to analogické jako v případě zvuku, kdy zvukové vlny jsou podobně nezávislé na pohybu zdroje.

V případě světla vede tato nezávislost pohybu vlnění na pohybu zdroje k zajímavému problému:

Předpokládejme, že sedíme v autě, jež jede rychlostí  $u$  a že světlo z reflektorů auta za námi nás mří rychlostí  $c$ . Zdiferencováním první rovnice (15.2) máme

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u,$$

což znamená, že podle Galileiho transformace by zdánlivá rychlost světla měřená z auta nemohla být  $c$ , ale  $c - u$ . Pohybuje-li se např. auto rychlostí  $100\,000$  km  $\cdot$  s<sup>-1</sup> a světlo rychlostí  $300\,000$  km  $\cdot$  s<sup>-1</sup>, pak rychlost světla měřená z auta by měla být  $200\,000$  km  $\cdot$  s<sup>-1</sup>. V každém případě lze měřením rychlosti světla z auta určit rychlost tohoto auta (za předpokladu, že galileovská transformace platí pro světlo). Na této myšlence bylo založeno mnoho experimentů k určení rychlosti pohybu Země, ale všechny selhaly – nedávaly *vůbec žádnou rychlost*. Abychom si ukázali, co se stalo a v čem byl celý problém, rozebereme si podrobně jeden z těchto experimentů. Ukázalo se, že někde *byla* chyba, a sice něco nebylo v pořádku s fyzikálními rovnicemi. Co to asi mohlo být?

## 15.2 LORENTZOVA TRANSFORMACE

Když se zjistilo, že s rovnicemi fyziky v uvedeném případě není vše v pořádku, nejprve padlo podezření na Maxvellovy rovnice elektrodynamiky, jež byly tehdy známy jen dvacet let. Zdálo se být téměř samozřejmé, že tyto rovnice musí být nesprávné, a proto byla snaha je změnit tak, aby při Galileiho transformaci zachovávaly princip relativity. Přitom bylo třeba do těchto rovnic zavést nové členy, jež vedly k předpovědi nových elektrických jevů, jejichž existence se experimentálně nepotvrdila. Proto bylo třeba tuto cestu opustit. Postupně se pak stalo zřejmým, že Maxvellovy zákony elektrodynamiky jsou správné a zdroj problémů je třeba hledat někde jinde.

Mezitím si H. A. Lorentz všiml pozoruhodné a zvláštní věci: když provedl v Maxwellových rovnicích substituci

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (15.3)$$

tvár rovnic se nezměnil. Rovnice (15.3) jsou známé *Lorentzovy transformace*. Einstein sledoval původní Poincarého myšlenku a pak navrhl, že *všechny fyzikální zákony* by měly být takové, aby se *při Lorentzově transformaci neměnily*. Jinými slovy, měly bychom změnit ne zákony elektrodynamiky, ale zákony mechaniky. Jak změnit Newtonovy zákony tak, aby se při Lorentzově transformaci *nezměnily*? Je-li stanoven takový cíl, pak je třeba přepsat Newtonovy rovnice tak, aby byly splněny stanovené podmínky. Jak se ukázalo, jediné, co je třeba, je změnit hmotnost  $m$  v Newtonových rovnicích podle vztahu (15.1). Po této změně budou Newtonovy zákony v souladu se zákony elektrodynamiky. Když k porovnání Pavlových a Petrových měření použijeme Lorentzovu transformaci, nikdy nebudeme schopni zjistit, zda se jeden nebo druhý pohybuje, neboť tvary všech rovnic budou v obou souřadnicových soustavách stejné!

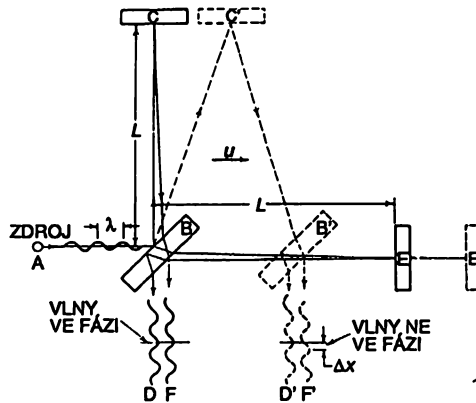
Je zajímavé provést diskusi o smyslu výměny staré transformace souřadnic za novou, neboť stará (Galileova) transformace se zdá být samozřejmou, zatímco nová (Lorentzova) se zdá být podivnou. Rádi bychom se přesvědčili, zda je logicky i experimentálně možné, aby byla správná nová a ne stará transformace. Pro nalezení odpovědi a pro pochopení smyslu této transformace nám nestačí studovat jen zákony mechaniky, ale podobně jako Einstein, musíme provést analýzu našeho chápání *prostoru a času*. Diskuze o těchto myšlenkách a o jejich aplikacích v mechanice nám zabere nějaký čas, proto dopředu prozradíme, že to nebude zbytečná námaha, neboť výsledky souhlasí s experimentem.

### 15.3 MICHELSONŮV-MORLEYŮV EXPERIMENT

Jak jsme již zmínili, prováděly se pokusy určit absolutní rychlost Země v hypotetickém „éteru“, o němž se předpokládalo, že je jím prostoupen celý prostor. Nejznámější z těchto experimentů je experiment, jež provedli Michelson a Morley v roce 1887. Bylo to o 18 let dříve, než se konečně Einsteinovi podařilo podat vysvětlení negativních výsledků tohoto pokusu.

Michelsonův-Morleyho experiment byl proveden pomocí přístroje, jehož schéma je na *obr. 15.2*. Přístroj se skládal ze zdroje světla  $A$ , polopropustného postříbřeného zrcadla  $B$  a dvou zrcadel  $C$  a  $E$ , vše namontováno na pevné základně. Zrcadla jsou vzdálena od  $B$  ve stejných vzdálenostech  $L$ . Dopadající paprsek světla se na polopropustném zrcadle  $B$  rozdvojí a takto rozdvojené paprsky letí k zrcadlům po navzájem kolmých dráhách, odkud se odrážejí zpět k bodu  $B$ . Po dopadu na  $B$  se paprsky opět spojí jako superpozice dvou paprsků  $D$  a  $F$ . Proletí-li světlo z  $B$  do  $E$  a zpět za stejnou dobu jako z  $B$  do  $C$  a zpět, budou vyletující paprsky  $F$  a  $D$  ve fázi a navzájem se zesílí, ale jestliže se tyto dvě doby trochu liší, nebudou paprsky ve fázi a vznikne interference. Nachází-li se přístroj vzhledem k éteru v „klidu“, doby letu paprsků by se měly navzájem přesně rovnat, ale pohybuje-li se vpravo rychlostí  $u$ , měly by být doby rozdílné. Podívejme se proč.

## MICHELSONŮV-MORLEYŮV EXPERIMENT



Obr. 15.2 Schématický náčrt Michelsonova-Morleyova experimentu

Nejprve vypočteme dobu, kterou potřebuje světlo k letu z  $B$  do  $E$  a zpět. Řekněme, že doba letu od polopropustného zrcadla  $B$  k zrcadlu  $E$  je  $t_1$  a čas letu zpět je  $t_2$ . Zatímco světlo letí z  $B$  do  $E$ , přístroj se posune o vzdálenost  $ut_1$ , takže světlo muselo proletět rychlostí  $c$  vzdálenost  $L + ut_1$ . Tuto vzdálenost lze vyjádřit jako  $ct_1$ , takže máme

$$ct_1 = L + ut_1, \quad \text{tj. } t_1 = \frac{L}{c - u}.$$

I tento výsledek je zřejmý, neboť relativní rychlost světla vzhledem k přístroji je  $c - u$ , takže doba je rovna vzdálenosti  $L$  dělené rychlostí  $c - u$ . Podobně můžeme vypočítat dobu  $t_2$ . O tuto dobu se zrcadlo  $B$  posune o vzdálenost  $ut_2$  a zpáteční dráha světla je rovna  $L - ut_2$ . Takže máme

$$ct_2 = L - ut_2, \quad \text{tj. } t_2 = \frac{L}{c + u}.$$

Celková doba je pak

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - u^2},$$

což je vhodné zapsat ve tvaru

$$t_1 + t_2 = \frac{2L}{c \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)}. \quad (15.4)$$

Nyní vypočteme dobu  $t_3$ , během níž proletí světlo vzdálenost od zrcadla  $B$  k zrcadlu  $C$ . Podobně jako předtím za dobu  $t_3$  se bude zrcadlo  $C$  pohybovat vpravo na vzdálenost  $ut_3$  do bodu  $C$ . Současně s tím projde světlo vzdálenost  $ct_3$  podél přepony trojúhelníka, kterou tvoří  $BC'$ . Pro tento pravouhlý trojúhelník platí

$$(ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2 \quad \text{neboli} \quad L^2 = c^2 t_3^2 - u^2 t_3^2 = (c^2 - u^2) t_3^2,$$



odkud máme

$$t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

Na zpáteční cestě proletí světlo stejnou vzdálenost, což je vidět ze symetrie nákresu, takže i doba návratu je stejná a celková doba je rovna  $2t_3$ . Po malých úpravách můžeme psát

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (15.5)$$

Nyní můžeme porovnat doby obou paprsků. Čitatele ve výrazech (15.4) a (15.5) jsou stejné a představují dobu letu paprsků, kdyby byl přístroj v klidu. Ve jmenovateli bude člen  $u^2/c^2$  malý, s výjimkou případů, kdy  $u$  je srovnatelné s  $c$ . Jmenovatele reprezentují modifikaci dob způsobenou pohybem přístroje. A hle, tyto modifikace nejsou stejné! Čas k překonání dráhy do  $C$  a zpět je o něco menší než do  $E$  a zpět, i navzdory tomu, že zrcadla jsou ve stejné vzdálenosti od  $B$  a jedině, co je třeba provést, je změřit přesně tento rozdíl.

Zde vzniká menší technický problém – co když dvě vzdálenosti  $L$  nejsou přesně stejné? Vždyť zcela přesně stejné je přece nedokážeme udělat. V takovém případě přístroj prostě otočíme o  $90^\circ$ , takže  $BC$  leží ve směru pohybu a  $BE$  je na něho kolmé. Malý rozdíl délek se tak stane nepodstatným – budeme sledovat posun interferenčních proužků při pootočení přístroje.

Během pokusu nastavili Michelson a Morley přístroj tak, aby rameno  $BE$  bylo téměř rovnoběžné se směrem pohybu Země po její oběžné dráze (v určitém čase ve dne a v noci). Oběžná rychlost Země je přibližně  $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  a nějaký posun vůči éteru by měl být aspoň takový v určitém čase dne nebo noci a v určitém čase roku. Přístroj byl dostatečně citlivý k pozorování takového jevu, ale žádný rozdíl časů se nezjistil – rychlost pohybu Země v éteru nebylo možno určit. Výsledek experimentu byl nulový.

Výsledek Michelsonova-Morleyho experimentu byl velmi záhadný a vzrušující. První užitečný nápad, jak se dostat ze slepé uličky, patřil Lorentzovi. Podle něho dochází při pohybu hmotných těles k jejich kontrakci, přičemž toto zkrácení je jen ve směru jejich pohybu. Má-li těleso v klidu délku  $L_0$ , pak při pohybu rychlostí  $u$  ve směru této délky je nová délka, kterou označíme  $L_1$  ( $L$ -rovnoběžné) dána vztahem

$$L_1 = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (15.6)$$

Použitím této modifikace se v Michelsonově-Morleyho přístroji vzdálenost  $BC$  nemění, ale vzdálenost z  $B$  do  $E$  se zkrátí na  $L\sqrt{1 - u^2/c^2}$ . Vztah (15.5) se proto nemění, ale ve vztahu (15.4) musíme zaměnit  $L$  podle vztahu (15.6), a tak máme

$$t_1 + t_2 = \frac{\frac{2L}{c} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (15.7)$$

Porovnáním se vztahem (15.5) vidíme, že  $t_1 + t_2 = 2t_3$ . Zkracuje-li se přístroj právě popsaným způsobem, umíme vysvětlit, že při Michelsonově-Morleyho experimentu nenastává žádný posuv interferenčních proužků. Ačkoli bylo možné hypotézou kontrakce vysvětlit negativní výsledek experimentu, bylo možné proti ní namítnat, že byla narychlo vymyšlena za účelem vysvětlení tohoto problému a že je příliš nepřirozená. V mnoha dalších experimentech, jimiž se měl objevit éterový vítr, však vznikly podobné obtíže, až to nakonec vypadalo tak, jakoby se příroda spikla proti člověku tím, že vždy zavádí nějaký nový jev, aby znemožnila vysvětlení každého jevu, o kterém si člověk myslel, že mu umožní změřit rychlost  $u$ .

Nakonec se uznalo (ukázal na to Poincaré), že *dokonalé spiknutí je samo o sobě zákonem přírody!* Poincaré vyslovil domněnku, že v přírodě *existuje* takový zákon, že objevení éterového větru *jakýmkoli* experimentem je nemožné, tj. neexistuje způsob, jak určit absolutní rychlost.

## 15.4 TRANSFORMACE ČASU

Při kontrole toho, zda myšlenka kontrakce délky je v souladu s ostatními experimenty, se ukázalo, že vše by bylo v pořádku za předpokladu, že *i čas se mění*, jak je vyjádřeno ve čtvrté z rovnic (15.3). Je to způsobeno tím, že čas  $t_3$ , potřebný k cestě z  $B$  do  $C$  a zpět, není stejný, když ho počítá experimentátor v pohybuující se kosmické lodi, jako když ho počítá stacionární pozorovatel sledující kosmickou loď. Pro člověka v kosmické lodi je tento čas roven  $2L/c$ , ale pro druhého pozorovatele je roven  $2L/c\sqrt{1 - u^2/c^2}$  (15.5). Tedy, když vnější pozorovatel vidí, jak si pozorovatel v kosmické lodi zapaluje cigaretu, všechno se mu zdá být pomalejší než normálně, zatímco pro pozorovatele uvnitř lodě má všechno normální rychlost. Proto se musí nejen zkracovat délka, ale musí se též zjevně zpomalovat chod hodin. To znamená, že když hodiny v kosmické lodi zaznamenávají podle pozorování kosmonauta uplynutí jedné sekundy, pro vnějšího pozorovatele to bude  $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$  sekund.

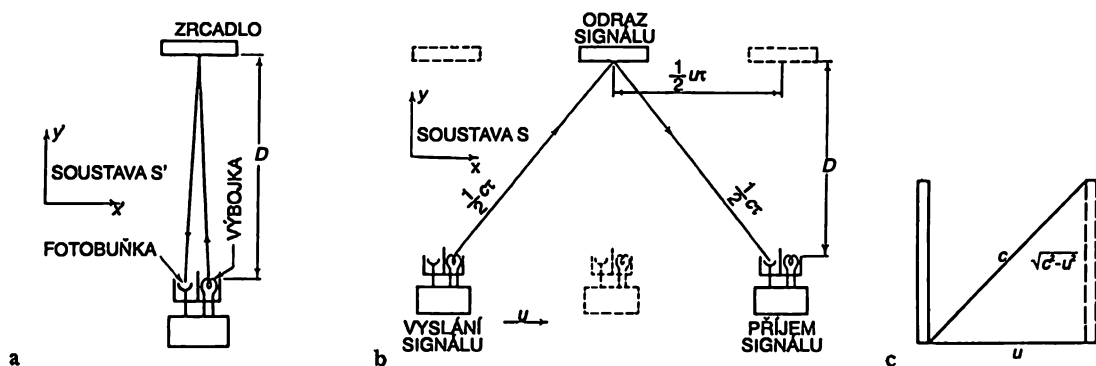
Zpomalování hodin v pohybuujícím se systému je velmi zvláštní jev a zaslouží si vysvětlení. Abychom ho pochopili, musíme se podívat na práci hodinového stroju a na to, co se s ním děje, když se pohybuje. Protože je to dost obtížné, vezměme si úplně jednoduché hodiny. Ty, co si vybereme, jsou trochu výstřední, ale v principu jdou: je to metrová tyč se zrcadly na obou koncích. Když mezi zrcadla vpustíme světelný signál, světlo se bude mezi nimi odrážet nahoru a dolů, přičemž nechť se vždy, kdy světlo přijde dolů, ozve tiknutí, jako u normálních hodin. Sestrojíme si dvoje takové hodiny s přesně stejnou délkou a sesynchronizujeme je tak, že je pustíme najednou – potom budou ukazovat čas stejně, neboť délka dráhy světla je stejná a rychlost světla je vždy  $c$ . Jedny z těchto hodin dáme kosmonautovi do kosmické lodě. Ten si je upevní tak, že tyč bude kolmá ke směru pohybu – pak se délka tyče nezmění. Odkud víme, že se délky v kolmém směru nemění? Pozorovatel a kosmonaut se mohou dohodnout, že v okamžiku, kdy se budou navzájem míjet, udělají si jeden druhému značku na tyči ve směru osy  $y$  ve stejné výšce. Ze symetrie vyplývá, že obě značky musí být na stejných souřadnicích  $y$  a  $y'$ , neboť v opačném případě, když se potkají, aby si porovnali výsledky, jedna značka by byla výše nebo níže než druhá, takže bychom mohli říci, kdo z nich se skutečně pohyboval.

Ted' se podívejme, co se děje s pohybuujícími se hodinami. Dříve než si je vzal kosmonaut s sebou na palubu, přesvědčil se, že jsou to pěkné standardní hodiny, ba ani po dobu letu nezjistí nic zvláštního. Kdyby něco zjistil, kdyby se něco za pohybu změnilo, poznal by, že se pohybuje. Ale podle principu relativity je to nemožné v soustavě, která se pohybuje rovnoměrně přímočaře, a proto se nic nezmění. Na druhé straně, když se na letící hodiny podívá vnější pozorovatel, vidí, že světlo

na své cestě od zrcadla k zrcadlu koná ve skutečnosti cikcakovou dráhu, protože tyč se pohybuje v bočním směru. Takový cikcakový pohyb jsme již analyzovali v souvislosti s Michelsonovým-Morleyovým experimentem. Posune-li se tyč o vzdálenost úměrnou  $u$  na obr. 15.3, pak vzdálenost, kterou za stejný čas urazí světlo, je úměrná  $c$  a vertikální vzdálenost je proto úměrná  $\sqrt{c^2 - u^2}$ .

To znamená, že v pohybujících se hodinách trvá světlu let od zrcadla k zrcadlu *déle* než ve stacionárních hodinách. Proto doba mezi dvěma tiknutími hodin je zjevně delší pro pohybující se hodiny v poměru přepony trojúhelníka k odvěsně (odtud pocházejí druhé odmocniny v našich vztazích). Z obrázku je ještě vidět, že čím je větší  $u$  tím pomalejšími se jeví pohybující se hodiny. Pomaleji jdou nejen hodiny této konstrukce, ale jestliže platí teorie relativity, pak jakékoli jiné hodiny, založené na jakémkoli principu se také zpomalují, a to ve stejném poměru. To můžeme tvrdit i bez další analýzy. Proč?

Abychom odpověděli na tuto otázku, předpokládejme, že máme dvoje další hodiny, zcela stejné konstrukce s kolečky a převody nebo hodiny založené na principu radioaktivního rozpadu nebo na nějakém jiném principu. Nastavíme je tak, aby byly přesně seřazeny s prvními dvěma hodinami. Zatímco u prvních hodin poletí světlo nahoru a zpět a svůj příchod oznámí tiknutím, i v nové dvojici hodin se uskuteční nějaký cyklus, což se projeví dvěma současnými záblesky, úderem nebo jinými signály. Jedny hodiny dáme společně s prvním typem hodin do kosmické lodi. Třeba tyto hodiny nepůjdou pomaleji, ale budou měřit čas stejně jako jejich nehybný dvojnásobek a budou se rozcházet s druhými pohybujícími se hodinami. Ba ne! Kdyby tomu tak bylo, mohl by kosmonaut využít tohoto rozdílu v chodu obou svých hodin k určení rychlosti kosmické lodi, o čemž jsme předpokládali, že je to nemožné. *O mechanismu nových hodin nemusíme nic vědět*, jednoduše víme, že ať je příčina jakákoli, půjdou pomaleji podobně jako první hodiny.



Obr. 15.3 a) „Světelné hodiny“ v klidu v soustavě  $S'$   
 b) Stejně hodiny pohybující se v soustavě  $S$ ,  
 c) Znázornění úhlopříčné dráhy světelného paprsku v pohybujících se světelných „hodinách“

Jestliže *všechny* pohybující se hodiny jdou pomaleji, jestliže žádný způsob měření času nám nedá nic jiného, než zpomalený chod, budeme muset v jistém smyslu říci, že *sám čas* se v kosmické lodi zpomaluje. Všechny jevy – rychlost kosmonauta pulsu, rychlost jeho myšlení, doba, kterou potřebuje, aby si zapálil cigaretu, doba dospívání a stárnutí – všechny tyto děje musí být ve stejné míře zpomaleny, neboť jinak by mohl zjistit, že se pohybuje. Biologové a lékaři občas řkávají, že si nejsou zcela jisti, zda doba růstu rakovinového nádoru bude v kosmické lodi delší, ale z hlediska moderní fyziky je to téměř jisté; v opačném případě by se totiž rychlost růstu nádoru dala použít k určení pohybu kosmické lodi!

Velmi zajímavý příklad zpomalování času při pohybu poskytují  $\mu$  mezony (miony). Jsou to částice, které se spontánně rozpadají s průměrnou dobou života  $2,2 \cdot 10^{-6}$  s. Na Zemi se dostávají v kosmických paprscích a lze je i uměle vyrobit v laboratoři. Část z nich se rozpadá ještě ve vzduchu, ale zbytek se rozpadne, jen co narazí na nějakou překážku a zastaví se. Z krátké doby života mionu je jasné, že nemůže urazit dráhu mnohem delší než 600 metrů, dokonce ani při rychlosti světla. Ale ačkoli miony vznikají ve vrchních vrstvách atmosféry, asi ve výšce 10 kilometrů, přece je lze nalézt v kosmických paprscích v pozemských laboratořích. Jak je to možné? Odpověď je taková, že různé miony se pohybují různou rychlostí, některé z nich rychlostí blízkou rychlosti světla. Z jejich hlediska je doba jejich života jen 2 mikrosekundy, z našeho hlediska žijí podstatně déle – dostatečně dlouho k tomu, aby se dostaly na povrch Země. Koeficient nárůstu času jsme již uvedli a je roven  $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ . Průměrná doba života mionů s různými rychlostmi byla dost přesně změřena, přičemž výsledky jsou v dobrém souladu s tímto vztahem.

Příčinu rozpadu mezonů neznáme, neznáme mechanismus rozpadu, ale víme, že jejich chování je v souladu s principem relativity. V tom spočívá užitečnost principu relativity – dovoluje nám dělat předpovědi dokonce i o věcech, o kterých jinak mnoho nevíme. Například dříve, než bychom vůbec věděli něco o tom, co způsobuje rozpad mezonů, můžeme předpovědět, že pohybuje-li se rychlostí rovnou devíti desetinám rychlosti světla, pak zdánlivá doba jeho života je  $2,2 \cdot 10^{-6} / \sqrt{1 - 9^2/10^2}$  s. Naše předpověď je správná – to je to, co je na celé věci dobré.

## 15.5 LORENTZOVSKÁ KONTRAKCE

Vraťme se nyní k Lorentzově transformaci (15.3) a pokusme se lépe pochopit vztah mezi souřadnicovými soustavami  $(x, y, z, t)$  a  $(x', y', z', t')$ , které nazveme  $S$  a  $S'$  nebo systémem Petra a Pavla. Již jsme si všimli, že první rovnice se zakládá na Lorentzově návrhu kontrakce ve směru osy  $x$ . Jak lze dokázat, že kontrakce skutečně nastává? Nyní již chápeme, že podle principu relativity nemůže *příčné* rameno  $BC$  v Michelsonově-Morleyově experimentu změnit svou délku; a přece nulový výsledek tohoto experimentu vyžaduje rovnost *časů*. Aby měl experiment takovýto výsledek, podélné rameno  $BE$  musí být kratší o faktor  $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ . Jak se projeví tato kontrakce v měřeních Petra a Pavla? Předpokládejme, že Pavel se pohybuje v soustavě  $S'$  ve směru osy  $x$  a měří metrovým pravítkem souřadnici  $x'$  nějakého bodu. Pravítko přiloží  $x'$ -krát, proto si myslí, že měřená vzdálenost je  $x'$  metrů. Avšak z hlediska Petra, jenž je v soustavě  $S$ , se Pavlovo pravítko zkrátilo, takže skutečná vzdálenost je  $x' \sqrt{1 - u^2/c^2}$  metrů. Jestliže se soustava  $S'$  vzdálila od soustavy  $S$  o vzdálenost  $ut$ , pak pozorovatel v soustavě  $S$  řekne, že v jeho souřadnicích má měřený bod vzdálenost  $x = x' \sqrt{1 - u^2/c^2} + ut$ , neboli

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

což je vlastně první rovnice v Lorentzově transformaci.

## 15.6 SOUČASNOST

Analogicky, z důvodů v rozdílnosti časové škály, má čtvrtá rovnice Lorentzovy transformace ve jmenovateli stejný výraz. Nejzajímavější je v této rovnici člen  $ux/c^2$  v čitateli, neboť je nový a neočekávaný. Jaký má smysl? Podívejme-li se pozorně na celou věc, zjistíme, že události, které podle pozorování Pavla v soustavě  $S'$  nastanou současně na dvou různých místech, nenastanou současně podle Petrova pozorování v soustavě  $S$ . Jestliže k jedné události dojde v bodě  $x_1$  v okamžiku  $t_0$  a k druhé v bodě  $x_2$  a okamžiku  $t_0$  (tedy současně), zjistíme, že dva odpovídající časy  $t_1'$  a  $t_2'$  se liší o

$$t_1' - t_2' = \frac{u(x_1 - x_2)}{c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Tento jev se nazývá „narušení současnosti nesoumírných událostí“. Abychom si ho objasnili, uvažujme následující experiment.

Předpokládejme, že kosmonaut si umístil hodiny na obou koncích kosmické lodi (soustava  $S'$ ) a chce se přesvědčit o tom, zda jsou hodiny navzájem synchronizovány. Jak lze hodiny synchronizovat? Existuje k tomu mnoho způsobů. Jedním z nich, velmi nenáročným na výpočty, by bylo nejprve určit bod přesně uprostřed mezi hodinami. Pak z něho vyslat světelný signál, který se bude šířit oběma směry stejně rychle, takže obou hodin dosáhne současně. Tento současný příchod obou signálů lze použít k synchronizování hodin. Předpokládejme, že hodiny v soustavě  $S'$  budou sesynchronizovány touto metodou. Podívejme se, zda pozorovatel v systému  $S$  bude souhlasit, že oboje hodiny jsou synchronizovány. Kosmonaut v soustavě  $S'$  má právo věřit, že jsou synchronizovány, neboť neví, že se pohybuje. Ale pozorovatel v soustavě  $S$  tvrdí, že protože se loď pohybovala, přední hodiny ubíhaly před signálem, a světlo tedy muselo urazit větší dráhu, než je poloviční vzdálenost mezi hodinami a zadní hodiny se pohybovaly naproti signálu, takže tato vzdálenost byla kratší. Proto signál dosáhl zadních hodin dříve, ačkoli si kosmonaut myslel, že oba signály došly současně. Vidíme tedy, že jestliže si kosmonaut myslí, že události na dvou různých místech jsou současně, musí *stejným* hodnotám času  $t'$  v jeho souřadnicové soustavě odpovídat dvě *různé* hodnoty  $t$  v druhé souřadnicové soustavě!

## 15.7 ČTYŘVEKTORY

Podívejme se, co ještě můžeme objevit v Lorentzově transformaci. Je zajímavé, že transformace  $x$  a  $t$  má podobný tvar jako transformace  $x$  a  $y$  při rotaci souřadnic v kapitole 11. Tam jsme měli

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \\ y' &= y \cos \vartheta - x \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (15.8)$$

tj., nové  $x'$  je kombinací starého  $x$  a  $y$  a stejně tak nové  $y'$  je kombinací starého  $x$  a  $y$ . Podobně tomu je v Lorentzově transformaci, kde nové  $x'$  vzniká z kombinováním  $x$  a  $t$  a nové  $t'$  je

kombinací  $t$  a  $x$ . Takže Lorentzova transformace je analogická rotaci, pouze je to „rotace“ v *prostoru a čase*, což se zdá být podivné. Tuto analogii lze prověřit, vypočteme-li veličinu

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (15.9)$$

První tři členy na každé straně této rovnice dávají v trojrozměrné geometrii druhou mocninu vzdálenosti bodu od počátku (povrch koule), jenž se nemění (je invariantní) vzhledem k rotaci souřadnicových os. Podobně z rovnice (15.9) vyplývá, že existuje taková kombinace souřadnic, včetně času, která je invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. To znamená, že analogie s rotací je úplná a je takového druhu, že vektory, tj. veličiny sestávající ze „složek“, které se transformují podobně jako souřadnice a čas, jsou užitečné i ve spojení s relativitou.

Tak se dostáváme k rozšíření pojmu vektor, jenž měl doposud jen prostorové složky, a to tak, že mu přidáme časovou složku. To znamená, že předpokládáme existenci vektorů se čtyřmi složkami, z nichž tři jsou jako složky obyčejného vektoru, k nimž je připojena čtvrtá složka – analog času.

V následujících kapitolách provedeme hlubší analýzu této koncepce. Zjistíme, že aplikujeme-li myšlenky tohoto paragrafu na hybnost, příslušná transformace bude mít tři prostorové části – podobně složkám obyčejné hybnosti a čtvrtou – časovou složku, již je *energie*.

## 15.8 RELATIVISTICKÁ DYNAMIKA

Nyní jsme připraveni, abychom z obecnějšího hlediska přezkoumali, jaký tvar mají zákony mechaniky při Lorentzově transformaci. (Zatím jsme si vysvětlili, jak se mění délka a čas, ale ještě jsme si nevysvětlili, jak dostáváme modifikovaný vztah pro  $m$ , rovnici (15.1). Vysvětlíme si to v další kapitole.) Abychom viděli, jaké jsou důsledky Einsteinovy úpravy  $m$  v Newtonově mechanice, vezměme si nejdříve Newtonův zákon, že síla je rovna změně hybnosti

$$F = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Hybnost je rovna  $mv$  jako předtím, ale pro nové  $m$  platí

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (15.10)$$

To je Einsteinova úprava Newtonových zákonů. Při této úpravě, jsou-li síla a reakce stále rovny (což nemusí platit v každé chvíli, ale v dlouhodobém průměru to platí), bude se hybnost zachovávat podobně jako předtím, ale veličina, která se zachovává, není  $mv$  s konstantní hmotností, ale je to veličina ze vztahu (15.10) s modifikovanou hmotností. Jestliže ve vztahu pro hybnost provedeme tuto záměnu, bude se hybnost stále zachovávat.

Nyní si všimněme, jak se mění hybnost v závislosti na rychlosti. V Newtonově mechanice je úměrná rychlosti a podle (15.10) to platí i v relativistické mechanice v poměrně velkém rozsahu rychlostí, jež jsou malé ve srovnání s  $c$ , neboť výraz s odmocninou se liší od 1 jen velmi málo. Ale pro  $v$  téměř rovno  $c$  se výraz s odmocninou blíží k nule a hybnost proto narůstá do nekonečna.

Co se bude dít, jestliže po dlouhou dobu bude na těleso působit konstantní síla? V newtonovské mechanice nabírá těleso rychlost a jeho rychlost narůstá i po dosažení rychlosti světla. V relativistické mechanice to není možné. V teorii relativity nabývá těleso stále větší hybnosti, ne rychlosti. Jeho hybnost může spojitě narůstat, neboť narůstá jeho hmotnost. Po nějakém čase se pohyb tělesa prakticky nezrychluje, ale jeho hybnost se dále zvětšuje. Jestliže se pod vlivem síly změní rychlost nějakého tělesa velmi málo, z toho přirozeně vyplývá, že těleso má velkou setrvačnou hmotnost. Ale přesně to potvrzuje náš vztah pro výpočet relativistické hmotnosti (podívejte se na vztah 15.10) – tvrdí, že hmotnost je velmi velká pro  $v$  přibližně stejné jako  $c$ . Uveďme příklad. K vychýlení rychle letících elektronů v synchrotronu Kalifornského technického institutu potřebujeme 2000-krát silnější magnetické pole, než by se dalo očekávat na základě Newtonových zákonů. To znamená, že hmotnost elektronů v synchrotronu je 2000-krát větší než jejich normální hmotnost a je rovna hmotnosti protonu! Aby  $m$  bylo 2000-krát větší než  $m_0$ , musí být  $1 - v^2/c^2$  rovno  $1/4\,000\,000$ , což znamená, že  $v^2/c^2$  se liší od 1 jen o  $1/4\,000\,000$ , nebo že  $v$  se liší od  $c$  jen o  $1/8\,000\,000$ , a tak se rychlost elektronů blíží rychlosti světla. Kdyby elektrony a světlo vyletěly současně ze synchrotronu, co by doletělo dříve do Bridge Lab (vzdálenost asi 230 metrů)? Samozřejmě, že světlo, neboť světlo je vždy rychlejší.<sup>26)</sup> O kolik dříve? O jakou dobu dříve, to lze říci velmi obtížně, můžeme ale říci, o jakou vzdálenost předběhne světlo elektrony. Je to asi  $1/40$  mm, nebo  $1/4$  tloušťky papíru! Elektrony pohybující se takovou rychlostí mají obrovskou hmotnost, ale jejich rychlost nemůže převýšit rychlost světla.

Podívejme se nyní na další důsledky relativistické změny hmotnosti. Představme si pohyb molekul plynu v uzavřené nádobě. Zahříváním plynu se zvyšuje rychlost pohybu molekul, a tedy i jejich hmotnost, a plyn je těžší. Přibližný vzorec k vyjádření přírůstku hmotnosti můžeme pro případ malých rychlostí najít pomocí rozvoje

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

do mocninové řady použitím Newtonova binomického rozvoje. Dostáváme

$$m_0 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right).$$

Odtud je jasné vidět, že pro malá  $v$  řada velmi rychle konverguje, a další členy následující za druhým nebo třetím členem jsou zanedbatelně malé. Proto můžeme psát

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \left( \frac{1}{c^2} \right), \quad (15.11)$$

kde druhý člen na pravé straně vyjadřuje přírůstek hmotnosti způsobený rychlostmi molekul.

<sup>26)</sup> Závody s viditelným světlem by ve skutečnosti vyhrály elektrony díky indexu lomu vzduchu. Paprsky  $\gamma$  by si však vedly lépe.

Se stoupající teplotou úměrně narůstá  $v^2$ . Lze tedy říci, že přírůstek hmotnosti je úměrný přírůstku teploty. Protože  $1/2 m_0 v^2$  je ve starém Newtonově smyslu kinetická energie, můžeme říci, že přírůstek hmotnosti plynu je roven přírůstku kinetické energie dělenému  $c^2$ , nebo že  $\Delta m = \Delta(W_k) / c^2$ .

## 15.9. EKVIVALENCE HMOTNOSTI A ENERGIE

Uvedená skutečnost vedla Einsteina k nápadu, že jestliže hmotnost tělesa je rovna celkové energii dělené  $c^2$ , pak hmotnost tělesa lze vyjádřit jednodušším vztahem, než je (15.1). Když (15.11) vynásobíme  $c^2$ , máme

$$m c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (15.12)$$

Výraz na levé straně vyjadřuje celkovou energii tělesa a v posledním členu poznáváme obyčejnou kinetickou energii. Velký konstantní výraz  $m_0 c^2$  Einstein interpretoval jako část celkové energie tělesa, jako vnitřní energii známou pod názvem „klidová energie“.

Zjistíme, jaké jsou důsledky toho, když spolu s Einsteinem předpokládáme, že *energie tělesa je vždy rovna  $m c^2$* . Jako zajímavý důsledek odvodíme vztah (15.1) závislosti hmotnosti na rychlosti, který jsme doposud jen předpokládali. Nechť je těleso zpočátku v klidu. Jeho energie je  $m_0 c^2$ . Pak necháme na těleso působit sílu, jež ho uvede do pohybu a dodá mu kinetickou energii. Protože se zvýšila jeho energie, zvýšila se i jeho hmotnost – to vyplývá z původního předpokladu. Dokud působí síla, tak oboje, energie i hmotnost, stále rostou. V kapitole 13 jsme uvedli, že změna energie s časem je rovna součinu síly a rychlosti, tedy

$$\frac{dE}{dt} = F \cdot v. \quad (15.13)$$

Kromě toho  $F = d(mv)/dt$  (kapitola 9, vztah 9.1). Spojíme-li tyto vztahy s definicí  $E$ , máme z (15.13)

$$\frac{d(m c^2)}{dt} = v \cdot \frac{d(mv)}{dt}. \quad (15.14)$$

Tuto rovnici chceme řešit vzhledem k  $m$ . Nejprve vynásobíme obě strany  $2m$ , čímž se rovnice změní na

$$c^2 (2m) \frac{dm}{dt} = 2mv \cdot \frac{d(mv)}{dt}. \quad (15.15)$$

Nyní se potřebujeme zbavit derivací, čehož dosáhneme integrací obou stran. Veličina  $(2m) dm/dt$  je derivací  $m^2$  podle času a  $(2mv) \cdot d(mv)/dt$  je derivací  $(mv^2)$  podle času. Takže rovnice (15.15) je stejná jako rovnice

$$c^2 \frac{d(m^2)}{dt} = \frac{d(m^2 v^2)}{dt}. \quad (15.16)$$



Když jsou si derivace dvou veličin rovny, pak se tyto veličiny liší nanejvýš o konstantu. Označme ji  $C$ . Můžeme proto psát

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + C. \quad (15.17)$$

Konstantu  $C$  potřebujeme určit přesněji. Protože (15.17) platí pro všechny rychlosti, můžeme zvolit případ  $v=0$  a odpovídající hmotnost označit  $m_0$ . Dosazením těchto hodnot do (15.17) máme

$$m_0^2 c^2 = 0 + C.$$

Tuto hodnotu  $C$  můžeme nyní dosadit do rovnice (15.17), která bude mít tvar

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2. \quad (15.18)$$

Dělením  $c^2$  a úpravou dostaneme

$$m^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2,$$

odkud máme

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.19)$$

To je vztah (15.1) a vyjadřuje přesně to, co je třeba aby v rovnici (15.12) souhlasila hmotnost a energie.

Za obvyklých podmínek představují změny energie jen velmi malé změny hmotnosti. Je to dáno tím, že většinou nedokážeme uvolnit mnoho energie z daného materiálu, ale například u atomové bomby s explozivní silou ekvivalentní dvaceti kilotunám TNT lze ukázat, že při uvolnění energie jsou zplodiny po výbuchu o 1 gram lehčí, než počáteční hmotnost reagující látky, tj. uvolněná energie má podle vztahu  $\Delta E = \Delta (m c^2)$  hmotnost 1 gram. Teorie ekvivalence hmotnosti a energie byla nádherně ověřena experimenty, při nichž látka anihilovala – přeměnila se úplně na energii. Při nich elektron a jeho částice, pozitron, interagují v klidu, přičemž každý z nich má klidovou hmotnost  $m_0$ . Jakmile se přiblíží, obě částice zmizí a vzniknou dva gama paprsky, každý s energií  $m_0 c^2$ . Tento experiment nám umožňuje přímo určit energii spojenou s existencí klidové hmotnosti částice.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 15.1 ■ Použitím Lorentzovy transformace vyjádřete  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a  $t$  pomocí  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  a  $t'$ .
- 15.2 ■ Prozkoumejte práci „světelných hodin“, jež jsou orientovány rovnoběžně se směrem svého pohybu (viz obr. 15.3). Nezapomeňte vzít v úvahu Lorentzovu kontrakci délek.
- 15.3 ■ V horních vrstvách atmosféry vzniká mion, který se pohybuje rychlostí  $v = 0,99 c$ . Než se rozpadne, stačí uletět 5,00 km.  
a) Jaká je doba života mionu, kterou pozorujeme my, a čemu je rovna ve vztažné soustavě spojené s pohybujícím se mionem?  
b) Jak tlustá je vrstva atmosféry, kterou mion proletí, měřena v jeho vlastní vztažné soustavě?
- 15.4 ■ Výroba elektrické energie ve Spojených státech amerických v roce 1962 představovala  $2,15 \cdot 10^{12}$  kWh.  
a) Jaké hmotnosti odpovídá toto množství energie?  
b) Představte si, že bychom všichni tuto energii získávali v jaderné reakci přeměny deuteria na hélium (přitom zanedbáme část energie uvolňované v podobě neutrin). Kolik těžké vody bychom spotřebovávali každou sekundu?  
*Poznámka:* relativní atomová hmotnost hélia 4 je 4,0039 a deuteria 2,0147.
- 15.5 ■ Hustota výkonu slunečního záření dopadajícího na zemskou atmosféru je přibližně  $1,4 \text{ kW/m}^2$ . Jestliže všechna tato energie vzniká na Slunci při přeměně obyčejného vodíku v hélium, kolik tun vodíku za sekundu Slunce spaluje? Opět zanedbejte část energie odnášené neutrinou.
- 15.6 ■ Částice o klidové hmotnosti  $m_0$  se pohybuje podél osy  $x$  tak, že její poloha v každém okamžiku je dána vztahem  $x = \sqrt{a^2 + c^2 t^2} - b$ .  
Jaká síla přitom působí na částici?
- 15.7 ■ a) Vypočítejte zrychlení volného pádu v jednotkách  $1/y/r^2$  (světelný rok za rok na druhou).  
b) Kosmická loď se pohybuje s takovým zrychlením, že její posádka pociťuje stejnou konstantní tíhovou sílu jako na Zemi. Z hlediska pozorovatele nehybného vzhledem k bodu, v němž se loď nachází v okamžiku  $t = 0$ , trvá toto urychlování 5,00 roků. Jakou vzdálenost loď za tuto dobu uletí a jakou bude mít rychlost na konci tohoto úseku?

# Relativistická energie a hybnost

---

## 16.1 RELATIVITA A FILOZOFOVÉ

## 16.2 PARADOX DVOJČAT

## 16.3 TRANSFORMACE RYCHLOSTÍ

## 16.4 RELATIVISTICKÁ HMOTNOST

## 16.5 RELATIVISTICKÁ ENERGIE

### 16.1 RELATIVITA A FILOZOFOVÉ

V této kapitole budeme pokračovat v diskuzi o Einsteinově a Poincaréově principu relativity, jeho vlivech na názory fyziků a na jiná odvětví lidského myšlení.

Poincaré formuloval své poznatky následujícím způsobem: „Podle principu relativity musí být zákony fyzikálních jevů stejné pro pozorovatele, který se nepohybuje, i pro toho, který je vzhledem k němu v rovnoměrném pohybu, takže nemáme, a pravděpodobně ani nemůžeme mít, žádné prostředky k rozpoznání toho, zda se nacházíme v takovémto pohybu nebo ne.“

Když se objevila tato myšlenka, způsobila mezi filozofy velký rozruch, zejména mezi „filozofy z koktailových večírků“. Konstatovali: „Ó, to je velmi jednoduché, Einsteinova teorie říká, že všechno je relativní!“ Skutečně, až překvapivě mnoho filozofů, a nejen těch z koktailových večírků (ale abychom je neurazili, budeme hovořit pouze o „filozofech z koktailových večírků“), říká: „To, že vše je relativní, vyplývá z Einsteinovy teorie a má to mimořádný vliv na naše myšlení.“ Jako dodatek říká: „Ve fyzice bylo dokázáno, že jevy závisejí na naší vztažné soustavě.“ Často to slyšíme, ale těžko lze zjistit, co se tím myslí. Pravděpodobně se pod vztažnými soustavami, na něž se tak originálně odvolávají, myslí souřadnicové soustavy, jež používáme v teorii relativity. Proto skutečnost, že „věci závisejí na naší vztažné soustavě“, by měl mít údajně ten velký vliv na současné myšlení. Je možné se podívat proč, neboť koneckonců, že se věci různě jeví v závislosti na hledisku, které zaujmeme, je myšlenka tak jednoduchá, že k jejímu objevení určitě nebylo třeba podstoupit všechny těžkosti, abychom objevili fyzikální teorii relativity. Každý jistě ví, že to, co vidí, závisí na jeho vztažné soustavě, neboť přicházejícího chodce vidí nejprve zepředu, potom zezadu. Velká část filozofie, která údajně pochází z teorie relativity, neobsahuje nic hlubšího, než

to, že „osoba vypadá jinak zepředu a jinak zezadu“. Známy příběh o tom, jak více slepců popsalo slona, přitom každý jinak, je snad dalším příkladem teorie relativity z hlediska filozofie.

Ale v teorii relativity určitě musí být něco hlubšího než jednoduchá poznámka, že „člověk vypadá jinak zepředu a jinak zezadu“. Relativita je něco víc, neboť *pomocí ní můžeme učinit jisté předpovědi*. Bylo by velmi pozoruhodné, kdybychom pouze na základě tak jednoduchého poznatku mohli předpovídat přírodní jevy.

Existuje jiná škola filozofů, jímž se zdá být teorie relativity, podle níž nemůžeme určit naši absolutní rychlost, aniž bychom se dívali ven, nepohodlná. Říkají: „Je samozřejmé, že nemůžeme měřit naši rychlost, aniž bychom se podívali ven. Je jasné, že hovořit o rychlosti, aniž bychom se podívali ven, *nemá smysl*“; fyzici jsou dost hloupi, když si mysleli opak, ale nyní se jim ujasnilo, že je to tak. „Kdybychom si my, filozofové, byli uvědomili, jaké problémy mají fyzici, mohli jsme už dávno pomocí rozumové úvahy rozhodnout, že je nemožné říci, jak rychle se někdo pohybuje, aniž by se díval kolem sebe. Mohli jsme vykonat obrovský kus práce ve fyzice.“ Takovíto filozofy, bojující na periférii a pokoušející se nám něco říci, máme vždy kolem sebe, ale ti nikdy nepochopili složitost a hloubku problému.

Naše neschopnost určit absolutní pohyb vyplývá z *experimentu* a není výsledkem pouhého myšlení, což můžeme snadno ilustrovat. Za prvé, Newton věřil, že nelze určit rychlost pohybu, pohybujeme-li se rovnoměrně po přímce. Skutečně, Newton jako první zformuloval princip relativity a jeden citát v předcházející kapitole byl od něho. Proč nenadělali filozofové takový rozruch, že „vše je relativní“ (nebo nějak podobně) ještě v době Newtona? Protože až do doby vzniku Maxwellovy teorie nebyly známy takové fyzikální zákony, na jejichž základě by se zdálo, že lze určit rychlost pohybu bez pohledu ven. *Experimentálně* se brzy zjistilo, že to *není možné*.

Je z filozofického hlediska absolutně a definitivně nevyhnutelné, aby nebylo možné zjistit rychlost pohybu bez pohledu ven? Jedním z důsledků relativity byl vznik filozofie, podle které: „Definovat lze jen to, co lze měřit! Protože je zřejmé, že rychlost nelze měřit, aniž bychom neviděli vzhledem k čemu ji měříme, proto je jasné, že absolutní rychlost *nemá smysl*. Fyzici by si měli uvědomit, že mohou hovořit pouze o tom, co mohou měřit.“ Ale *to je celý problém*: Zda lze definovat absolutní rychlost, nebo ne, je to tatáž otázka, jako zda lze nebo nelze *experimentálně* zjistit pohyb bez pohledu ven. Jinak řečeno, zda něco lze nebo nelze měřit, není možné rozhodnout *a priori* pouhým myšlením; rozhodnout lze jen pomocí experimentu. Našli bychom málo filozofů, kteří by při vědomí, že rychlost světla je  $300\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , klidně prohlásili, že jestliže světlo letí vzhledem k autu rychlostí  $300\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  a auto má rychlost  $200\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , že toto světlo proletí kolem stojícího pozorovatele také rychlostí  $300\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . To je pro ně šokujícím faktem. Právě ti, pro něž je relativita tak samozřejmá, zjistí, když přijde na konkrétní fakt, že to není tak docela jasné.

Nakonec, existuje dokonce filozofie, která tvrdí, že bez pohledu ven nelze určit žádný pohyb. Ve fyzice to prostě neplatí. Pravda, *rovnoměrný přímočarý* pohyb nemůžeme zaregistrovat. Kdyby se celý pokoj *otáčel* určitě bychom to věděli, neboť by to každého hodilo na stěnu – uplatnily by se všechny odstředivé efekty. Otáčení Země kolem osy lze určit bez pohledu na hvězdy, například pomocí tzv. Foucaultova kyvadla. Proto není pravda, že „vše je relativní“ – je to jen pohyb *rovnoměrnou rychlostí*, který nelze zjistit bez pohledu ven. Rovnoměrné *otáčení* kolem pevné osy lze zjistit. Jestliže to řekneme nějakému filozofovi, je velmi zklamán, že věc skutečně nechápe, neboť jemu se zdá být nemožné určit rotaci kolem osy bez pohledu ven. Je-li někdo docela dobrý filozof, po nějaké době se může vrátit a říci: „Rozumím – něco jako absolutní otáčivý pohyb skutečně nemáme; ve skutečnosti se otáčíme *vzhledem ke hvězdám*. Takže odstředivá síla musí být způsobena vlivem hvězd na objekty.“

Podle toho, co víme, je to pravda. Dnes neumíme říci, jestli by byla odstředivá síla, kdyby nebyly kolem hvězdy a mlhoviny. Nejsme schopni provést experiment, při němž bychom odstranili všechny mlhoviny a pak změřili naši rotaci, proto o tom prostě neumíme nic říci. Musíme připustit, že filozof může mít pravdu. Přejde proto nadšený zpět a řekne: „Je to naprosto nutné, aby svět byl uspořádán tímto způsobem. *Absolutní* otáčení nemá smysl, otáčení je pouze relativní *vzhledem* k mlhovinám.“ My mu pak odpovíme: „Příteli, je tedy nebo není zřejmé, že rovnoměrná rychlost po přímce, relativní *vzhledem k mlhovinám* se neprojeví žádným účinkem uvnitř auta?“ Nyní, kdy pohyb není absolutní, ale je pohybem *relativním k mlhovinám* je toto základní otázka a zároveň taková, na niž lze odpovědět jen pomocí experimentu.

Jaké jsou tedy filozofické vlivy teorie relativity? Omezíme-li se na vlivy v tom smyslu, *jaké nové myšlenky a podněty* vyplývají pro fyziku z principu relativity, mohli bychom je popsat následujícícm způsobem: První objev je v podstatě to, že dokonce i ty ideje, které byly velmi dlouho uznávány, a které byly velmi přesně ověřeny, mohou být mylné. To, že jsou Newtonovy zákony chybné, byl po mnoha letech, kdy se zdály být přesné, samozřejmě šokující objev. Je jasné, že příčinou nejsou špatné experimenty. Byly však provedeny pouze v omezeném rozsahu rychlosti, v tak malém, že relativistické efekty se neprojeví. Nicméně, dnes zaujímáme mnohem pokornější stanovisko k našim fyzikálním zákonům – všechno *může* být špatné!

Za druhé, máme-li systém „podivných“ idejí jako třeba, že čas běží pomaleji pro toho, kdo se pohybuje, není podstatné, zda se nám *líbí*, nebo ne. Jediné, co je třeba respektovat, je zda se tyto ideje shodují s výsledkem experimentu. Stačí, jsou-li „podivné ideje“ potvrzeny *experimentem* a jediným důvodem proč jsme museli rozebrat chod hodin apod., bylo dokázat, že ačkoli je představa dilatace času divná, je *v souladu* s tím, jak měříme čas.

Konečně, je tu třetí podnět, který je trochu techničtější, ale jak se ukázalo, je mimořádně užitečný při studiu ostatních fyzikálních zákonů. Prikazuje *dívat se na symetrii těchto zákonů*, nebo přesněji, hledat způsoby, jak lze tyto zákony transformovat tak, aby zůstaly nezměněny. V teorii vektorů jsme si všimli, že základní pohybové zákony se nemění, otočíme-li souřadnicovou soustavu. Nyní jsme zjistili, že se nemění, když určitým způsobem pomocí Lorentzovy transformace změníme prostorové a časové proměnné. Takže myšlenka studovat strukturu operací, při níž se fyzikální zákony nemění, se ukázala být velmi prospěšnou.

## 16.2 PARADOX DVOJČAT

V pokračování naší diskuze o Lorentzově transformaci a relativistických efektech se budeme zabývat známým tzv. paradoxem Petra a Pavla. Předpokládáme, že jsou to dvojčata, tedy, že se narodili ve stejném okamžiku. Když vyrostli natolik, aby mohli řídit kosmickou loď, odletěl Pavel do vesmíru velkou rychlostí a Petr zůstal na Zemi. Uvědomuje si, že se Pavel pohybuje úžasnou rychlostí. Zdá se mu, že Pavlovy hodinky se opožďují, že i jeho srdce bije pomaleji, jeho myšlenky plynou pomaleji, vůbec vše z Petrova hlediska jde pomaleji. Pavel si samozřejmě ničeho neobvyklého nevíšimne, ale když se po nějaké době vrátí zpět, bude mladší než Petr, který zůstal na Zemi! Je to skutečně tak. Je to jeden z důsledků teorie relativity, který byl přesně dokázán. Tak, jako miony žijí déle, když se pohybují, bude i Pavel žít déle, bude-li se pohybovat. Je to „paradox“ jen pro lidi, kteří věří, že *každý pohyb* je relativní. Říkájí: „Ha, ha, ha, cožpak nemůžeme říci, že z Pavlova hlediska se pohyboval *Petr*, a proto by měl stárnout pomaleji? Podle symetrie je jediný možný výsledek ten, že když se setkají, musí být stejně staří.“ Ale k tomu, aby se setkali a porovnali, se Pavel musí na konci cesty zastavit a porovnat hodinky s Petrovými, nebo

jednodušeji, musí se vrátit zpět. Zpět se musí vrátit ten, kdo se pohyboval a on to ví, neboť se musí obrátit. Když se obracel, staly se v jeho kosmické lodi všelijaké neobyčejné věci – raketové motory se zapnuly, předměty byly přitlačeny na jednu stěnu a tak dále – zatímco Petr necítil nič.

Pravidlo lze zformulovat tak, že člověk, který pocítil zrychlení, který viděl věci padat na stěnu apod., je ten, který bude mladší; takový je rozdíl mezi nimi v „absolutním“ smyslu a je to určitě správně. Když jsme říkali, že pohybující se miony žijí déle, použili jsme jako příklad jejich přímočarý pohyb v atmosféře. Dnes už miony můžeme vyrobit i laboratorně a pomocí magnetu je můžeme donutit, aby se pohybovaly po zakřivené dráze, a dokonce i při tomto zrychleném pohybu žijí přesně o tolik déle, jako když se pohybují po přímce. I když nikdo zatím neprovedl experiment, aby prověřil paradox dvojčat, mohli bychom porovnat stacionární mion s mionem, který oběhl po kružnici a určitě by se zjistilo, že ten, který provedl celý oběh, žil déle. Ve skutečnosti nebyl v experimentu použit celý oběh, což ani není potřeba, neboť vše navzájem velmi dobře souhlasí. Možná, že to neuspokojí ty, kteří trvají na tom, aby každý jednotlivý fakt byl přímo ověřen, ale my s důvěrou předpovídáme výsledek experimentu, v němž Pavel letí po uzavřené kružnici.

### 16.3 TRANSFORMACE RYCHLOSTÍ

Hlavní rozdíl mezi Einsteinovou a Newtonovou relativitou je, že zákony transformace mezi souřadnicemi a časy vzájemně se pohybujících soustav jsou odlišné. Správný Lorentzův zákon transformace je

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (16.1)$$

Tyto rovnice odpovídají poměrně jednoduchému případu, kdy jde o vzájemný pohyb dvou pozorovatelů podél jejich společné osy  $x$ . Samozřejmě, že i jiné směry pohybu jsou možné, ale obecná Lorentzova transformace je dost komplikovaná, všechny čtyři veličiny jsou v ní navzájem pomíchané. My budeme používat tento zjednodušený tvar, neboť obsahuje všechny podstatné rysy relativity.

Probereme si další důsledky Lorentzovy transformace. Je zajímavé najít obrácená řešení rovnic. Máme soustavu čtyř lineárních rovnic se čtyřmi neznámými, pro které lze najít obrácené řešení, kde  $x, y, z, t$  jsou vyjádřeny pomocí  $x', y', z', t'$ . Tento výsledek je velmi zajímavý, neboť hovoří o tom, jak se jeví souřadnicová soustava „v klidu“ z hlediska systému, jenž se „pohybuje“. Protože pohyb je relativní a jde o rovnoměrný pohyb a pozorovatel, který se pohybuje, si může říci, že je vlastně v klidu, a pohybuje se ten druhý. Protože směr jeho pohybu je opačný, měl by dostat tutéž transformaci, jen s opačným znaménkem rychlosti. Přesně totéž bychom dostali matematickými úpravami, takže je to v pořádku. Kdyby výsledek nevyšel stejný, byl by to vážný důvod, jenž by nám nadělal starosti!

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (16.2)$$

Dále se budeme zabývat zajímavým problémem skládání rychlostí v relativitě. Vzpomeňme si, že to byla jedna z původních záhad, podle níž světlo letí rychlostí  $300\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  ve všech systémech, dokonce i když se nacházejí ve vzájemném pohybu. Je to zvláštní případ obecnějšího problému, který si dále ozřejmíme. Předpokládejme, že se v kosmické lodi pohybuje těleso rychlostí  $200\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  a že samotná loď má rychlost  $200\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Jak rychle se pohybuje těleso v kosmické lodi z hlediska vnějšího pozorovatele? Chtělo by se nám říci, že rychlostí  $400\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , což je větší rychlost než je rychlost světla. Rozčiluje nás to, neboť rychlost tělesa by neměla být větší než rychlost světla.

Obecný problém je následující: Předpokládejme, že těleso se uvnitř lodi pohybuje rychlostí  $v_x$  z hlediska vnitřního pozorovatele a že vzhledem k Zemi se samotná kosmická loď pohybuje rychlostí  $u$ . Chceme zjistit, jakou rychlostí  $v_x$  se tento předmět pohybuje z hlediska pozorovatele na Zemi. Máme stále speciální případ, když jde o pohyb ve směru osy  $x$ . Existuje i transformace rychlostí v  $y$ -ovém směru nebo pod libovolným úhlem. Tuto transformaci lze podle potřeby odvodit. Uvnitř kosmické lodi má těleso rychlost  $v_x$ , což znamená, že posunutí  $x'$  je rovno součinu rychlosti a času.

$$x' = v_x t'. \quad (16.3)$$

Nyní stačí vypočítat polohu a čas tělesa z hlediska vnějšího pozorovatele, když mezi  $x'$  a  $t'$  platí vztah (15.2). Takže do (16.2) prostě dosadíme (16.3) a dostaneme

$$x = \frac{v_x t' + u t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (16.4)$$

Zde však máme  $x$  vyjádřeno pomocí  $t'$ . Abychom dostali rychlost z hlediska vnějšího pozorovatele, musíme vydělit jeho vzdálenost jeho časem a nikoli časem druhého pozorovatele! Takže musíme vypočítat i čas, jak se jeví zvenku.

$$t = \frac{t' + \frac{u(v_x t')}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (16.5)$$

Nyní musíme určit podíl  $x$  a  $t$ , což je

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u + v_x}{1 + \frac{u v_x}{c^2}}, \quad (16.6)$$

přičemž se odmocniny vykrátily. To je zákon, který hledáme: výsledná rychlost, „součet“ obou rychlostí, není roven pouze algebraickému součtu obou rychlostí (víme, že ani nemůže být, neboť jinak bychom se dostali do obtíží), ale je „korigován“ faktorem  $(1 + uv/c^2)$ .

Nyní se podívejme, co se bude dít. Předpokládejme, že uvnitř kosmické lodi se pohybujete rychlostí rovnou poloviční rychlosti světla a sama kosmická loď se pohybuje poloviční rychlostí světla. Tedy  $u = 1/2 c$ ,  $v = 1/2 c$ , ale ve jmenovateli je  $uv$  rovno jedné čtvrtině  $c^2$ , takže

$$v = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4c}{5}.$$

Takže v relativitě „polovina“ a „polovina“ není „jedna celá“, ale pouze „4/5“. Malé rychlosti lze samozřejmě skládat známým způsobem, neboť pokud jsou rychlosti malé ve srovnání s rychlostí světla, můžeme na faktor  $(1 + uv/c^2)$  zapomenout, ale při velkých rychlostech jsou věci zcela jiné a docela zajímavé.

Vezměme si extrémní příklad. Jen tak pro zábavu předpokládejme, že člověk v kosmické lodi pozoruje samotné *světlo*. Tj.  $v = c$ , a přitom se loď pohybuje. Jak se to bude jevit pozorovateli na Zemi? Odpověď bude

$$v = \frac{u + c}{1 + \frac{uc}{c^2}} = c \frac{u + c}{u + c} = c.$$

Proto, pohybuje-li se něco rychlostí světla v kosmické lodi, bude se i z hlediska pozorovatele na Zemi jevit, že se pohybuje rychlostí světla. To je dobrý výsledek, vždyť Einsteinova teorie relativity byla vybudována v první řadě tak, aby dávala tento výsledek.

Přirozeně existují případy, kdy se těleso nepohybuje stejným směrem jako kosmická loď. Například: předmět se pohybuje směrem „nahoru“ rychlostí  $v_y$ , vzhledem k lodi, která se pohybuje „horizontálně“. Stejnými úpravami, zaměníme-li  $x'$  za  $y'$ , dostáváme

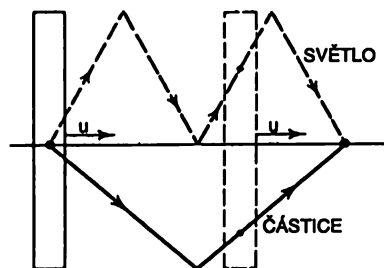
$$y = y' = v_y t',$$

takže když  $v_x = 0$ ,

$$v_y = \frac{y}{t} = v_y' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (16.7)$$

Proto boční rychlost tělesa už není  $v_y$ , ale  $v_y \sqrt{1 - u^2/c^2}$ . Tento výsledek jsme získali pomocí transformačních vztahů, ale stejný výsledek vyplývá i přímo z principu relativity, a to z následujících příčin (vždy je dobré se znovu přesvědčit, zda dokážeme najít příčinu). Již dříve jsme diskutovali o tom, jak pracují hodiny, když jsou v pohybu – z hlediska soustavy, jež je v klidu, se světlo pohybuje rychlostí  $c$  pod nějakým úhlem, zatímco v pohybující se soustavě se pohybuje stejnou rychlostí vertikálně. Zjistili jsme, že v soustavě, která je v klidu, je *vertikální složka* rychlosti menší než rychlost světla násobena faktorem  $\sqrt{1 - u^2/c^2}$  (rovnice 15.3). Nyní však předpokládejme, že ve stejných „hodinách“ necháme pohybovat nahoru a dolů nějakou hmotnou částici rychlostí rovnou  $1/n$  rychlosti světla (*obr. 16.1*). Pokud částice urazí dráhu tam a zpět, urazí světlo tuto dráhu přesně  $n$ -krát. Znamená to, že každé tiknutí „hodin s částicí“ se bude shodovat s  $n$ -tým tiknutím světelných hodin. *To musí platit i tehdy, kdy se celá soustava pohybuje*, neboť fyzikální jev koincidence bude koincidence v jakékoli soustavě. Protože však rychlost  $c$ , je menší než rychlost světla, musí být i rychlost částice  $v_y$  menší než odpovídající rychlost ve stejném poměru (s druhou odmocninou)! To je důvod, proč se odmocnina objevuje v každém výrazu pro vertikální rychlost.





Obr. 16.1 Trajektorie opisované světelným paprskem a částicí v pohybuujících se hodinách

## 16.4 RELATIVISTICKÁ HMOTNOST

V předcházející kapitole jsme se dověděli, že hmotnost tělesa se zvětšuje se zvyšováním jeho rychlosti. Neuvedli jsme si však žádný důkaz v tom smyslu, že bychom uvažovali podobné argumenty, jako ty o chodu hodin. *Můžeme* však ukázat, že v důsledku relativity a několika dalších rozumných předpokladů, se musí hmotnost měnit právě takto. (Musíme hovořit o „několika dalších předpokladech“, neboť chceme-li provést rozumnou dedukci, nemůžeme nic dokázat, nemáme-li nějaké zákony, o nichž již předpokládáme, že jsou správné.) Abychom se vyhnuli studiu zákonů transformace síly, budeme analyzovat *srážky*. V tomto případě nepotřebujeme vědět nic o zákonech síly, pouze budeme předpokládat zachování hybnosti a energie. Dále budeme předpokládat, že hybnost pohybující se částice je vektor, který má směr vždy ve směru rychlosti. Nebudeme však předpokládat, že hybnost je rovna násobku nějaké konstanty a rychlosti, jak předpokládal Newton, ale pouze to, že je nějakou *funkcí* rychlosti. Vektor hybnosti pak napíšeme jako součin určitého koeficientu a rychlosti

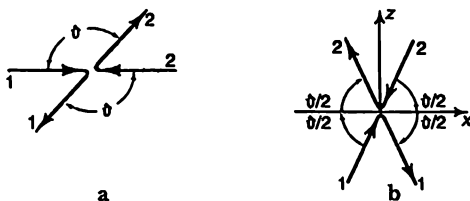
$$\vec{p} = m_v \vec{v}. \quad (16.8)$$

Ke koeficientu přičteme index  $v$ , abychom si uvědomili, že je funkcí rychlosti a domluvme se, že ho budeme nazývat „hmotností“. Je jasné, že při malých rychlostech to bude tatáž hmotnost, kterou jsme si zvykli měřit. Nyní se pomocí tvrzení, že podle principu relativity musí být fyzikální zákony stejně ve všech souřadnicových soustavách, pokusíme dokázat, že  $m_v$  musí mít tvar  $m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Předpokládejme, že máme dvě částice například dva protony, jež jsou naprosto stejné a jež se pohybují proti sobě přesně stejnou rychlostí. Jejich celková hybnost je rovna nule. Co se s nimi stane? Po srážce musí být směry jejich pohybu navzájem přesně opačné, neboť kdyby tomu tak nebylo, byla by celková hybnost nenulová a hybnost by se nezachovávala. Musí mít stejné i rychlosti, neboť jsou to přesně stejné částice. Musí mít stejnou rychlost jako před srážkou, neboť předpokládáme, že energie se při těchto srážkách zachovává. Takže diagram pružné (reversibilní) srážky bude vypadat jako na *obr. 16.2a*: všechny šipky mají stejnou velikost, všechny rychlosti jsou stejné. Budeme předpokládat, že při takových srážkách se může vyskytnout jakýkoli úhel  $\theta$  a rychlosti si při takové srážce můžeme vybrat libovolně. Dále si všimněme, že otočíme-li souřadnicové osy, může tatáž srážka vypadat jinak. Je výhodné otočit osy tak, že horizontála souměrně rozpůlí diagram (*obr. 16.2b*). Je to překreslená stejná srážka jako na *obr. 16.2a*, pouze souřadnicové osy jsou pootočené.

## RELATIVISTICKÁ HMOTNOST

Nyní docházíme k jádru věci: podívejme se na tuto srážku z hlediska někoho, kdo jede v autě, jehož rychlost je rovna horizontální složce rychlosti první z částic. Jak se mu bude srážka jevit? Bude se mu zdát, že částice 1 se pohybuje přímo nahoru (její horizontální složka zmizela) a pak znovu přímo dolů ze stejného důvodu, tj. bude se jevit jako srážka na obr. 16.3a. Avšak částice 2 se pohybovala jinak. Při pohledu z jedoucího auta se bude zdát, že prolétává velkou rychlostí pod menším úhlem (ale úhly před srážkou a po srážce jsou stejné). Horizontální složku rychlosti částice 2 označme jako  $u$  a vertikální složku rychlosti částice 1 označme jako  $w$ .

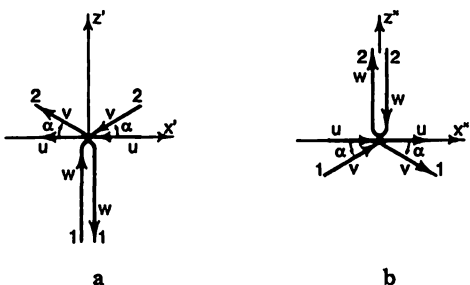


Obr. 16.2 Dva pohledy na pružnou srážku dvou stejných těles pohybujících se stejnou rychlostí v opačných směrech

Ptáme se, jaká je vertikální rychlost  $u \operatorname{tg} \alpha$ ? Kdybychom to věděli, mohli bychom pomocí zákona zachování hybnosti ve vertikálním směru zjistit hybnost. Je jasné, že horizontální složka hybnosti se zachovává – před srážkou i po ní, je stejná pro obě částice, přičemž pro částici 1 je nulová. Zákon zachování použijeme proto jen u svislé rychlosti  $u \operatorname{tg} \alpha$ . Tu však můžeme snadno určit, podíváme-li se na srážku jiným způsobem! Kdybychom srážku pozorovali z auta, které se pohybuje směrem doleva rychlostí  $u$ , viděli bychom tutéž srážku, pouze obrácenou naopak, jak je znázorněno na obr. 16.3b. Nyní je to částice 2, která letí dolů a nahoru rychlostí  $w$ , a částice 1 získala horizontální rychlost  $u$ . Teď už víme, jaká je rychlost  $u \operatorname{tg} \alpha$ . Je rovna  $w \sqrt{1 - u^2/c^2}$  (viz rovnici 16.7). Víme, že změna hybnosti částice, jež se pohybuje vertikálně, je

$$\Delta p = 2 m_w w$$

(proto 2-krát, že máme pohyb nahoru a zpět dolů). Šikmo letící částice má určitou rychlost  $v$ , jejíž složky jsou, jak jsme zjistili  $u$  a  $w \sqrt{1 - u^2/c^2}$  a jejíž hmotnost je  $m_p$ .



Obr. 16.3 Další dva pohledy na srážku z pohybujících se automobilů

Změna vertikální složky hybnosti této částice je tedy  $\Delta p' = 2 m_p w \sqrt{1 - u^2/c^2}$ , neboť podle zákona

(16.8), je složka hybnosti vždy rovna součinu hmotnosti (odpovídající velikosti rychlosti, jíž se částice pohybuje) a složky rychlosti v daném směru. Tedy, aby byla celková hybnost nulová, musí se vertikální složky hybnosti vypočítat a poměr hmotností částic pohybujících se rychlostí  $v$  a  $w$  musí být proto

$$\frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (16.9)$$

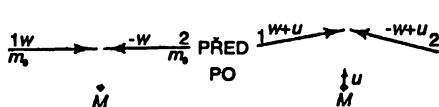
Vezměme si limitní případ, kdy  $w$  je infinitesimálně malé. Je-li  $w$  skutečně velmi malé, je jasné, že  $v$  a  $u$  jsou prakticky stejné. V tomto případě  $m_w \rightarrow m_0$  a  $m_v \rightarrow m_u$ . Konečný výsledek je

$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (16.10)$$

Bylo by zajímavé provést nyní zkoušku, zda (16.9) platí pro libovolné hodnoty  $w$ , za předpokladu, že (16.10) je správný vztah pro hmotnost. Všimněme si, že rychlost  $v$ , kterou potřebujeme ve vztahu (16.9) lze vypočítat z pravouhelného trojúhelníka

$$v^2 = u^2 + w^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right).$$

Zkouška vychází automaticky, ačkoli jsme (16.10) odvodili pouze v limitě pro malé  $w$ .



Obr. 16.4 Dva pohledy na nepružnou srážku dvou těles stejné hmotnosti

Souhlasme nyní s tím, že hybnost se zachovává a že hmotnost závisí na rychlosti podle vztahu (16.10). Podívejme se, co z toho dále vyplývá. Vezměme *nepružnou srážku*. Pro jednoduchost předpokládejme, že dvě stejná tělesa, jež se pohybují proti sobě rychlostí  $w$ , se srazí, při srážce se spojí a vytvoří nové *nehybné* těleso (obr. 16.4a). Hmotnost každého tělesa odpovídající rychlosti  $w$  je, jak víme,  $m_0/\sqrt{1 - w^2/c^2}$ . Z předpokladu zachování hybnosti a z principu relativity můžeme dokázat zajímavý fakt týkající se hmotnosti nově vytvořeného tělesa. Představme si nekonečně malou rychlost  $u$  pod pravým úhlem k  $w$  (mohli bychom vzít v úvahu i konečné hodnoty  $u$ , ale pomocí nekonečně malých hodnot celou věc snadněji pochopíme) a podívejme se na tuto srážku pohybující se ve výtahu rychlostí  $-u$ . Co vidíme, je znázorněno na obrázku 16.4b. Složené těleso má neznámou hmotnost  $M$ . Těleso 1, stejně tak i těleso 2, má svislou složku rychlosti  $u$  a horizontální složku rychlosti, jež je prakticky rovna  $w$ . Po srážce se těleso o hmotnosti  $M$  pohybuje nahoru rychlostí  $u$ , o níž předpokládáme, že je velmi malá ve srovnání s rychlostí světla i ve srovnání s  $w$ . Hybnost se musí zachovávat, proto určíme hybnosti před a po srážce ve svislém směru. Před srážkou máme  $p \sim 2m_w u$  a po srážce je hybnost zřejmě rovna  $p' \sim M_u u$ , ale

protože  $u$  je tak malé,  $M_u$  je v podstatě rovna  $M_0$ . Tyto hybnosti si musí být rovny vzhledem k zachování hybnosti, a proto

$$M_0 = 2 m_w. \quad (16.11)$$

*Hmotnost tělesa vzniklého srážkou dvou stejných těles musí být rovna dvojnásobku hmotností srážejících se těles. Snad si řeknete: „Ano, je to jasné, to je zachování hmotností.“ Jen se neukvapujte říkat „ano, je to jasné“, neboť hmotnosti těles se zvětšily nad hodnoty hmotností, které byly v klidu, a tak přispívají celkovému  $M$  nejen hmotností, kterou by měly v klidu, ale hmotností větší. Zdá se to být překvapující, ale aby při srážce dvou těles platil zákon zachování hybností, musí být hmotnost výsledného tělesa větší, než jsou klidové hmotnosti obou těles, ačkoli po srážce jsou tato tělesa v klidu!*

## 16.5 RELATIVISTICKÁ ENERGIE

V poslední kapitole jsme dokázali, že v důsledku závislosti hmotnosti na rychlosti a v důsledku Newtonových zákonů vychází, že změna kinetické energie způsobená celkovou prací sil je vždy

$$\Delta T = (m_u - m_0) c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \quad (16.12)$$

Šli jsme dokonce i dále a zjistili jsme, že celková energie je rovna „celkové hmotnosti krát  $c^2$ “ }  
Nyní budeme v diskusi pokračovat.

Předpokládejme, že uvnitř tělesa  $M$  můžeme stále vidět naše dvě tělesa o stejných hmotnostech, která se srazila. Například proton a neutron se „spojily“, ale stále se ještě pohybují uvnitř  $M$ . I když by se zpočátku zdálo, že hmotnost  $M$  bude rovna  $2 m_0$ , zjistili jsme, že je rovna  $2 m_w$  a ne  $2 m_0$ . Protože vstupní hmotnost je  $2 m_w$  a klidová hmotnost vnitřních částic je  $2 m_0$ , je *přebytečná* hmotnost složené částice rovna dodané kinetické energii. To znamená, že energie má setrvačnou hmotnost. V předcházející kapitole jsme hovořili o zahřívání plynu. Molekuly plynu se pohybují a pohybující se tělesa jsou těžší, proto dodáváme-li plynu energii, pohybují se jeho molekuly rychleji a plyn se stává těžším. Tento argument je ve skutečnosti úplně obecný a z naší diskuze o nepružném rozptýlu vyplývá, že dodatečná hmotnost existuje, ať už je, nebo není *kinetickou* energií. Jinými slovy, jestliže se dvě částice spojí a získají potenciální energii nebo jakýkoli jiný druh energie, jestliže se zpomalí tím, že se budou pohybovat do kopce, prací proti vnitřním silám nebo čímkoli jiným, platí stále, že hmotnost odpovídá celkové dodané energii. Vidíme, že odvozené zachování hmotnosti je ekvivalentní zachování energie, a proto v teorii relativity není místo pro čisté nepružné srážky, jak tomu bylo v Newtonově mechanice. Podle Newtonovy mechaniky se dvě částice mohou srazit, přičemž vznikne částice s hmotností  $2 m_0$ , která se vůbec neliší od částice, jež by vznikla, kdyby se původní částice spojily velmi pomalu. Samozřejmě, že zákona zachování energie víme, že uvnitř bude větší kinetická energie, ale podle Newtonových zákonů to neovlivňuje hmotnost. Nyní však víme, že to není možné – výsledná částice bude *těžší* díky kinetické energii srážky, a proto to bude *jiná* částice. Spojíme-li částice jemně, vznikne něco s hmotností  $2 m_0$  a spojíme-li je násilně, vznikne částice s větší hmotností. Tuto změnu hmotnosti umíme *zjistit*. A tak nutně proto v teorii relativity musí jít zachování energie ruku v ruce se zachováním hybnosti.

Z toho vyplývají zajímavé důsledky. Předpokládejme například, že máme těleso s naměřenou hmotností  $M$  a cosi způsobí, že se rozletí na dvě stejné části pohybující se rychlostí  $w$  tak, že kaž-

dá má hmotnost  $m_w$ . Dále předpokládejme, že tyto části budou mít v cestě dostatek materiálu, který je zpomalí, až se zastaví. Jejich hmotnost bude  $m_0$ . Jak velkou energii odevzdaly materiálu, když se zastavily? Podle výše dokázané teorie bude příspěvek každé části  $(m_w - m_0) c^2$ . Takové množství energie zůstává v materiálu ve formě tepla, potenciální energie atd. Protože  $2 m_w = M$ , uvolněná energie  $E = (M - 2 m_0) c^2$ . Podle této rovnice se například odhadlo, kolik energie by se uvolnilo při štěpení jader v atomové bombě. (Ačkoli úlomky štěpení nejsou přesně stejné, lze je za takové zhruba považovat.) Hmotnost atomů uranu byla známa (byla změřena dávno předtím) a také z hmotnosti atomů, na které se rozpadávají (jodu, xenonu atd.), byly známé. Hmotností nerozumíme hmotnost po dobu pohybu, ale hmotnosti atomů, když jsou v klidu. Obě veličiny  $M$  i  $m_0$  jsou tedy známé. Odečtením těchto dvou čísel lze vypočítat, jaká energie se uvolní, když se  $M$  rozštěpí na dvě „poloviny“. Toto byl důvod, proč ve všech novinách nazývali starého dobráka Einsteina „otcem“ atomové bomby. Ve skutečnosti tím bylo myšleno, že kdybychom mu oznámili, o jaký proces půjde, mohl by nám již před časem říci, jaká energie by se uvolnila. Energie, která by se mohla uvolnit při rozštěpení atomu uranu, byla určena asi šest měsíců před prvním přímým pokusem. Jakmile se tato energie uvolnila, kdosi ji změřil přímo (a i kdyby Einsteinův vzorec nebyl správný, i tak by ji byli každopádně změřili). A od okamžiku, kdy ji změřili, vzorec už dále nepotřebovali. Samozřejmě, tím nechceme snižovat Einsteinovy zásluhy, spíše chceme kritizovat noviny a populární líčení rozvoje fyziky a techniky. Problém, jak docílit toho, aby proces uvolnění energie probíhal efektivně a rychle, nemá se vzorcem nic společného.

Tento výsledek je stejně významný i pro chemii. Kdybychom například zvážili molekulu oxidu uhličitého a porovnali ji s hmotností uhlíku a kyslíku, mohli bychom zjistit, jaká energie by se uvolnila při vzniku oxidu uhličitého z kyslíku a uhlíku. Jediným problémem je, že rozdíly hmotností jsou tak malé, že po technické stránce je měření velmi obtížně uskutečnitelné.

Vraťme se ještě k otázce, zda bychom mohli přidávat  $m_0 c^2$  ke kinetické energii a od této chvíle říkat, že celková energie tělesa je  $mc^2$ ? Za prvé, kdybychom mohli uvnitř  $M$  stále vidět složky s klidovou hmotností  $m_0$ , mohli bychom říci, že hmotnost  $M$  složeného tělesa se zčásti skládá z klidové energie hmotnosti příslušných složek, zčásti z kinetické energie těchto složek a zčásti z jejich potenciální energie. V přírodě jsme však objevili různé částice, které podléhají právě takovým reakcím, o jakých jsme již hovořili a v nichž navzdory všemu studiu *nemůžeme vidět vnitřní části*. Například K mezon se rozpadá na dva piony podle zákona (16.11), ale říci, že se skládá ze dvou pionů, je nevhodné, neboť někdy se rozpadá na tři piony!

Proto máme *novou ideu*. Nemusíme vědět, jak vypadají částice zevnitř. Nemůžeme, a ani nepotřebujeme, zjišťovat uvnitř částice, jaká část energie je klidová energie částí, na něž se částice chystá rozpadnout. Není vhodné, a často ani možné, rozdělit celkovou energii tělesa  $mc^2$  na klidovou energii vnitřních částic, jejich kinetickou a potenciální energii. Místo toho prostě hovoříme o *celkové energii* částice. Přidáváním konstanty  $m_0 c^2$  ke všemu „posouváme odečet“ energie a říkáme, že celková energie částice je rovna součinu hmotnosti v pohybu a  $c^2$ . Je-li těleso v klidu, je energie rovna součinu klidové hmotnosti a  $c^2$ .

Nakonec si ukážeme, že rychlost  $v$ , hybnost  $p$  a celková energie  $E$  navzájem souvisejí *jednoduchým* způsobem. Skutečnost, že hmotnost při rychlosti  $v$  je rovna hmotnosti  $m_0$  dělené  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  se používá překvapivě zřídka. Místo toho lze snadno dokázat tyto vztahy

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \quad (16.13)$$

a

$$pc = E \frac{v}{c}, \quad (16.14)$$

jež jsou velmi užitečné a používají se častěji.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 16.1 ■ Zapište Lorentzovu transformaci v diferenciálním tvaru:  $dx = \gamma(dx' + \beta c dt')$ , atd. Tímto způsobem vypočítejte derivace  $dx/dt$  a  $dy/dt$  jako funkce  $v_x'$ ,  $u$  aj.
- 16.2 ■ Částice se pohybuje podél osy  $x$  rychlostí  $v_x$  a se zrychlením  $a_x$ . Vztažná soustava  $S'$  se pohybuje vzhledem k původní soustavě rychlostí  $v$ . Čemu jsou rovny rychlost a zrychlení částice v této soustavě?
- 16.3 ■ Ověřte vzorec  $m_w = m_v \sqrt{1 - (u^2/c^2)}$  získaný na přednáškách (rovnice 16.9).
- 16.4 ■ Částice o klidové hmotnosti  $m_0$  pohybující se rychlostí  $4c/5$  se nepružně srazí se stejně těžkou částicí, která je v klidu.  
a) Čemu je rovna rychlost vzniklé spojené částice?  
b) Jakou má spojená částice klidovou hmotnost?
- 16.5 ■ Urychlovač v Berkeley v Kalifornii známý jako Bevatron byl projektován tak, aby mohl dodávat protonům energii dostatečnou k vytváření párů proton – antiproton v reakci  $p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p})$ . Takzvaná prahová energie této reakce odpovídá případu, kdy všechny čtyři částice na pravé straně rovnice se pohybují společně jako jedna částice o klidové hmotnosti  $M = 4 m_p$ . Jestliže terčové protony byly před srážkou v klidu, čemu je rovna prahová kinetická energie bombardujících protonů?

# 17

# P

# rostočas

## 17.1 GEOMETRIE PROSTOROČASU

## 17.2 PROSTOROČASOVÉ INTERVALY

## 17.3 MINULOST, PŘÍTOMNOST A BUDOUCNOST

## 17.4 PODROBNOSTI O ČTYŘVEKTORECH

## 17.5 ALGEBRA ČTYŘVEKTORŮ

### 17.1 GEOMETRIE PROSTOROČASU

Teorie relativity nám ukazuje, že vzájemné vztahy mezi naměřenými polohami a okamžiky ve dvou různých souřadnicových soustavách nejsou takové, jaké bychom očekávali na základě našich intuitivních představ. Je velmi důležité, abychom důkladně porozuměli vztahům mezi prostorem a časem, jež vyplývají z Lorentzovy transformace, a proto se jim budeme v této kapitole věnovat podrobněji.

Lorentzova transformace mezi souřadnicemi a časem  $(x, y, z, t)$  naměřenými pozorovatelem v „klidu“ a jím odpovídajícími souřadnicemi a časem  $(x', y', z', t')$  naměřenými uvnitř kosmické lodě, která se „pohybuje“ rychlostí  $u$ , je

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - u \frac{x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (17.1)$$

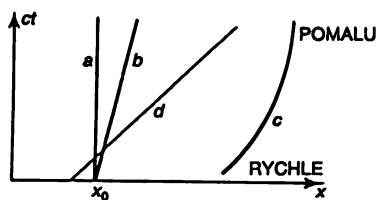
Porovnejme tyto rovnice s rovnicemi (11.5), které rovněž spojují měření ve dvou soustavách, přičemž jedna z nich je *pootočena* vzhledem k druhé:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \\ y' &= y \cos \vartheta - x \sin \vartheta, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (17.2)$$

V tomto konkrétním případě jsou souřadnicová osa  $x'$ , kterou používá Pavel a souřadnicová osa  $x$ , kterou používá Petr pootočeny o úhel  $\vartheta$ . Všimněme si, že v obou případech jsou čárkované veličiny kombinací nečárkovaných: nové  $x'$  je kombinací  $x$  a  $y$  a nové  $y'$  je kombinací  $x$  a  $y$ .

Zde je užitečná tato analogie: Díváme-li se na předmět, přirozeně u něho rozlišujeme to, co můžeme nazvat „zdánlivá šířka“ i hloubka. Tyto dvě charakteristiky, šířka a hloubka, nejsou *základními* vlastnostmi předmětu, neboť když od něj odstoupíme a podíváme se na něj z jiného úhlu, vidíme jinou šířku a jinou hloubku a mohli bychom si odvodit vzorce pro výpočet nových charakteristik pomocí starých a pomocí úhlu pootočení. Těmito vzorci jsou rovnice (17.2). Mohli bychom říci, že daná hloubka je určitou kombinací všech hloubek a všech šířek. Kdybychom se vůbec nemohli pohybovat, daný předmět bychom vždy viděli ze stejného místa a takové kombinování šířky a hloubky by nemělo smysl, neboť vždy bychom viděli tu „pravou“ šířku a „pravou“ hloubku a zdálo by se nám, že to jsou zcela různé veličiny, neboť jedna souvisí s úhlem, pod kterým vidíme předmět a druhá vyžaduje zaostření očí nebo dokonce intuici. Zdálo by se, že jsou to dvě velmi odlišné věci a nikdy by se vzájemně neměly. Jen proto, že můžeme předmět obejít, si uvědomujeme, že hloubka a šířka jsou vlastně dvě různé stránky téže věci.

*Nemůžeme se podobně podívat na Lorentzovu transformaci?* I tady se vyskytuje kombinace – polohy a času. Z rozdílu mezi prostorovým a časovým měřením můžeme určit novou souřadnici polohy. Jinak řečeno, v měřeních prostoru provedených jedním pozorovatelem je z hlediska jiného pozorovatele malá složka času. Naše analogie nám dovoluje vyslovit tuto myšlenku: „realita“ předmětu, na který se díváme, je o něco více (řečeno nepřesně a intuitivně) než jeho „šířka“ a „hloubka“, neboť ty *závisí* na tom, jak se na předmět díváme. Když přejdeme na nové místo, náš mozek ihned přepočítává hloubku a šířku. Ale když se budeme pohybovat velkou rychlostí, náš mozek nebude ihned přepočítávat souřadnice a čas. Nemáme praktickou zkušenost z pohybu rychlostmi blízkými rychlosti světla, abychom si uvědomili fakt, že čas a prostor mají stejnou podstatu. Je to něco podobného, jako kdybychom byli připoutáni na takové místo, ze kterého bychom viděli jen šířku něčeho a nebyli schopni pootočit hlavu na jednu nebo druhou stranu. Nyní chápeme, že kdybychom měli takovou možnost, mohli bychom vidět něco z času druhého člověka – viděli bychom takřkajíc trošku „dozadu“.



Obr. 17.1 Tři trajektorie částic v prostoročase  
 a) částice v klidu v bodě  $x = x_0$   
 b) částice, která vychází z bodu  $x = x_0$  a pohybuje se konstantní rychlostí  
 c) částice, která letí zpočátku rychle a pak se přibrzdí

Pokusme se tedy představit si předměty v novém světě. Prostor a čas jsou v něm vzájemně kombinovány ve stejném smyslu, jak se na reálné předměty našeho obyčejného prostorového světa můžeme dívat z různých směrů. Budeme si představovat, že předměty, nacházející se v prostoru, které existují po určitou dobu, tvoří v novém světě jakési „hrudky“, a když se pohybujeme různou rychlostí, vidíme takovou „hrudku“ z různých hledisek. Tento nový svět, tuto geometrickou entitu, v níž existují „hrudky“ nacházející se na nějakém místě v určitém čase, nazýváme *prostoročasem*. Daný bod  $(x, y, z, t)$  v prostoročase se nazývá *událostí*. Představme si například, že osu  $x$  znázorníme graficky horizontálně, osy  $y$  a  $z$  ve dvou dalších směrech navzájem kolmých a kolmých i k rovině papíru (1), a časovou osu vertikálně. Jak se na takovém grafu znázorní



pohyb částice? Jestliže se částice nepohybuje, má určitou souřadnici  $x$ , a jak plyne čas,  $x$  se nemění, takže její „trajektorie“ je čára rovnoběžná s osou  $t$  (obr. 17.1a). Na druhé straně, jestliže se částice vzdaluje, pak  $x$  s rostoucím časem roste (obr. 17.1b). Takže například pohyb částice, která se začne vzdalovat a pak se zpomaluje, by se znázornil podobně jako na obr. 17.1c. To znamená, že částice, která je stabilní a nerozpadá se, se v prostoročase zobrazí pomocí čáry. Částice, která se rozpadá, by se zobrazila pomocí vidlice, neboť se rozpadá na dvě další částice vycházející z jednoho bodu.

A co světlo? Světlo se šíří rychlostí  $c$ , což se zobrazí přímkou s určitým konstantním sklonem (obr. 17.1d).



Obr. 17.2 Dva pohledy na rozpadající se částici

Má-li tato představa vůbec smysl, očekávali bychom podle ní, že nastane-li s částicí nějaká událost, například když se částice najednou rozpadne v daném bodě prostoročasu  $(x, t)$  na dvě nové částice letící po nových trajektoriích, stačí nám vzít novou dvojici souřadnicových os, pootočit je a dostaneme nové  $t$  a nové  $x$  v novém systému, jak je to na obrázku 17.2a. Ale to není pravda, neboť transformace (17.1) není přesně stejnou transformací jako (17.2). Všimněme si například rozdílu v znaménkách a skutečnosti, že jedna transformace obsahuje  $\cos \vartheta$  a  $\sin \vartheta$ , zatímco druhá obsahuje algebraické výrazy. (Samozřejmě není vyloučeno, že by se algebraické výrazy nedaly vyjádřit pomocí funkce  $\cos$  a  $\sin$ , ale v tomto případě to skutečně nejde.) Přesto si však jsou obě transformace velmi podobné. Jak uvidíme, v důsledku rozdílnosti znamení není geometrie v prostoročase obyčejnou reálnou geometrií. Opravdu, ačkoli jsme to nezdůraznili, ukazuje se, že pohybující se pozorovatel musí používat osy, které svírají stejný úhel s prostoročasovou trajektorií světelného paprsku, přičemž své  $x'$  a  $t'$  určí pomocí paralelní projekce do os  $x'$  a  $t'$ , jak to je znázorněno na obr. 17.2b. Touto geometrií se nebudeme zabývat, neboť by nám příliš nepomohla; snadněji se pracuje přímo s rovnicemi.

## 17.2 PROSTOROČASOVÉ INTERVALY

Ačkoli geometrie prostoročasu není euklidovskou geometrií, přece je jí velmi podobná, až na jisté zvláštnosti. Je-li tato koncepce geometrie správná, měly by existovat takové funkce souřadnic a času, které nezávisí na souřadnicové soustavě. Například, vezmeme-li při obyčejných rotacích dva body (pro jednoduchost nechť je jeden v počátku a druhý někde jinde) a obě soustavy budou mít společný počátek, vzdálenost od počátku k druhému bodu bude v obou soustavách stejná. Je to vlastnost, jež nezávisí na tom, ve které soustavě měříme. Druhá mocnina vzdálenosti je  $x^2 + y^2 + z^2$ . Jak je to s prostoročasem? Není těžké dokázat, že i zde máme něco, co se nemění. Je to kombinace  $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ , která je stejná před transformací i po ní:

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (17.3)$$

Tato veličina je proto něco, co podobně jako vzdálenost, je v jistém smyslu „reálné“. Nazývá se *intervalem* mezi dvěma prostoročasovými body, z nichž jeden je v tomto případě v počátku. (Jde vlastně o druhou mocninu intervalu, podobně jako  $x^2 + y^2 + z^2$  je druhá mocnina vzdálenosti.) Jiný název používáme proto, že jde o jinou geometrii, ale zajímavé je jenom to, že některá znamení jsou opačná a je tam  $c$ .

Zbavme se d. Chceme-li mít báječný prostor, kde  $x$  a  $y$  je možné vzájemně zaměnit, je  $c$  absurdní. Vzniká tím zmatek, jako kdyby někdo nezkušený chtěl měřit šířku v zorných úhlech a hloubku podle napětí při zaostřování očních svalů a nakonec by vycházela třeba hloubka ve stopách a šířka v metrech.<sup>27)</sup> Transformace, jako je např. (17.2), vyjde pak nesmírně komplikovaně a celá jednoduchost a jasnost se ztratí z prosté technické příčiny, že stejná věc se měřila ve dvou různých jednotkách. V rovnicích (17.1) a (17.3) nám příroda říká, že čas a prostor jsou ekvivalentní – čas se stává prostorem. *Měly by se proto měřit ve stejných jednotkách.* Jaká vzdálenost je „sekunda“? Ze (17.3) to lze snadno zjistit. Je to  $3 \cdot 10^8$  metrů, tj. *vzdálenost, kterou urazí světlo za jednu sekundu.* Kdybychom všechny vzdálenosti a časy měřili ve stejných jednotkách – sekundách, jednotkou vzdálenosti by pak bylo  $3 \cdot 10^8$  metrů a rovnice by byly jednodušší. Jiný způsob, jak sjednotit jednotky je měřit čas v metrech. Co je to metr času? Metr času je doba, kterou potřebuje světlo, aby uletělo vzdálenost jeden metr, je tedy roven  $1/3 \cdot 10^{-8}$  s nebo 3,3 miliardtina sekundy! Jinými slovy, rádi bychom naše rovnice napsali v takové soustavě jednotek, kde  $c = 1$ . Měřili se čas a prostor v týchž jednotkách (jak to navrhuje), pak je zřejmé, že rovnice se velmi zjednoduší:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (17.4)$$

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (17.5)$$

Nemáme-li jistotu, nebo se obáváme, že tím, že zavedeme soustavu jednotek s  $c = 1$ , už nikdy nebudeme umět napsat naše rovnice správně, odpověď je zcela opačná. Rovnice se mnohem snadněji zapamatují, když v nich nevystupuje  $c$ , které lze vždy snadno dosadit zpět, podíváme-li se na fyzikální rozměr. Tak například víme, že ve výrazu  $\sqrt{1 - u^2}$  nemůžeme odečíst druhou mocninu rychlosti, která má svůj rozměr, od bezrozměrné jednotky. Proto  $u^2$  musíme vydělit  $c^2$ , abychom ho udělali bezrozměrným. Tak se to obecně dělá.

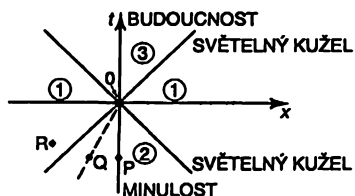
Velmi zajímavý je rozdíl mezi prostoročasem a obyčejným prostorem, mezi intervalem a vzdáleností. Podle vztahu (17.5), máme-li bod, jenž měl v dané souřadnicové soustavě nulovou časovou souřadnici a má jen prostorové souřadnice, pak druhá mocnina intervalu bude záporná a interval bude imaginární – druhá odmocnina ze záporného čísla. Intervaly mohou být buď reálné nebo imaginární. Na rozdíl od vzdálenosti, jejíž druhá mocnina je vždy kladná, může být druhá mocnina intervalu kladná i záporná. Je-li interval imaginární, říkáme, že mezi dvěma body je *prostoropodobný interval*, neboť se více podobá prostoru než času. Na druhé straně, jsou-li dva body na stejném místě v dané souřadnicové soustavě a liší se jen časem, pak druhá mocnina času je kladná, vzdálenosti jsou nulové a druhá mocnina intervalu je kladná – jde o *časopodobný interval*. Náš prostoročasový diagram bude tedy vypadat takto: jsou na něm dvě přímky pod

<sup>27)</sup> Jednou z příčin neúspěchu americké sondy k Marsu v r. 1999 bylo to, že část odborníků měřila ve stopách a část v metrech (Pozn. red.).

úhlem  $45^\circ$  (jež jsou ve čtyřrozměrném prostoru vlastně kužely) a všechny body na těchto přímkách mají nulový interval od počátku. Jak vidíme z rovnice (17.5), místa, kterými prochází světlo vyslané z daného bodu, jsou od toho bodu vzdálena o nulový interval. Shodou okolností jsme právě dokázali, že šíří-li se světlo rychlostí  $c$  v jedné soustavě, šíří se jí i v druhé soustavě, neboť je-li interval v obou soustavách stejný, tj. v obou nulový, pak výpověď, že rychlost šíření světla je invariantní, je stejná, jako když řekneme, že interval je roven nule.

### 17.3 MINULOST, PŘÍTOMNOST, BUDOUCNOST

Prostoročas v okolí daného prostoročasového bodu lze rozdělit na tři oblasti znázorněné na obr. 17.3. V jedné oblasti máme prostoropodobné intervaly a ve dvou oblastech časopodobné intervaly. Co se týká fyziky, pak tyto tři oblasti, na něž je rozdělen prostoročas v okolí daného bodu, k němu mají zajímavý fyzikální vztah. Fyzické těleso nebo signál se může dostat z bodu v oblasti 2 do události  $O$ , pohybuje-li se pomaleji než rychlostí světla.



Obr. 17.3 Část prostoročasu v okolí počátku

Proto události v této oblasti mohou ovlivnit bod  $O$ , mohou ho ovlivnit z minulosti. Událost v bodě  $P$  na záporné ose  $t$  je přesně v „minulosti“ vzhledem k  $O$ . Je to stejný prostorový bod, jen o něco dříve. Co se tam událo tehdy, ovlivňuje  $O$  nyní. (Bohužel, takový je už život.) Jiný předmět v bodě  $Q$  se může dostat do  $O$ , pohybuje-li se určitou rychlostí menší než  $c$ . Jestliže tento předmět byl v kosmické lodi a pohyboval se, může představovat minulost bodu  $O$ , tj. v jiné souřadnicové soustavě může jít časová osa body  $O$  a  $Q$ . Všechny body v oblasti 2 jsou v „minulosti“ vzhledem k  $O$  a cokoli se stane v této oblasti, může bod  $O$  ovlivnit. Proto se někdy oblast 2 nazývá *oblastí ovlivňující minulosti*. Je to oblast událostí, jež mohou nějak ovlivnit bod  $O$ .

Na druhé straně, oblast 3 je taková, že ji můžeme ovlivnit z bodu  $O$ . Vystřelením kulek rychlostí menší než  $c$ , můžeme zasáhnout předměty nacházející se v ní. Takže je to část světa, jehož budoucnost můžeme ovlivnit, a proto ji můžeme nazvat *oblastí ovlivnitelné budoucnosti*. Co zajímavého můžeme říci o zbývajících částech prostoročasu, tj. oblasti 1? To, že ji nemůžeme ovlivnit z bodu  $O$ , ani ona nemůže ovlivnit nás v bodě  $O$ , neboť nic se nemůže pohybovat rychleji než světlo. Samozřejmě, co se stane v  $R$ , může nás ovlivnit později. Kdyby Slunce explodovalo „právě teď“, trvalo by to osm minut, než bychom se to dozvěděli, a v žádném případě by nás to nemohlo ovlivnit dříve.

Co myslíme pojmem „právě teď“, je záhadná věc, kterou nemůžeme definovat ani ovlivnit. Ale později může ovlivnit nás, nebo bychom ji byli mohli ovlivnit, kdybychom byli provedli něco dostatečně dávno v minulosti. Když se díváme na hvězdu Alfa Centauri, vidíme, jak vypadala před čtyřmi roky, a můžeme se jen dohadovat, jak vypadá „teď“. „Teď“ – znamená ve stejném okamžiku v naší speciální souřadnicové soustavě. Alfa Centauri můžeme vidět jenom ve světle, jež k nám přichází z minulosti před čtyřmi lety, ale nevíme, co se tam děje „teď“. Trvá to čtyři roky, než to,

co se tam děje teď, nás ovlivní. Alfa Centauri „teď“ je čistě námi vymyšlená idea, pojem. Není to něco, co by se dalo momentálně fyzikálně definovat, neboť abychom to mohli pozorovat, musíme počkat. Navíc „teď“ závisí na souřadnicové soustavě. Kdyby se například Alfa Centauri pohybovala, pozorovatel, který by byl na ní, by s námi nesouhlasil, neboť jeho souřadnice by s našimi svíraly nějaký úhel a jeho „teď“ by byl *jiný* okamžik. O tom, že současnost není nic jednoznačného, jsme již hovořili.

Existují věštci nebo lidé, kteří tvrdí, že mohou znát budoucnost. Mnoho pěkných historek koluje o tom, jak někdo najednou zjistil, že zná budoucnost. S tím souvisí množství všelijakých paradoxů. Kdybychom věděli, co se má stát, pak bychom se tomu určitě mohli vyhnout tím, že bychom udělali správnou věc v pravý čas a podobně. Ale ve skutečnosti neexistuje ani žádný věštec, který by znal *přítomnost!* Nikdo nám nemůže říci, co se právě teď děje v nějaké dostatečně velké vzdálenosti, neboť to není pozorovatelné. Můžeme se ptát, a necháme to na studentech, aby se pokusili odpovědět: Vznikl by nějaký paradox, kdybychom najednou mohli vědět, co se děje v prostoročasových intervalech oblasti I?

## 17.4 VÍCE O ČTYŘVEKTORECH

Vraťme se k naší úvaze o analogii mezi Lorentzovou transformací a rotacemi prostorových os. Při konstrukci *vektorů*, směřovaných úseček, jsme poznali užitečnost hledání veličin, jež mají stejné transformační vlastnosti jako souřadnice. V případě obyčejných rotací existuje mnoho veličin, jež se transformují jako  $x$ ,  $y$ , a  $z$ . Například rychlost má tři složky  $x$ ,  $y$  a  $z$ ; když ji popisujeme v nové souřadnicové soustavě, ani jedna ze složek není stejná, ale všechny se přetransformují na nové hodnoty. Ale tak, či onak, sama rychlost je jaksi reálnější než její jednotlivé složky a znázorňujeme ji směřovanou úsečkou.

Proto se ptáme: Existují také veličiny, které se v pohybující se a klidové soustavě transformují stejně jako  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a  $t$ ? Na základě naší zkušenosti s vektory víme, že tři z těchto veličin, podobně jako  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , budou tvořit složky obyčejného prostorového vektoru. Čtvrtá veličina se však bude při prostorových rotacích jevit jako obyčejný skalár, protože se nemění, dokud nepřejdeme k pohybující se soustavě. Lze tedy k našim známým „trojvektorům“ přiřadit čtvrtou veličinu (nazvali bychom ji „časovou složkou“) takovým způsobem, že by čtyři veličiny „rotovaly“ tak jako poloha a čas v prostoročase? Nyní si ukažme, že skutečně aspoň jedna takováto čtveřice existuje (ve skutečnosti jich je mnoho): *tři složky hybnosti a energie jako časová složka se spolu transformují* tak, že vytvářejí to, čemu říkáme „čtyřvektor“. Protože je dost nepohodlné všude psát  $c$ , použijeme na jednotky energie, hmotnosti a hybnosti stejný trik, jaký jsme použili v rovnici (17.4). Energie a hmotnost se například liší jen faktorem  $c^2$ , což je pouze otázka jednotek, takže můžeme říci, že energie je hmotnost. Místo toho, abychom psali  $c^2$ , položíme  $\bar{E} = m$ , a pak, kdyby byly nějaké potřeby, můžeme do výsledné rovnice dodat potřebné množství  $c$ , abychom získali správné jednotky, ale v průběžných výpočtech je vynecháme.

Tak dostaneme rovnice pro energii a hybnost:

$$E = m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (17.6)$$

V těchto jednotkách máme i

$$E^2 - p^2 = m_0^2 \quad (17.7)$$

Například, když měříme energii v elektronvoltech, jaká bude hmotnost jednoho elektronvoltu? Je to hmotnost, jejíž klidová energie je 1 elektronvolt, tj.  $m_0 c^2$  je jeden elektronvolt. Například klidová hmotnost elektronu je  $0,511 \cdot 10^6$  eV.

Jak bude vypadat energie a hybnost v nové souřadnicové soustavě? Abychom to zjistili, musíme provést transformaci rovnice (17.6), což je možné, neboť víme, jak se transformuje rychlost. Předpokládejme, že těleso má rychlost  $v$ , ale my se na něj díváme z kosmické lodě, jež se sama pohybuje rychlostí  $u$  a v této soustavě označujeme veličiny jako čárkované. Abychom věc zjednodušili, uvažujme případ, kdy rychlost  $v$  má směr  $u$  (později můžeme řešit obecnější případ). Jaké je  $v'$ , tj. rychlost z hlediska kosmické lodě? Je to složená rychlost, „rozdíl“ mezi  $v$  a  $u$ . Podle zákona, který jsme odvodili dříve,

$$v' = \frac{v - u}{1 - uv}. \quad (17.8)$$

Dále vypočteme novou energii  $E'$ , tj. energii, jak ji určí pozorovatel v kosmické lodi! Použijte stejnou klidovou hmotnost, což je samozřejmé, ale pro rychlost použijte  $v'$ . Potřebujeme umocnit  $v'$  na druhou, odečíst ji od jedné, odmocnit a vzít převrácenou hodnotu

$$v'^2 = \frac{v^2 - 2uv + u^2}{1 - 2uv + u^2v^2},$$

$$1 - v'^2 = \frac{1 - 2uv + u^2v^2 - v^2 + 2uv - u^2}{1 - 2uv + u^2v^2} = \frac{1 - v^2 - u^2 + u^2v^2}{1 - 2uv + u^2v^2} = \frac{(1 - v^2)(1 - u^2)}{(1 - uv)^2}.$$

Tedy

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v'^2}} = \frac{1 - uv}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - u^2}}. \quad (17.9)$$

Energie  $E'$  je prostě  $m_0$ -krát tento výraz. energii však chceme vyjádřit pomocí nečárkované energie a hybnosti, a proto píšeme

$$E' = \frac{m_0 - m_0 uv}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - u^2}} = \frac{\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{m_0 uv}{\sqrt{1 - v^2}}}{\sqrt{1 - u^2}},$$

neboli

$$E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (17.10)$$

a vidíme, že má přesně stejný tvar jako

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Dále musíme najít novou hybnost  $\hat{p}'_x$ . Je to prostě energie  $E'$  krát  $v'$ , což lze také snadno vyjádřit pomocí  $E$  a  $\hat{p}$

$$\hat{p}'_x = E' v' = \frac{m_0 (1 - uv)}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{v - u}{\sqrt{1 - uv}} = \frac{m_0 v - m_0 u}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{1 - u^2}}.$$

Tedy

$$\hat{p}'_x = \frac{\hat{p}_x - uE}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (17.11)$$

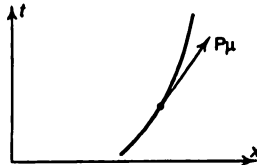
a vidíme, že má přesně stejný tvar jako

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Takže transformace pro novou energii a hybnost pomocí staré energie a hybnosti jsou přesně stejné jako transformace pro  $t'$  pomocí  $t$  a  $x'$  pomocí  $x$  a  $t$ ; jedině, co je třeba provést, je že v (17.4) za  $t$  vždy dosadíme  $E$  a za  $x$  dosadíme  $\hat{p}_x$ . Rovnice (17.4) budou pak stejné jako rovnice (17.10) a (17.11). Je-li vše správně, pak tyto rovnice implikují dodatečná pravidla, že  $\hat{p}'_y = \hat{p}_y$  a  $\hat{p}'_z = \hat{p}_z$ . Důkaz by si vyžádal, abychom se vrátili zpět a studovali pohyb nahoru a dolů. Takový pohyb jsme studovali v předcházející kapitole. Provedli jsme analýzu komplikované srážky a všimli jsme si, že příčná složka hybnosti se ve skutečnosti nemění, podíváme-li se na ni z pohyblivé soustavy; takže jsme si již ověřili, že  $\hat{p}'_y = \hat{p}_y$  a  $\hat{p}'_z = \hat{p}_z$ . Úplná transformace je pak

$$\hat{p}'_x = \frac{\hat{p}_x - uE}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad \hat{p}'_y = \hat{p}_y, \quad \hat{p}'_z = \hat{p}_z, \quad E' = \frac{E - u\hat{p}_x}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (17.12)$$

V těchto transformacích jsme tedy objevili čtyři veličiny, které se transformují jako  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a  $t$ , a které nazýváme *čtyřvektor hybnosti* (*čtyřhybnost*). Tento čtyřvektor si můžeme představit na prostor-časovém diagramu pohybující se částice jako „šipku“ tvořící tečnu k trajektorii (obr. 17.4). Časová složka této šipky je rovna energii a její prostorové složky představují trojvektor hybnosti; tato šipka má „reálnější charakter“ než sama energie nebo hybnost, neboť ty závisí na tom, jak se na diagram díváme.



Obr. 17.4 Čtyřvektor hybnosti částice

## 17.5 ČTYŘVEKTOROVÁ ALGEBRA

Zápis čtyřvektorů je jiný než zápis vektorů. Kdybychom hovořili o obyčejném trojvektoru hybnosti, napsali bychom ho jako  $\hat{p}$ . Kdybychom chtěli být přesnější, mohli bychom říci, že má

tři složky  $p_x$ ,  $p_y$ , a  $p_z$ , nebo bychom mohli složky označit jako  $p_i$ , kde  $i$  může být  $x$ ,  $y$  nebo  $z$ , tj. že  $i$  určuje, o který ze tří směrů  $x$ ,  $y$  a  $z$  jde. Označení, které používáme pro čtyřvektory, je analogické: čtyřvektor píšeme jako  $p_\mu$ , kde  $\mu$  značí čtyři možné směry  $t$ ,  $x$ ,  $y$  nebo  $z$ .

Samozřejmě bychom mohli použít libovolného zápisu. Nesmějte se různým zápisům, ale vymýšlejte je, neboť jsou účinné. Matematika je opravdu do značné míry hledání lepších zápisů. Celá myšlenka čtyřvektorů je vlastně vylepšení zápisu, takže transformace si lze snadno zapamatovat.  $A_\mu$  značí obecně čtyřvektor, ale pro zvláštní případ čtyřvektoru hybnosti  $p_i$  je energie,  $p_x$  je hybnost ve směru osy  $x$ ,  $p_y$  ve směru osy  $y$  a  $p_z$  ve směru osy  $z$ . Při sčítání čtyřvektorů sčítáme odpovídající si složky.

Platí-li pro čtyřvektory nějaká rovnice, pak platí pro každou složku. Například, má-li při srážkách částic platit zákon zachování trojvektoru hybnosti, tj. součet hybností velkého množství interagujících částic má být konstantní, musí to znamenat, že součet všech hybností ve směru osy  $x$ , ve směru osy  $y$  a ve směru osy  $z$  pro všechny částice musí být konstantní. Takovýto zákon by byl sám v teorii relativity nemožný, neboť není úplný. Je to, jako kdybychom hovořili jen o dvou složkách trojvektoru. Není úplný, neboť otočíme-li osy, zkombinujeme různé složky, a proto v našem zákonu musí být zahrnuty všechny tři složky. V relativitě musíme doplnit zákon zachování hybnosti i o čtvrtou – časovou složku. Je *absolutně nevyhnutelné*, aby doplnila ostatní tři složky, neboť jinak neplatí relativistická invariantnost. Zachování energie je čtvrtou rovnicí, jež doprovází zachování hybnosti, aby platil čtyřvektorový vztah v geometrii prostoru a času. V čtyřrozměrném zápise je proto zákon zachování energie a hybnosti

$$\sum_{\text{vstupující částice}} p_\mu = \sum_{\text{vystupující částice}} p_\mu \quad (17.13)$$

nebo v trochu odlišném zápise

$$\sum_i p_{i\mu} = \sum_j p_{j\mu}, \quad (17.14)$$

kde  $i = 1, 2 \dots$  se vztahuje k částicím vstupujícím do srážky,  $j = 1, 2 \dots$  se vztahuje k částicím vystupujícím ze srážky a  $\mu = x, y, z$  nebo  $t$ . Řeknete: „V kterých osách?“ Na tom nezáleží. Zákon platí pro každou složku v kterýchkoli osách.

Ve vektorové analýze jsme zkoumali jinou věc – skalární součin dvou vektorů. Nyní si vezměme odpovídající součin v prostoročase. Při obyčejných rotacích jsme zjistili, že existuje veličina, která se nemění:  $x^2 + y^2 + z^2$ . Ve čtyřrozměrném případě je odpovídající veličinou  $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  (17.3). Jak to můžeme zapsat? Jeden způsob by byl nějaký čtyřrozměrný zápis třeba jako  $A_\mu \circ A_\mu$ . Jedno z označení, jež se skutečně používá, je

$$\sum_\mu A_\mu A_\mu = A_t^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2. \quad (17.15)$$

Čárka na  $\Sigma$  znamená, že první člen, „časový“, je kladný, ale další tři členy mají záporné znaménko. Tato veličina se nemění v žádné souřadnicové soustavě a můžeme ji nazvat druhou mocninou délky čtyřvektoru. Například, jaká je druhá mocnina délky čtyřvektoru hybnosti nějaké částice? Bude rovna  $p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$  nebo jinak zapsáno  $E^2 - p^2$ , neboť víme, že  $p_t$  je  $E$ . Co je  $E^2 - p^2$ ? Musí to být něco, co se nemění v žádné souřadnicové soustavě. Konkrétně, musí to být stejná veličina i v souřadnicové soustavě, jež se pohybuje společně s částicí, v níž je částice v klidu.

Je-li částice v klidu, pak nemá hybnost. Proto v této souřadnicové soustavě to bude čistě její energie, která je stejná jako její klidová hmotnost. Vidíme, že druhá mocnina délky tohoto vektoru, čtyřvektoru hybnosti, je rovna  $m_0^2$ .

Od druhé mocniny vektoru můžeme přejít ke skalárnímu součinu: jestliže  $a_\mu$  je jeden čtyřvektor a  $b_\mu$  druhý čtyřvektor, pak skalární součin je

$$\sum_{\mu} a_{\mu} b_{\mu} = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \quad (17.16)$$

Je stejný ve všech souřadnicových soustavách.

Nakonec se zmůžeme o určitých objektech, jejichž klidová hmotnost je nulová. Například foton světla. Foton je jako částice, neboť má energii a hybnost. Energie fotonu je rovna Planckově konstantě vynásobené frekvencí fotonu:  $E = h\nu$ . Foton má i hybnost, jež je rovna  $h$  dělenému vlnovou délkou:  $p = h/\lambda$ . (Platí to i pro jakoukoli jinou částici.) Ale pro foton platí určitý vztah mezi frekvencí a vlnovou délkou:  $\nu = c/\lambda$ . Počet vln za sekundu vynásobený vlnovou délkou je vzdálenost, kterou světlo urazí za sekundu, což je samozřejmě rovno  $c$ . Takže hned vidíme, že energie fotonu musí být rovna hybnosti násobené  $c$ , nebo jestliže  $c = 1$ , energie a hybnost jsou si rovny. To znamená, že klidová hmotnost je nulová. Podívejme se na věc znovu, je to velmi zajímavé. Co se stane, když se zastaví částice s nulovou klidovou hmotností? *Nikdy se nezastaví!* vždy se pohybuje rychlostí  $c$ . Běžný vztah pro energii je  $m_0/\sqrt{1 - v^2}$ . Můžeme říci, že  $m_0 = 0$  a  $v = 1$ , takže energie je rovna 0? *Nemůžeme říci, že je nulová*; foton skutečně může mít (a má) energii, ačkoli nemá klidovou hmotnost, ale má ji jen tím, že neustále letí rychlostí světla!

Víme, že hybnost částice je rovna celkové energii vynásobené rychlostí. Jestliže,  $c = 1$ ,  $p = vE$  nebo v obyčejných jednotkách  $p = vE/c^2$ . Pro každou částici, která letí rychlostí světla, je  $p = E$ , je-li  $c = 1$ . Vztahy pro energii fotonu z hlediska pohybující se soustavy jsou samozřejmě dány rovnicí (17.12), ale za hybnost musíme dosadit energii vynásobenou  $c$  (nebo 1 v případě, že  $c = 1$ ). Různé energie po transformaci znamenají, že jde o různé frekvence. Je to jev, jenž se nazývá Dopplerův, a lze ho snadno vypočítat ze (17.12) použitím  $E = p$  a  $E = h\nu$ .

Jak řekl Minkowski: „Prostor sám o sobě a čas sám o sobě se utopí ve stínech – zůstane jen jistý druh jejich jednoty.“



---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 17.1 ■ Klidová hmotnost protonu je  $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$ . V kosmickém záření se setkáváme s protony o energii řádově  $10^{10} \text{ GeV}$  ( $1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV}$ ). Jejich výskyt lze zjistit pomocí různých nepřímých metod. Nechť takový proton o vysoké energii prolétá napříč celou Galaxií. Průměr Galaxie je  $10^5$  světelných roků. Kolik času potřebuje proton na tuto cestu „ze svého hlediska“?
- 17.2 ■ Ukažte, že klidová energie elektronu  $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ .
- 17.3 ■ Klidový pion ( $m_\pi = 273 m_e$ ) se rozpadá na mion ( $m_\mu = 207 m_e$ ) a neutrino ( $m_\nu = 0$ ). Vyjádřete v MeV kinetickou energii a hybnost mionu a neutrina.
- 17.4 ■ Zkoumáme pohyb nabitě částice v magnetickém poli. Vyjádříme-li její náboj  $q = Ze$  v jednotkách elementárního náboje, hybnost  $p$  v MeV a magnetickou indukci  $B$  v T, najděte vztah mezi veličinami  $p$ ,  $B$  a  $R$ .
- 17.5 ■ Máme zkonstruovat cyklotron, jenž by dodával protonům kinetickou energii 150 MeV. Magnetická indukce v něm je rovna 1,00 T.
- Čemu bude roven poloměr magnetu?
  - Jakou frekvenci signálu musíme podávat na urychlující elektrody?
  - O kolik procent musíme tuto frekvenci měnit během urychlovacího cyklu jedné částice v důsledku relativistických efektů?

# Dvojrozměrná rotace

## 18.1 HMOTNÝ STŘED

## 18.2 ROTACE TUHÉHO TĚLESA

## 18.3 MOMENT HYBNOSTI

## 18.4 ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBNOSTI

### 18.1 HMOTNÝ STŘED

V předcházejících kapitolách jsme studovali mechaniku hmotných bodů, malých částic, jejichž vnitřní struktura nás nezajímá. V několika dalších kapitolách budeme aplikovat Newtonovy zákony na komplikovanější objekty. Když se příroda, díky novým poznatkům stává pro člověka komplikovanější, stává se i zajímavější a uvidíme, že jevy, týkající se mechaniky komplexnějších objektů, než jsou hmotné body, jsou docela překvapující. Samozřejmě, v těchto jevech se neprojevuje nic jiného, než kombinace Newtonových zákonů, ale někdy je těžké uvěřit, že přitom uplatňuje jen  $F = ma$ .

Komplikovanější objekty, jimiž se budeme zabývat, mohou být různé: proudění vody, otáčení galaxií apod. Začneme s analýzou nejjednoduššího „komplikovaného“ objektu, jenž nazýváme *tuhým tělesem* – je to pevný předmět, jenž se při svém pohybu otáčí. Avšak i pohyb takového jednoduchého objektu může být velmi složitý. Proto se nejdříve budeme zabývat nejjednoduššími stránkami takového pohybu – když těleso rotuje kolem *pevné osy*. V takovém tělese se pak daný bod pohybuje v rovině kolmé k této ose. Taková rotace tělesa kolem pevné osy se nazývá *rovinnou* nebo *dvojrozměrnou rotací*. Získané výsledky zobecníme i na trojrozměrné rotace, ale přitom zjistíme, že na rozdíl od obyčejné mechaniky částice, jsou rotace „rafinovanější“ a těžko pochopitelné, nepochopíme-li je dostatečně v dvojrozměrném případě.

K prvnímu zajímavému poznatku můžeme dojít, když do vzduchu hodíme objekt, skládající se z množství kvádrů a tyčů, jež jsou navzájem spojeny vlákny. Samozřejmě víme, že se bude pohybovat po parabole, neboť jsme to zjistili při studiu pohybu jedné částice. Nyní naše těleso *není* jednou částicí a ačkoli rotuje, poskakuje apod., lze vidět, že se pohybuje po parabole. *Co se vlastně pohybuje po parabole? Určitě ne bod v rohu kvádrů, neboť ten poskakuje sem a tam, ani bod na konci dřevěné tyče nebo v jejím středu či ve středu kvádrů. Něco se však po parabole pohybuje, jakýsi zdánlivý střed. Naše první věta, týkající se komplikovaných objektů říká, že*

## DVOJROZMĚRNÁ ROTACE

*existuje* nějaký „střed“, který lze matematicky definovat. Pohybuje se po parabole a nemusí to být bod v samotném tělese. Je to věta o hmotném středu a její důkaz nyní následuje.

Každé těleso se skládá z množství malých částic – atomů, mezi nimiž působí různé síly. Označme si jednu z částic indexem  $i$ . (Jsou jich miliony, takže  $i$  nabývá např. hodnoty do  $10^{23}$ ). Síla, jež působí na  $i$ -tou částici, je pak rovna hmotnosti částice vynásobené jejším zrychlením

$$F_i = m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2}. \quad (18.1)$$

V několika následujících kapitolách budeme hovořit o pohybu, při němž rychlosti pohybu těles a jejich částic jsou mnohem menší, než je rychlost světla, a všechny veličiny budeme používat v nerelativistickém přiblížení. Za těchto okolností je hmotnost konstantní, takže

$$F_i = \frac{d^2 (m_i r_i)}{dt^2}. \quad (18.2)$$

Sečteme-li síly působící na všechny částice, tj. když najdeme součet všech  $F_i$  pro všechny možné indexy, dostaneme výslednou sílu  $F$ . Na druhé straně rovnice dostaneme totéž, jako kdybychom nejprve sčítali a pak diferencovali:

$$\sum_i F_i = F = \frac{d^2 \left( \sum_i m_i r_i \right)}{dt^2}. \quad (18.3)$$

Výsledná síla je proto rovna druhé derivaci součtu součinů hmotností a jejich poloh.

Výsledná síla, působící na všechny částice je vlastně stejná, jako vnější síla. Proč? Ačkoli na částice působí různé síly (tah vláken, nárazy, atomové síly a kdoví co ještě) a to všechno musíme sečíst dohromady. Naštěstí nás zachraňuje třetí Newtonův zákon. Akce a reakce mezi libovolnými dvěma částicemi je stejná, takže sečteme-li všechny rovnice, vyruší se v součtu síly mezi kterýmikoli dvěma částicemi a konečný výsledek představuje ty síly, jež jsou způsobeny jinými částicemi, ne těmi, jež tvoří těleso. Takže jestliže rovnice (18.3) je součtem přes určitý počet částic, jež spolu tvoří „dané těleso“, pak *vnější* síla, která působí na celé těleso, je rovna součtu *všech* sil působících na všechny částice tělesa.

Bylo by nyní hezké, kdybychom mohli rovnici (18.3) napsat jako součin celkové hmotnosti a nějakého zrychlení, což také můžeme provést. Řekněme, že  $M$  je celková hmotnost, tj. součet hmotností všech částic. *Definujeme-li* vektor  $R$  tak, aby

$$R = \frac{\sum_i m_i r_i}{M}, \quad (18.4)$$

pak rovnice (18.3) bude prostě

$$F = \frac{d^2 (MR)}{dt^2} = M \frac{d^2 R}{dt^2}, \quad (18.5)$$

protože  $M$  je konstanta. Zjistili jsme, že vnější síla je rovna celkové hmotnosti násobené

zrychlením nějakého pomyslného bodu, jehož poloha je  $R$ . Tento bod se nazývá *hmotný střed tělesa*.<sup>28)</sup> Je to bod někde „uprostřed“ tělesa, určité průměrné  $r$ , přičemž důležitost jednotlivých vektorů  $r_i$  je úměrná jejich hmotnostem.

Význam této věty probereme podrobněji v některé další kapitole. Nyní se omezíme na dvě poznámky: Za prvé, jsou-li vnější síly nulové a vznášeli se těleso v prázdném prostoru, může se otáčet, vrtět a dělat různé pohyby, ale *hmotný střed*, tato uměle vytvořená vypočítaná poloha někde uprostřed tělesa, *se bude pohybovat konstantní rychlostí*. Ve zvláštním případě, byl-li původně v klidu, zůstane v klidu. Máme-li tedy nějakou krabici nebo kosmickou loď s lidmi, vypočítáme její hmotný střed a zjistíme, že je v klidu, pak jestliže na kosmickou loď nepůsobí vnější síly, hmotný střed bude nadále setrvávat v klidu. Samozřejmě, kosmická loď se přitom může mírně pohybovat v prostoru, ale jen proto, že lidé uvnitř chodí sem a tam. Když někdo půjde dopředu, loď se posune dozadu tak, aby střední poloha všech hmot zůstávala na téměř místě.

Je proto pohon rakety absolutně nemožný, když nemůžeme zevnitř pohnout hmotným středem? Ne, ale vyplývá z toho, že když chceme pohnout tou částí rakety, kterou potřebujeme, musíme její nepotřebnou část odstranit. Jinými slovy, má-li raketa na začátku nulovou rychlost a vymrštíme-li ven nějaký plyn, tento malý obláček plynu se bude pohybovat jedním směrem a raketa opačným, ale hmotný střed zůstane přesně tam, kde byl předtím. Takže potřebná část rakety se pohybuje opačně než nepotřebná.

Druhá poznámka týká se hmotného středu a důvod, proč jsme v naší souvislosti tento pojem zavedli, je ta, že pohyb hmotného středu je možno uvažovat odděleně od „vnitřních“ pohybů tělesa, a proto se jím v naší diskuzi o rotacích nemusíme zabývat.

## 18.2 ROTACE TUHÉHO TĚLESA

Nyní pojďme studovat rotace. Obyčejné těleso samozřejmě nevykonává jen jednoduchý rotační pohyb, ale ohýbá se, chvěje se a deformuje. Proto, abychom si věci zjednodušili, budeme hovořit o pohybu neexistujícího ideálního tělesa, které nazýváme *tuhým tělesem*. Je to takové těleso, v němž jsou síly mezi atomy tak silné a mají takový charakter, že slabé síly, potřebné k jeho uvedení do pohybu, ho nezdeformují. Při pohybu si tuhé těleso zachovává v podstatě stejný tvar. Chceme-li studovat pohyb takového tělesa a přitom ignorovat pohyb hmotného středu, zůstává jen jedna věc, kterou ještě můžeme studovat – a to je *rotace*. Jak ji máme popsat. Předpokládejme, že v tělese je dána nějaká přímka, která může procházet hmotným středem, ale nemusí, a těleso rotuje kolem této přímky jako kolem osy. Jak definujeme rotaci? To je dost jednoduché, neboť když si kdekoli v tělese označíme bod (mimo osu) a když víme, kam se tento bod posunul, můžeme vždy přesně říci, kde se těleso nachází. Jediné, co potřebujeme znát, abychom popsali polohu tohoto bodu, je nějaký *úhel*. Studium rotace je proto studiem změn tohoto úhlu s časem.

Když studujeme rotaci, pozorujeme, o jaký úhel se těleso otočilo. Nejde nám přitom o jakýkoli úhel *uvnitř* tělesa, nejde o to, abychom měřili nějaký úhel na tělese. Jde nám o *úhlovou změnu polohy* celého tělesa za nějakou dobu.

Nejdříve budeme studovat kinematiku rotací. Úhel se bude měnit v závislosti na čase a právě tak, jak jsme hovořili o poloze a rychlosti v jednorozměrném případě, můžeme hovořit o úhlové

<sup>28)</sup> Ve fyzice se často místo termínu „hmotný střed“ nebo také „střed hmotnosti“ používá kratšího termínu „těžiště“. I když přesně vzato, oba termíny neoznačují totéž (těžiště lze určovat jen v homogenním tělovém poli), zpravidla taková záměna názvů nepůsobí potíže (pozn. red.).

## DVOJROZMĚRNÁ ROTACE

poloze a úhlové rychlosti v případě rovinné rotace. Mezi dvojrozměrnými rotacemi a jednorozměrným pohybem skutečně existuje velmi zajímavý vztah, v němž téměř každá veličina má svou analogii. Známe úhel  $\vartheta$ , který určuje, jak se těleso *otočilo*; ten nahrazuje vzdálenost  $y$ , která určuje, jak daleko se těleso *posunulo*. Podobně známe rychlost otáčení  $\omega = d\vartheta/dt$ , která říká, jak se změní úhel za sekundu, podobně jako  $v = ds/dt$  popisuje rychlost pohybu tělesa nebo velikost posunutí za sekundu. Jestliže se úhel měří v radiánech, bude úhlová rychlost  $\omega$  tolik a tolik radiánů za sekundu. Čím je úhlová rychlost větší, tím rychleji se těleso otáčí a tím rychleji se mění úhel. Můžeme pokračovat: úhlovou rychlost můžeme derivovat podle času a  $\varepsilon = d\omega/dt = d^2\vartheta/dt^2$  můžeme nazvat úhlovým zrychlením. To by byla analogie obyčejného zrychlení.

Nyní budeme muset dát do souvislosti dynamiku rotace s dynamickými zákony částic tvořících těleso. K tomu potřebujeme zjistit, jak se pohybuje určitá částice, když má danou úhlovou rychlost. Proto si vybereme částici, jež se nachází ve vzdálenosti  $r$  od osy, a řekněme, že v daném okamžiku má určitou polohu  $P(x, y)$  (obr. 18.1). Pootočili-li se za dobu  $\Delta t$  úhel celého tělesa o  $\Delta\vartheta$ , posunula se s ním i částice. Nachází se ve stejné vzdálenosti od  $\vartheta$  jako předtím, jen se dostala do bodu  $Q$ . První, co nás zajímá, je, o čem se změní vzdálenost  $x$  a vzdálenost  $y$ . Označíme-li  $OP$  jako  $r$ , pak vzdálenost  $PQ$  je  $r\Delta\vartheta$ , neboť tak je definován úhel. Změna  $x$  je prostě projekcí  $r\Delta\vartheta$  do směru osy  $x$

$$\Delta x = -PQ \sin \vartheta = -r \Delta \vartheta \frac{y}{r} = -y \Delta \vartheta. \quad (18.6)$$

Podobně

$$\Delta y = x \Delta \vartheta. \quad (18.7)$$

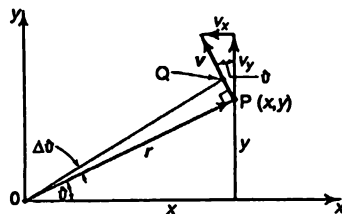
Otáčeli-li se těleso s danou úhlovou rychlostí  $\omega$ , pak dělením obou stran rovnic (18.6) a (18.7)  $\Delta t$  najdeme, že rychlost částice je

$$v_x = -\omega y \quad \text{a} \quad v_y = +\omega x. \quad (18.8)$$

Chceme-li zjistit velikost rychlosti, musíme napsat

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega r. \quad (18.9)$$

Nemělo by se zdát divné, že velikost této rychlosti je  $\omega r$ . Vlastně by to mělo být samozřejmé, neboť vzdálenost, o jakou se bod posunul, je  $r\Delta\vartheta$  a vzdálenost, o níž se posune za sekundu, je  $r\Delta\vartheta/\Delta t$  neboli  $\omega r$ .



Obr. 18.1 Kinematika dvojrozměrné rotace

Pojďme dále a podívejme se na *dynamiku* rotace. Musíme zavést novou veličinu – *slu*. Ptáme se, zda můžeme vynalézt něco, co budeme nazývat torzní silou (z latinského slova torquere; česky

točit, kroutit) nebo *momentem síly*, což by mělo stejný vztah k rotaci, jako má síla k posuvnému pohybu. Tak jako síla vyvolává posuvný pohyb, moment síly je něco, co vyvolává rotaci. Kvalitativně představuje moment síly rotaci, ale jak ho vyjádřit kvantitativně? Kvantitativní vyjádření momentu síly dostaneme, když budeme zkoumat *práci* vykonanou při otočení tělesa. Vždyť jeden velmi pěkný způsob, jak definovat sílu, je vyjádřit práci, kterou vykoná, když způsobí nějaké posunutí. Analogii mezi veličinami posuvného a rotačního pohybu se pokusíme zachovat tak, že práci, vykonanou při rotaci, položíme rovnou součinu *momentu síly* a *úhlu*, o který se těleso pootočilo. Jinak řečeno, definice momentu síly bude taková, že věta o práci bude mít svou analogii: síla krát vzdálenost je práce a i moment síly krát úhel bude rovněž práce. To nám říká, co je to moment síly. Na chvíli si představme nějaké tuhé těleso, na něž působí různé síly, a nějakou osu, kolem níž se těleso otáčí. Nejdříve se soustředíme na jednu sílu a předpokládejme, že působí v bodě  $(x, y)$ . Jaká práce by se vykonala, kdybychom těleso pootočili o velmi malý úhel? Zcela snadno určíme, že vykonaná práce je

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y. \quad (18.10)$$

Stačí dosadit za  $\Delta x$  a  $\Delta y$  z rovnice (18.6) a (18.7) a dostaneme

$$\Delta W = (xF_y - yF_x) \Delta \vartheta. \quad (18.11)$$

Vykonaná práce je proto ve skutečnosti rovna úhlu, o který jsme těleso pootočili, vynásobenému podivnou kombinací složek síly a vzdálenosti, již nazýváme momentem síly. Definice práce při malém pootočení jako součinu momentu síly a úhlu, určuje i vzorec pro vyjádření momentu síly pomocí síly. (Je jasné, že moment síly nepředstavuje zcela novou myšlenku, nezávislou na Newtonově mechanice – proto se musí moment síly definovat pomocí síly.)

Působí-li na těleso více sil, pak vykonaná práce je samozřejmě rovna součtu prací vykonaných všemi silami, z nichž *každá práce je úměrná  $\Delta \vartheta$* . Proto můžeme  $\Delta \vartheta$  vytknout ze součtu a lze říci, že malá práce je rovna součtu všech momentů sil (jež existují díky všem různým silám působícím na těleso) vynásobenému  $\Delta \vartheta$ . Tento součet můžeme nazvat celkovým momentem síly  $N$ . Takže momenty sil se sčítají podle běžných pravidel algebry, ale později uvidíme, že jen proto, že pracujeme v rovině. Je to jako v jednorozměrné kinematice, kde se všechny síly sčítají algebraicky, ale jen proto, že mají všechny stejný směr. Ve třech rozměrech je to komplikovanější. Takže v dvojrozměrné rotaci platí

$$N_i = x_i F_{yi} - y_i F_{xi} \quad (18.12)$$

a

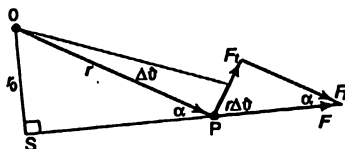
$$N = \sum N_i. \quad (18.13)$$

Musíme zdůraznit, že jde o moment síly vzhledem k dané ose. Kdybychom zvolili jinou osu, takže všechna  $x_i$  a  $y_i$  by se změnila, pak by se změnila (obvykle) i velikost momentu síly.

Nyní si krátce všimneme, že takto pomocí práce zavedený moment síly nám poskytuje velmi důležitý výsledek pro tělesa v rovnováze: jsou-li všechny síly, jež působí na těleso, v rovnováze, z hlediska translace i rotace, pak je nulová nejen *výsledná síla*, ale i součet všech *momentů sil*. Nachází-li se totiž těleso v rovnovážném stavu, pak při *malém posunutí* nevykonávají síly žádnou práci. Proto když platí  $\Delta W = N \Delta \vartheta = 0$ , musí být součet všech momentů sil nulový. Na rovnovážný stav se vztahují dvě podmínky: výslednice sil je rovna nule a výslednice momentů sil je rovna

nule. Dokažte, že stačí, když se rovná nule součet momentů sil vzhledem ke kterékoli ose (v dvojrozměrném případě).

Nyní si představme jedinou sílu a pokusme se znázornit si geometricky, co to je ten zvláštní výraz  $xF_y - yF_x$ . Síla  $F$  působící v bodě  $r$  je znázorněn na obr. 18.2. Práce vykonaná při pootočení tělesa o malý úhel  $\Delta\theta$  je rovna součinu složky síly ve směru posunutí a tohoto posunutí. Jinými slovy, uplatňuje se pouze tangenciální složka síly a tu je třeba násobit vzdáleností  $r\Delta\theta$ . Proto je i moment síly roven tangenciální složce síly (kolmé na poloměr) násobené poloměrem. To souhlasí s naší původní koncepcí momentu síly, neboť kdyby síla byla zcela radiální, nemohla by těleso vůbec otočit. Je jasné, že kroučící efekt by měl být způsoben jen tou částí síly, jež nepůsobí směrem od osy, to znamená její tangenciální složkou. Dále je jasné, že daná síla je účinnější na dlouhém rameni než blízko u osy. Skutečně, kdybychom působili přímo na osu, těleso vůbec neotočíme! Takže je zcela rozumné, když řekneme, že velikost momentu síly je úměrná radiální vzdálenosti a tangenciální složce síly.



Obr. 18.2 Kmomentusíly

Existuje ještě třetí velmi zajímavý vztah pro moment síly. Právě jsme viděli, že moment síly je síla krát poloměr krát sinus úhlu  $\alpha$  (obr. 18.2). Když ale prodloužíme přímku, po níž působí síla, a kolmo k této přímce nakreslíme úsečku  $OS$  (rameno síly), uvidíme, že toto rameno síly je kratší než  $r$  právě v takovém poměru, v jakém je tangenciální složka síly menší než celá síla. Proto můžeme moment síly vyjádřit i jako velikost síly násobenou ramenem síly.

Původ názvu momentu síly je nejasný, ale je možná odvozen z latinského *movimentum*, pohyb a schopnost síly pohnout tělesem (působením na páku nebo sochor) je tím větší, čím je delší rameno síly. V matematice „moment“ znamená váhový faktor vyjadřující vzdálenost od osy.

### 18.3 MOMENT HYBNOSTI

Ačkoli jsme zatím brali v úvahu jen speciální případ tuhého tělesa, jsou vlastnosti momentů sil a jejich matematických vztahů zajímavé dokonce i tehdy, kdy tělesa nejsou tuhá. Skutečně, lze dokázat velmi zajímavou větu: Právě tak, jako vnější síla je dána rychlostí změny veličiny  $p$ , již nazýváme celkovou hybností skupiny částic, tak i vnější moment síly je dán rychlostí změny veličiny  $L$ , již nazýváme *momentem hybnosti* skupiny částic.

Abychom to dokázali, budeme předpokládat, že máme částice, na něž působí nějaké síly, a zjistíme, co se s nimi bude dít pod vlivem momentů těchto sil. Samozřejmě, nejdříve bychom měli uvažovat jen jednu částici. Na obr. 18.3 je znázorněna částice o hmotnosti  $m$  a osa  $O$ . Není nutné, aby se částice pohybovala kolem  $O$  po kružnici, může se pohybovat po elipse jako planeta kolem Slunce nebo po jiné dráze. Částice se nějak pohybuje, působí na ni síly, které ji zrychlují podle obvyklého vztahu: složka síly ve směru osy  $x$  je rovna hmotnost krát složka zrychlení ve směru  $x$  atd. Ale podívejme se, co způsobí *moment síly*. Moment síly je roven  $xF_y - yF_x$  a síla ve směru osy  $x$  nebo  $y$  je hmotnost krát zrychlení ve směru osy  $x$  nebo  $y$

## MOMENT HYBNOSTI

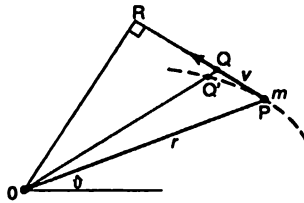
$$N = xF_y - yF_x = xm \frac{d^2 y}{dt^2} - ym \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (18.14)$$

I když se nezdá, že by to byla derivace nějaké jednoduché veličiny, je to derivace rozdílu  $xm(dy/dt) - ym(dx/dt)$ :

$$\frac{d}{dt} \left( xm \frac{dy}{dt} - ym \frac{dx}{dt} \right) = xm \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} m \frac{dy}{dt} - ym \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} m \frac{dx}{dt} = xm \frac{d^2 y}{dt^2} - ym \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (18.15)$$

Je tedy pravda, že moment síly je roven rychlosti změny něčeho v závislosti na čase. Všimněme si toho „něčeho“ a dejme tomu jméno: *moment hybnosti L*:

$$L = xm \frac{dy}{dt} - ym \frac{dx}{dt} = xp_y - yp_x. \quad (18.16)$$



Obr. 18.3 Částice pohybující se kolem osy  $O$

Ačkoli tato naše úvaha není relativistická, druhý výraz v této rovnici platí i v teorii relativity. Zjistili jsme tedy, že existuje rotační analogie i pro hybnost a tato analogie – moment hybnosti – je určena prostřednictvím složek hybnosti, podobně jako je dán moment síly určený složkami síly! Proto chceme-li znát moment hybnosti částice vzhledem k nějaké ose, pak stačí, když tangenciální složku hybnosti vynásobíme poloměrem. Jinak řečeno, k momentu hybnosti přispívá nikoli to, jak moc se částice vzdaluje od počátku, ale jak se pohybuje *kolem* počátku. Jen tangenciální složka hybnosti přispívá k momentu hybnosti. Navíc, čím dále je přímka vektoru hybnosti od osy, tím je větší moment hybnosti. Protože geometrické uspořádání je stejné, ať hovoříme o  $p$  nebo o  $F$ , existuje rameno hybnosti (*není to totéž* jako rameno síly působící na částici!), jež je určeno kolmou vzdáleností přímky vektoru hybnosti od osy otáčení. Moment hybnosti je tedy velikost hybnosti krát rameno hybnosti. Pro moment hybnosti tedy známe tři vzorce stejně jako jsme měli tři vzorce pro moment síly

$$L = xp_y - yp_x = rp_t = p \cdot \text{rameno hybnosti}. \quad (18.17)$$

Podobně jako moment síly, i moment hybnosti závisí na poloze osy, vzhledem k níž se počítá.

Dříve, než se budeme zabývat více než jednou částicí, aplikujme získané výsledky na pohyb planety kolem Slunce. V kterém směru působí síla? Síla působí směrem ke Slunci. Jaký je potom moment síly? Samozřejmě, to závisí na tom, kde si zvolíme osu, ale když ji zvolíme v samotném Slunci, dostaneme velmi jednoduchý výsledek, neboť moment síly je roven síla krát rameno síly nebo složka síly kolmá na  $r$  krát  $r$ . Ale tangenciální síla tady není, takže není ani žádný moment síly vzhledem k ose ve Slunci! Proto moment hybnosti planety pohybující se kolem Slunce, musí



být konstantní! Co to znamená? Tangenciální složka rychlosti krát hmotnost krát poloměr bude konstanta, neboť je to moment hybnosti a změna momentu hybnosti je moment síly a v tomto případě je moment síly roven nule. Protože i hmotnost je konstantní, znamená to, že tangenciální rychlost krát poloměr je konstanta. Ale to jsme již o pohybu planety věděli. Předpokládejme malou změnu času  $\Delta t$ . Jak daleko se dostane planeta při pohybu z P do Q (obr. 18.3)? Jak velkou plochu přitom její průvodič „zamete“? Zanedbáme-li malou plošku QQ'P ve srovnání s mnohem větší plochou OPQ, je to prostě polovina základny PQ krát výška OR. Jinak řečeno plocha opsaná průvodičem za jednotku času bude rovna rychlosti krát rameno rychlosti (krát 1/2). Takže plošná rychlost je úměrná momentu hybnosti, jenž je konstantní. Takže Keplerův zákon o stejných plochách za stejnou dobu je jen popis zákona zachování momentu hybnosti, kdy síla nemá žádný moment.

## 18.4 ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBNOSTI

Nyní se budeme zabývat případem, kdy máme velký počet částic, tj. kdy se dané těleso skládá z mnoha částí, na něž působí různé síly, vnitřní i vnější. Víme již, že máme-li danou osu, pak moment síly působící na  $i$ -tou částici (což je síla působící na  $i$ -tou částici krát rameno této síly) je rovna změně momentu hybnosti této částice, a že moment hybnosti  $i$ -té částice je její hybnost krát její rameno hybnosti. Dále předpokládejme, že sečteme momenty sil  $N_i$  všech částic a výsledek nazveme celkovým momentem síly  $N$ . Ten je pak roven rychlosti změny součtu momentů hybností všech částic  $L_i$ . Tím máme definovanou novou veličinu, kterou nazýváme celkovým momentem hybnosti  $L$ . Tak jako je celková hybnost tělesa rovna součtu hybností všech jeho částí, právě tak je i moment hybnosti roven součtu momentů všech částí. Pak je rychlost změny celkového  $L$  rovna celkovému momentu síly.

$$N = \sum N_i = \frac{dL_i}{dt} = \frac{dL}{dt}. \quad (18.18)$$

Může se zdát, že celkový moment síly je komplikovaná věc, neboť je třeba vzít v úvahu všechny vnitřní a všechny vnější síly. Když ale respektujeme Newtonův zákon akce a reakce, který říká nejen to, že síly akce a reakce jsou si rovny, ale i to, že *směřují opačně podél stejné přímky* (Newton to mohl, ale i nemusel takto říci, mlčky to však předpokládal), pak dva momenty síly, působící na dva navzájem reagující objekty, budou stejné a opačného směru, neboť ramena sil jsou stejná pro libovolnou osu. Proto pro každý pár částic se momenty vnitřních sil vyruší a platí pozoruhodná věta, že *rychlost změny celkového momentu hybnosti vzhledem ke kterékoli ose je rovna celkovému momentu vnějších sil vzhledem k této ose!*

$$N = \sum N_i = N_{\text{vn}} = \frac{dL}{dt} \quad (18.19)$$

Tak máme velmi silnou větu, týkající se pohybu velké skupiny částic, která nám dovoluje studovat celkový pohyb aniž bychom se museli zajímat, co se děje uvnitř mezi jednotlivými částicemi. Tato věta platí pro jakoukoli skupinu částic, bez ohledu na to, zda tvoří nebo netvoří tuhé těleso.

Jedním mimořádně důležitým případem této věty je *zákon zachování momentu hybnosti*: Jestliže na systém částic nepůsobí vnější momenty sil, zůstává moment hybnosti konstantní.

Zvlášť důležitým případem je rotace pevného tělesa, tj. objektu, který má určitý tvar. Představme si těleso s pevnými geometrickými rozměry, jež se otáčí kolem pevné osy. Různé části tělesa mají v každém okamžiku stejnou vzdálenost. Pokusme se nyní najít celkový

## ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBNOSTI

moment hybnosti tohoto tělesa. Jestliže hmotnost jedné z částic tělesa je  $m_i$  a její poloha je  $(x_i, y_i)$ , pak je třeba najít moment hybnosti této částice, neboť celkový moment je roven součtu momentů hybností všech částic tělesa. Pro částici pohybující se po kružnici je moment hybnosti roven součinu hmotnosti, rychlosti a vzdálenosti od osy otáčení. Rychlost je přitom rovna součinu úhlové rychlosti a vzdálenosti od osy:

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega, \quad (18.20)$$

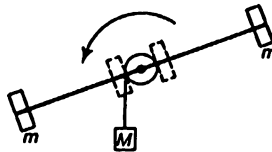
nebo sečtením přes všechny částice  $i$  máme

$$L = I\omega \quad (18.21)$$

kde

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (18.22)$$

To je analogie zákona o tom, že hybnost je hmotnost krát rychlost. Místo rychlosti je tu úhlová rychlost a vidíme, že místo hmotnosti tu vystupuje něco nového, co nazýváme *momentem setrvačnosti*  $I$  – je to analogie hmotnosti. Rovnice (18.21) a (18.22) vyjadřují, že rotující těleso má setrvačné vlastnosti, které závisí nejen na hmotnostech částic, ale i na jejich vzdálenostech od osy. Takže máme-li dvě tělesa stejné hmotnosti a posuneme-li je dál od osy, jejich rotační setrvačnost se zvětší. Lze to snadno ukázat na zařízení, jež je znázorněno na obr. 18.4, kde rychlému pádu závaží  $M$  brání dlouhé vahadlo, jímž musí otáčet. Nejdříve jsou závaží  $m$  umístěna blízko osy a  $M$  padá s určitým zrychlením. Když však změním moment setrvačnosti tím, že závaží  $m$  posuneme dále od osy, vidíme, že  $M$  má mnohem menší zrychlení než předtím, neboť těleso má mnohem větší setrvačnost vůči rotaci. Moment setrvačnosti je projevem této setrvačnosti proti otáčení. Je roven součtu příspěvků všech hmotností vynásobených druhou mocninou jejich vzdáleností od osy otáčení.



Obr. 18.4 „Setrvačnost vůči rotaci“ závisí na délce příslušných ramen

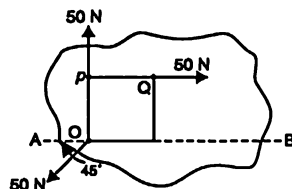
Mezi hmotností a momentem setrvačnosti je jeden „dramatický“ rozdíl. Hmotnost tělesa se nemění, ale jeho moment setrvačnosti se může změnit. Kdybychom se postavili na podstavec otáčející se bez tření a v roztažených rukách bychom drželi závaží, přičemž bychom se pomalu otáčeli, mohli bychom přitažením rukou změnit moment setrvačnosti, aniž by se naše hmotnost změnila. Jakmile to uděláme, začnou se dít v důsledku zákona o zachování momentu hybnosti podivuhodné věci. Je-li vnější moment sil roven nule, zůstává moment hybnosti (moment setrvačnosti krát omega) konstantní. Nejdříve jsme se otáčeli s velkým momentem setrvačnosti  $I_1$  a malou úhlovou rychlostí  $\omega_1$ , a moment hybnosti byl  $I_1 \omega_1$ . Pak jsme přitažením rukou změnili moment setrvačnosti, řekněme na menší hodnotu  $I_2$ . Součin  $I\omega$ , jenž musí zůstat nezměněn (neboť moment hybnosti musí zůstat stejný), je pak roven  $I_2 \omega_2$ . Takže  $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$ . Z toho vyplývá, že když se zmenší moment setrvačnosti, musí se zvětšit úhlová rychlost.

# PŘÍKLADY A CVIČENÍ

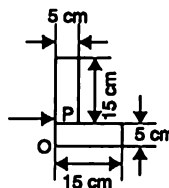
18.1 ■ Síla  $F = 30 \text{ i} + 40 \text{ j} \text{ N}$  působí v bodě  $r = 8 \text{ i} + 6 \text{ j} \text{ m}$ . Najděte a) moment síly vzhledem k počátku souřadnic, b) rameno síly, c) složku síly kolmou k  $r$ .

18.2 ■ Na jaké zeměpisné šířce je rychlost bodu na zemském povrchu v důsledku rotace zemské o 200 m/s menší než v Los Angeles?

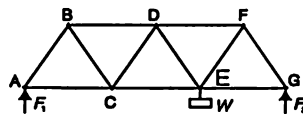
18.3 ■ Na rovinnou ocelovou destičku, která plave na rtuti, působí tři síly ve třech různých rozích čtverce o straně 0,1 m (viz obrázek). Najděte jedinou sílu, která může udržet destičku v rovnováze; určete její velikost, směr a působíště na přímkce  $AB$ .



18.4 ■ Na obrázku vidíme úhelníček vyrobený z plechu konstantní tloušťky ležící na hladké vodorovné desce. Po nárazu v ukázaném směru se úhelníček začne pohybovat po stole *bez otáčení*. V jaké vzdálenosti od vrcholu  $O$  leží bod, v němž došlo k nárazu?



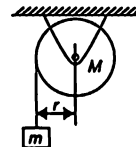
18.5 ■ Na obrázku vidíme mostní konstrukci. Je tvořena pevnými lehkými tyčemi stejné délky spojenými klouby pohyblivými bez tření. Najděte síly reakce  $F_1$  a  $F_2$  a namáhání tyče  $DF$ , je-li v bodě  $E$  zavěšeno závaží tíhy  $W$ .



18.6 ■ Vypočítejte momenty setrvačnosti následujících tuhých těles o hmotnosti  $m$ :

- Tenká přímá homogenní tyč délky  $L$ . Moment počítejte vzhledem k ose procházející jedním koncem tyče kolmo k ní.
- Tatáž tyč, moment vzhledem k ose procházející kolmo středem tyče.
- Tenkostěnný dutý kruhový válec poloměru  $r$ , moment vzhledem k ose symetrie válce.
- Plný kruhový válec poloměru  $r$ , moment vzhledem k ose symetrie válce.

18.7 ■ Závaží o hmotnosti  $m$  je zavěšeno na vlákne namotaném na plném válci o hmotnosti  $M$  a poloměru  $r$ . Válec se může otáčet kolem vodorovné osy bez tření (viz obrázek). Najděte zrychlení závaží  $m$ .



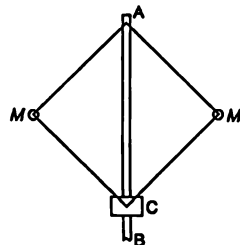
18.8 ■ Závaží o hmotnosti  $m$  se pohybuje po hladké vodorovné ploše stolu. K závaží je přivázána nit, která je vedena malým otvorem ve stole směrem dolů. Na počátku je závaží vzdáleno od otvoru o  $r_1$  a závaží se pohybuje po kružnici poloměru  $r_1$  rychlostí  $v_1$ . Potom za nit zdola zatáhneme a závaží se přiblíží k otvoru na vzdálenost  $r_2$ . Najděte

- rychlost závaží  $r_2$  v konečném stavu,
  - práci vykonanou silou, jež pod stolem pítáhla závaží,
  - velikost síly, jíž musíme působit na dolní konec nití, aby poloměr kružnice, po níž se závaží pohybuje, zůstal konstantní.
- Využijte princip virtuální práce.

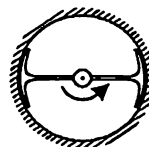
18.9 ■ Najděte moment hybnosti planety o hmotnosti  $m$ , která se pohybuje po kruhové dráze poloměru  $R$ . Použijte tento výsledek a ukažte, že díky slapovým pohybům, jež brzdí rotaci Země, se vzdálenost mezi Měsícem a Zemí bude během času zvětšovat (i když velmi pomalu). Posuďte také otázku zachování energie v soustavě Země – Měsíc.

18.10 ■ Řešte úlohu 18.9 za těchto podmínek: Ve stavu statické rovnováhy jsou výsledná síla a výsledný moment síly působící na těleso nulové.

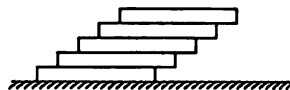
18.11 ■ Odstředivý regulátor na obrázku má vypínat motor, když rychlost rotace hřídele překročí 120 otáček za minutu. Vedená objímka  $C$  má hmotnost 4 kg a klouže bez tření po svislé tyči  $AB$ . Motor se vypne, když se vzdálenost  $AC$  zkrátí na 43 cm. Délka každého ramene regulátoru je 30 cm, můžeme je považovat za nehmotná a zanedbat tření v kloubech. Jak musí být zvolena hmotnost závažíček  $M$ , aby regulátor fungoval podle technických požadavků?



18.12 ■ Na svislou hřídel jednoduchého regulátoru rychlosti (viz obrázek) je kolmo nasazena vodorovná tyč, po níž mohou volně klouzat těžké brzdící čelisti. Při rotaci hřídele se čelisti tisknou k vnitřnímu povrchu nehybného brzdícího válce. Hmotnost každé čelisti je  $m$ , jejich tloušťka je zanedbatelná ve srovnání s poloměrem válce  $r$ , koeficient kluzného tření mezi čelistmi a povrchem válce je  $\mu$ . Odvoďte vztah, který by vyjadřoval výkon potřebný k otáčení hřídele pomocí  $m$ ,  $r$ ,  $\mu$  a úhlové rychlosti rotace hřídele  $\omega$ .



18.13 ■ Homogenní pravoúhelníková destička délky  $L$  leží na hladké vodorovné ploše (viz obrázek). Shora na ni klademe stejné destičky tak, aby po stranách byly zarovnané a čelo každé destičky posuneme přes okraj destičky ležící pod ní o délku  $L/a$ , kde  $a$  je celé číslo. Kolik destiček se podaří takto nakládat, než se celá hromádka zhroutí? Ukažte, že pokud nebudeme klást omezení na počet destiček nebo způsob jejich kladení, vrchní destičku můžeme posunout vzhledem k nejspodnější na libovolně velkou vzdálenost.



# Hmotný střed; moment setrvačnosti

---

## 19.1 VLASTNOSTI HMOTNÉHO STŘEDU

## 19.2 POLOHA HMOTNÉHO STŘEDU

## 19.3 URČENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI

## 19.4 KINETICKÁ ENERGIE ROTACE

### 19.1 VLASTNOSTI HMOTNÉHO STŘEDU

V přecházející kapitole jsme zjistili, že, působí-li velmi mnoho sil na složitou soustavu částic, ať už jde o tuhé těleso, pružné těleso, hvězdný oblak nebo něco jiného, a sečteme-li všechny tyto síly (jsou to samozřejmě vnější síly, neboť vnitřní síly se vzájemně vyrušily) a díváme se na celý soubor částic jako na jedno těleso s celkovou hmotností  $M$ , pak „uvnitř“ existuje takový bod – hmotný střed (těžiště) –, že výslednice vnějších sil působí taková zrychlení tohoto bodu, jakoby v něm byla soustředěna celá hmotnost souboru. Zabývejme se nyní hmotným středem trochu podrobněji.

Poloha hmotného středu (ve zkratce  $T$ ) je určena rovnicí

$$R_T = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}. \quad (19.1)$$

To je, jak je vidět, vektorová rovnice, která ve skutečnosti představuje tři rovnice (jednu pro každou ze tří souřadnic). Budeme se zabývat jen jednou,  $x$ -ovou souřadnicí, neboť porozumíme-li vztahům pro jednu souřadnici, snadno je přeneseme na další dvě. Co znamená výraz

$$X_T = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} ?$$

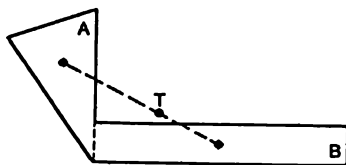
## VLASTNOSTI HMOTNÉHO STŘEDU

Předpokládejme, že těleso je rozděleno na malé části, z nichž každá má stejnou hmotnost  $m$ . Celková hmotnost je pak rovna počtu částí  $N$  vynásobenému hmotností jednotlivé části. Tato rovnice pak znamená, že máme sčítat všechny polohy  $x_i$  a vydělit je počtem částí

$$X_T = \frac{m \sum x_i}{mN} = \frac{\sum x_i}{N}.$$

Takže  $X_T$  je střední hodnota všech  $x_i$ , jsou-li všechny hmotnosti  $m_i$  stejné. Předpokládejme však, že některá část by byla dvakrát těžší než ostatní, pak by se příslušné  $x$  vyskytlo v součtu dvakrát. To lze snadno pochopit, neboť tuto část s dvojnásobnou hmotností si můžeme představit rozdělenou na dvě poloviny, které jsou stejně těžké jako ostatní části. Při počítání průměru musíme příslušné  $x$  započítat dvakrát, neboť tam jsou takové části dvě. Takže  $X$  je průměrná poloha všech částí ve směru osy  $x$ , přičemž poloha každé části se musí započítat úměrně ke své hmotnosti. Z toho lze snadno dokázat, že  $X$  musí ležet někde mezi největším a nejmenším  $x$ , a proto leží uvnitř obalu ohraničujícího celé těleso. Nemusí se nacházet uvnitř materiálu samotného tělesa, neboť těleso může mít například tvar kružnice, jako prsten, kde hmotný střed je ve středu prstenu a ne v samotném prstenu.

Je-li těleso symetrické, například obdélník a má nějakou rovinu symetrie, pak hmotný střed leží někde v této rovině. V případě obdélníka existují dvě takové roviny, čímž je poloha hmotného středu určena jednoznačně. Jde-li o libovolné symetrické těleso, pak jeho hmotný střed leží někde na ose symetrie, neboť v takovém případě existuje stejný počet kladných i záporných  $x$ .



Obr. 19.1 Hmotný střed složeného tělesa leží na přímce spojující hmotné středy obou částí

Všimněme si i dalšího zajímavého případu. Předpokládejme, že máme těleso složené ze dvou částí  $A$  a  $B$  (obr. 19.1). Hmotný střed celého tělesa pak lze vypočítat takovýmto způsobem: Nejdříve najdeme hmotný střed části  $A$ , potom části  $B$  a zjistíme i hmotnost každé části  $M_A$  a  $M_B$ . Pak budeme uvažovat nový problém, kdy hmota o hmotnosti  $M_A$  je soustředěna v bodě, jenž je hmotným středem  $A$ , a hmota o hmotnosti  $M_B$  v bodě, jímž je hmotný střed tělesa  $B$ . Hmotný střed těchto dvou hmotných bodů je pak hmotným středem celého tělesa. Jinak řečeno, jestliže jsme našli hmotný střed různých částí tělesa, nemusíme při výpočtu hmotného středu celého tělesa začít úplně znovu; stačí, když spojíme jednotlivé části, přičemž každou považujeme za hmotný bod umístěný v hmotném středu příslušné části. Podívejme se, proč je tomu tak. Předpokládejme, že chceme vypočítat hmotný střed celého tělesa, jehož dvě části patří k tělesu  $A$  a některé k tělesu  $B$ . Celkovou sumu  $\sum m_i x_i$  pak lze rozdělit na dvě části – sumu  $\sum_A m_i x_i$  týkající se pouze tělesa  $A$  a sumu  $\sum_B m_i x_i$  vztahující se pouze k tělesu  $B$ . Kdybychom počítali hmotný střed pouze tělesa  $A$ , použili bychom první sumu, přičemž víme, že ta je rovna  $M_A X_A$  (celková hmotnost částí tělesa  $A$  krát poloha hmotného středu tělesa  $A$ ) podle věty o hmotném středu aplikované na objekt  $A$ . Rovněž pro těleso  $B$  máme  $M_B X_B$  a samozřejmě, že sečtením obou máme

$$MX_T = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A X_A + M_B X_B. \quad (19.2)$$

Protože je jasné, že  $M$  je rovno součtu  $M_A$  a  $M_B$ , vidíme, že rovnici (19.2) lze interpretovat jako zvláštní případ vztahu pro výpočet hmotného středu dvou bodových těles, jednoho s hmotností  $M_A$  umístěného v bodě  $X_A$  a druhého s hmotností  $M_B$  v bodě  $X_B$ .

Věta o pohybu hmotného středu je velmi zajímavá a měla důležitou úlohu v rozvoji našeho chápání fyziky. Předpokládejme, že Newtonův zákon platí pro malé části mnohem většího tělesa. Pak podle této věty platí Newtonův zákon i pro větší těleso, ačkoli těleso neznáme detailně. Známe jen celkovou sílu, jež na něj působí a jeho hmotnost. Jinými slovy, Newtonův zákon má tu zvláštní vlastnost, že platí-li v určitém malém měřítku, bude platit i ve větším měřítku. Nebudeme-li mšček považovat za velmi složitou věc skládající se z miliard interagujících částic a všimneme si pouze pohybu těžiště a vnějších sil působících na mšček, zjistíme, že  $F = ma$ , kde  $F$  je vnější síla působící na mšček,  $m$  je jeho hmotnost a  $a$  je zrychlení jeho těžiště. Takže  $F = ma$  je zákon, který reprodukuje sám sebe ve větším měřítku. (Mělo by existovat slovo, možná řecké, k pojmenování zákona, který reprodukuje sám sebe ve větším měřítku.)

Samozřejmě lze předpokládat, že zákony objevené jako první budou takové, jež se reprodukuje ve větším měřítku. Proč? Protože měřítko základních „setrvačnicků a koleček“ vesmíru má rozměry atomu, což je mnohem jemnější měřítko než nesrovnatelně větší měřítko našich běžných pozorování. Proto bychom jako první měli objevit zákony týkající se objektů, jejichž vlastnosti nejsou vázány na atomová měřítká. Kdyby se zákony platné pro malá tělesa nereprodukovaly ve větším měřítku, neobjevili bychom je tak snadno. Jak by to vypadalo, kdyby to bylo obráceně? Musí být zákony platné v malém měřítku stejné, jako zákony platné ve větším měřítku? V přírodě samozřejmě není nutné, aby zákony na úrovni atomových měřítek musely být stejné, jako zákony na úrovni větších měřítek. Předpokládejme, že by pravé zákony pohybu atomů byly dány nějakou podivnou rovnicí, která nemá vlastnost, že přejdeme-li k větším měřítkům, zreprodukuje se stejný zákon. Ale místo toho má tu vlastnost, že ve větších měřítkách ji lze aproximovat určitým výrazem, který když ho rozšíříme dál a dál, bude reprodukovat sám sebe ve větším a větším měřítku. To je možné a ve skutečnosti je tomu tak. Newtonovy zákony jsou „chvostem“ atomových zákonů extrapolovaných na velmi velké rozměry. Zákony pohybu částic v tom nejjemnějším měřítku jsou velmi zvláštní, ale když si vezmeme velké množství částic a složíme je, dostaneme přibližně *ale jen přibližně*, Newtonovy zákony. Newtonovy zákony nám pak umožňují, že můžeme přecházet k větším a větším měřítkům, přičemž se zdá, že platí stále stejný zákon. Ve skutečnosti dokonce, jak se měřítko zvětšuje, stává se zákon stále přesnějším a přesnějším. Samoreprodukční faktor Newtonových rovnic není sice základní vlastností přírody, je však důležitý po historické stránce. Základní zákony atomových částic bychom nikdy neobjevili při prvním pozorování, neboť první pozorování jsou příliš hrubá. Opravdu se ukazuje, že základní atomové zákony, jež nazýváme kvantovou mechanikou, se zcela liší od Newtonových zákonů. Lze je těžko pochopit, neboť všechny naše přímé zkušenosti máme s objekty velkých měřítek a chování atomů je zcela jiné než to, co vidíme ve velkých měřítkách. Proto nemůžeme říci: „Elektron v atomu je jako planeta obíhající kolem Slunce“ nebo něco podobného. Není to jako nic, co známe, protože *nic se mu nepodobá*. Když aplikujeme kvantovou mechaniku na stále větší a větší tělesa, zákony chování mnoha atomů *se nezreprodukuje*, ale dostaneme z nich *nové zákony* – Newtonovy zákony. Ty se potom reprodukuje počínaje řekněme měřítkem milióntiny mikrogramu, což již představuje miliardy a miliardy atomů, až k rozměrům Země a dále.

Nyní se vraťme k hmotnému středu. Často se nazývá i *těžištěm*, a to proto, že ve většině případů je gravitační pole stejnorodé. Předpokládejme, že máme dostatečně malé rozměry, takže gravitační síla není jen úměrná hmotnosti, ale všude je i rovnoběžná s daným směrem. Mějme těleso, na jehož všechny části hmoty působí gravitační síly. Nechť  $m_i$  je hmotnost jedné části.

Gravitační síla působící na tuto část je pak  $m_i$  krát  $g$ . Zůstává otázkou, v kterém bodě máme působit jedinou silou tak, abychom vyvážili gravitační sílu působící na těleso a aby se celý objekt (jde-li o tuhé těleso) neotáčel? Odpověď je, že síla musí procházet hmotným středem. Dokážeme to: Aby se těleso neotáčelo, musí se součet momentů všech sil rovnat nule, neboť kde je moment síly, tam je i změna momentu hybnosti, tedy rotace. Proto musíme spočítat momenty sil působící na všechny částice a zjistit, jak velký je výsledný moment síly vzhledem k nějaké ose (když osa prochází hmotným středem, měl by být nulový). Když budeme  $x$  měřit horizontálně a  $y$  vertikálně, budou momenty sil rovny velikostem sil ve směru  $y$ , jež vynásobíme velikostí příslušného ramene ve směru  $x$  (podle pravidla síla krát rameno síly vzhledem k ose, vůči níž určíme moment síly). Celkový moment síly je roven součtu

$$N = \sum m_i g x_i = g \sum m_i x_i. \quad (19.3)$$

Proto má-li být celkový moment síly roven nule, musí být součet  $\sum m_i x_i$  roven nule. Ale  $\sum m_i x_i = M X_T$ , tj. celková hmotnost krát vzdálenost hmotného středu od osy otáčení, proto  $x$ -ová vzdálenost hmotného středu od osy otáčení je rovna nule.

Zkontrolovali jsme výsledek jen pro vzdálenosti ve směru osy  $x$ , ale kdybychom použili skutečný hmotný střed, bylo by těleso v rovnováze v jakékoli poloze, neboť otočíme-li ho o  $90^\circ$ , dostaneme místo  $x$ -ových  $y$ -ové vzdálenosti. Jinými slovy, je-li těleso podepřeno v hmotném středě, nepůsobí na něj moment síly, neboť gravitační pole je homogenní. V případě, že těleso je tak velké, že se projeví nerovnoběžnost gravitačních sil, pak určit bod, v němž je třeba působit rovnovážnou silou, není jednoduché a jeho poloha se trochu vysune z hmotného středu. To je důvodem, proč je třeba rozlišovat mezi hmotným středem a těžištěm. Fakt, že těleso podepřené přesně v hmotném středě je v rovnováze ve všech polohách, má další zajímavý důsledek. Máme-li místo gravitace nepravou sílu vzniklou zrychlením, můžeme přesně stejným matematickým postupem najít polohu bodu k upevnění tělesa, aby setrvačná síla způsobená zrychlením nepůsobila žádným momentem síly. Předpokládejme, že těleso je nějak upevněno v krabici, která se zrychleně pohybuje se vším, co v ní je. Víme, že z hlediska toho, kdo je vzhledem ke krabici v relativním klidu, bude v ní působit efektivní síla setrvačnosti. To znamená, že aby se nějaké těleso pohybovalo spolu s krabicí, musíme na něj působit silou, aby se zrychlovalo. Tato síla je vyvažována „sílou setrvačnosti“, jež je nepravou silou a je rovna součinu hmotnosti a zrychlení krabice. Pro člověka v krabici je to stejná situace, jako by se krabice nacházela v homogenním gravitačním poli, jehož hodnota „ $g$ “ je rovna zrychlení  $a$ . Proto setrvačná síla způsobená zrychlením tělesa nepůsobí momentem síly vzhledem k hmotnému středě.

Tato skutečnost má velmi zajímavé důsledky. V inerciální soustavě, jež se nezrychluje, je moment síly vždy roven rychlosti změny momentu hybnosti, ale vzhledem k ose, která prochází hmotným středem tělesa i když se těleso zrychluje, stále platí, že moment síly je roven rychlosti změny momentu hybnosti. Dokonce i když se hmotný střed zrychluje, můžeme stále zvolit takovou osu, konkrétně tu, která jím prochází, aby platila rovnost momentu síly a rychlosti změny momentu hybnosti vzhledem k této ose. Proto věta, že moment síly je roven rychlosti změny momentu hybnosti, platí ve dvou obecných případech:

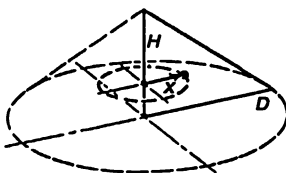
- 1) pro pevnou osu v inerciálním systému,
- 2) pro osu procházející těžištěm – dokonce i když se těleso pohybuje zrychleně.



## 19.2 POLOHA HMOTNÉHO STŘEDU

Matematická technika výpočtu hmotného středu těles spadá do kurzu matematiky a takovéto problémy jsou vhodnými cvičeními v integrálním počtu. I když známe integrální počet, je dobré znát určité triky, jež se k výpočtu polohy hmotného středu dají použít. Jeden takový trik využívá tzv. Pappovy věty. Zní takto: Vezmeme-li si libovolnou uzavřenou plochu v rovině a pohybem této plochy v prostoru vytvoříme těleso tak, aby se každý bod plochy pohyboval kolmo k rovině plochy, pak objem tohoto tělesa je roven součinu obsahu plochy průřezu tělesa a vzdálenosti, kterou urazil hmotný střed! Určitě to platí, budeme-li plochou pohybovat přímo, kolmo k rovině plochy; ale budeme-li jí pohybovat po kružnici nebo po jiné křivce mohou vznikat velmi zvláštní tělesa. V případě zakřivené dráhy se vzdálenější strana posune víc a bližší méně, takže tyto efekty se vzájemně vyrovnají. Proto, chceme-li určit polohu hmotného středu rovinné desky rovnoměrné hustoty, můžeme si zapamatovat, že objem vytvořený její rotací kolem nějaké osy je roven součinu dráhy, kterou projde hmotný střed a obsahu plochy této desky.

Chceme-li určit hmotný střed pravoúhlého trojúhelníka se základnou  $D$  a výškou  $H$  (obr. 19.2), můžeme postupovat následujícím způsobem. Představme si osu podél  $H$  a otočme kolem ní trojúhelník o 360 stupňů. Tím se vytvoří kužel. Hmotný střed  $o$  souřadnici  $x$  opsal dráhu  $2\pi x$ . Plocha, která se pohybovala, je plocha trojúhelníka a má obsah  $1/2 HD$ . Takže dráha hmotného středu krát obsah plochy trojúhelníka je rovna rotačnímu objemu, který je  $1/3 \pi D^2 H$ . Takže  $(2\pi x)(1/2 HD) = 1/3 \pi D^2 H$  neboli  $x = D/3$ . Podobným způsobem, rotací kolem druhé osy nebo pomocí argumentu symetrie, bychom našli  $y = H/3$ . Skutečně, těžiště jakéhokoli homogenního trojúhelníka je v průsečíku těžnic (spojnic vrcholů se středy protilehlých stran). Nachází se v  $1/3$  délky každé těžnice. Rozřežeme-li trojúhelník na množství pásků rovnoběžných se základnou vidíme, že těžnice rozpůlí každý pásek, a proto musí těžiště ležet na těžnicí!



Obr. 19.2 Pravoúhlý trojúhelník a přímý rotační kužel vytvořený rotujícím trojúhelníkem

Nyní zkusme komplikovanější příklad. Hledejme hmotný střed homogenního půlkruhového kotouče – kotouče rozříznutého na polovinu. Kde se nachází hmotný střed? Hmotný střed celého kotouče je ve středu, to je jednoduché, ale pro poloviční kotouč je situace obtížnější. Nechť  $r$  je poloměr a  $x$  nechť je vzdálenost hmotného středu od rovné hrany kotouče. Zatočme jím kolem této hrany jako kolem osy a vytvoříme kouli. Těžiště se přitom posunulo o  $2\pi x$ , obsah plochy je  $1/2 \pi r^2$  (neboť je to půlkruh). Vytvořený objem je roven  $4/3 \pi r^3$ , odkud máme že

$$(2\pi x) \left( \frac{1}{2} \pi r^2 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

takže

$$x = \frac{4r}{3\pi}.$$

Existuje další Pappova věta, která je zvláštním případem předcházející věty, takže je rovněž pravdivá. Předpokládejme, že místo půlkruhového kotouče bychom měli půlkružnicový drát, v němž chceme najít hmotný střed. V tomto případě není hmota ve vnitřní oblasti, pouze v drátu. Ukazuje se, že *plocha* vytvořená rotací rovinné křivky je rovna vzdálenosti, o níž se posune hmotný střed, vynásobené *délkou* křivky. (Křivku si můžeme představit jako velmi úzkou plochu a můžeme použít předcházející větu.)

### 19.3 URČENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI

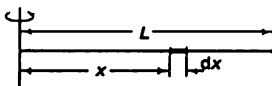
Nyní se věnujme problému určení *momentu setrvačnosti* různých těles. Vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti kolem osy  $z$  je

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

nebo

$$I = \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + y^2) \rho dV. \quad (19.4)$$

To znamená, že musíme sečíst hmotnosti, z nichž každá je vynásobena druhou mocninou své vzdálenosti od osy. Všimněme si, že tu nevystupuje trojrozměrná vzdálenost, ale druhá mocnina dvojrozměrné vzdálenosti, ačkoli jde o trojrozměrné těleso. Většinou se omezíme na dvojrozměrné objekty, ale vzorec pro rotaci kolem osy  $z$  je stejný jako v trojrozměrném případě.



Obr. 19.3 Přímá tyč o délce  $L$  rotující kolem osy procházející jedním koncem

Jako jednoduchý příklad si představme tyč rotující kolem kolmé osy procházející jejím jedním koncem. (obr. 19.3). Je třeba sečíst všechny hmotnosti vynásobené druhou mocninou  $x$ -ové vzdálenosti (všechny vzdálenosti  $y$  jsou v tomto případě rovny nule). „Součtem“ máme samozřejmě na mysli integrál z  $x^2$  krát malé elementy hmotnosti. Rozdělíme-li tyč na malé elementy délky  $dx$ , a je-li délka celé tyče  $L$  a její hmotnost  $M$ , pak

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

a

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{ML^2}{3}. \quad (19.5)$$

Rozměry momentu setrvačnosti jsou vždy hmotnost krát druhá mocnina délky, takže všechno, co jsme skutečně potřebovali zjistit, byl koeficient  $1/3$ .

Čemu je rovno  $I$ , prochází-li osa rotace středem tyče? Znovu bychom mohli počítat tento integrál, přičemž  $x$  by se měnilo od  $-1/2 L$  do  $+1/2 L$ . Všimněme si však několika vlastností momentu setrvačnosti. Celou tyč si můžeme představit jako by byla složena ze dvou tyčí, každé o hmotnosti  $M/2$  a délce  $L/2$ . Momenty setrvačnosti těchto dvou malých tyčí jsou stejné a oba jsou dány vzorcem (19.5). Proto moment setrvačnosti celé tyče je

$$I = \frac{2 \left( \frac{M}{2} \right) \left( \frac{L}{2} \right)^2}{3} = \frac{ML^2}{12}. \quad (19.6)$$

Takže je mnohem snadnější točit tyč kolem jejího středu než kolem jejího konce.

Mohli bychom pokračovat ve výpočtech momentu setrvačnosti pro různá jiná zajímavá tělesa. I když takové výpočty tvoří část důležitých cvičení v integrálním počtu, nejsou pro nás v podstatě zajímavé. Existuje však zajímavá věta, která je velmi užitečná. Předpokládejme, že máme nějaké těleso a chceme vypočítat jeho moment setrvačnosti vzhledem k nějaké ose. To znamená, že chceme určit setrvačnost, kterou musíme překonat při rotaci kolem této osy. Upevníme-li těleso v těžišti na čepu tak, aby se při oběhu kolem osy samo neotáčelo (setrvačné síly nebudou vyvolávat žádný moment síly), pak síly potřebné k jeho oběhu jsou takové, jako by celá hmotnost tělesa byla soustředěna v hmotném středu a moment setrvačnosti bude prostě  $I_1 = MR_T^2$ , kde  $R_T$  je vzdálenost hmotného středu tělesa od osy otáčení. To zřejmě ale není správný vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti tělesa, které ještě navíc rotuje, neboť nejen že jeho hmotný střed se pohybuje po kružnici (to je příspěvek  $I_1$  k momentu setrvačnosti), ale ještě se při každém oběhu jednou otočí kolem vlastního hmotného středu. Proto není nerozumné přidat k  $I_1$  ještě moment setrvačnosti  $I_T$  vzhledem k ose procházející hmotným středem. Správnou odpověď je, že celkový moment setrvačnosti kolem jakékoli osy je roven

$$I = I_T + MR_T^2. \quad (19.7)$$

Tato věta se někdy nazývá větou o rovnoběžných osách<sup>29)</sup> a lze ji snadno dokázat. Moment setrvačnosti vzhledem k jakékoli ose je  $I = \sum (x_i^2 + y_i^2) m_i$ . Soustředíme se na  $x$ -ové souřadnice, ale samozřejmě stejně se počítá se souřadnicemi  $y$ . Vzdálenost určitého hmotného bodu od počátku si označme  $x$ . Podívejme se, čemu bude rovna, budeme-li měřit  $x'$  od hmotného středu místo od počátku. Můžeme napsat

$$x_i = x'_i + X_T$$

a druhá mocnina bude

$$x_i^2 = x'^2_i + 2X_T x'_i + X_T^2.$$

Co se stane, vynásobíme-li výraz  $m_i$  a sečteme přes všechna  $i$ ? Vytkneme-li všechny konstanty před sumační znaménka, máme

$$I_x = \sum m_i x_i'^2 + 2X_T \sum m_i x'_i + X_T^2 \sum m_i.$$

Třetí suma je jednoduchá, je to  $MX_T^2$ . V druhé sumě jsou dva činitelé. Jeden z nich je  $\sum m_i x'_i$ , ale tento činitel je roven nule, neboť  $x'$  se měří od hmotného středu a v této souřadnicové soustavě je střední poloha všech částic s váhou rovnou hmotnostem rovna nule. První suma je  $x$ -ová část  $I_T$ . Takže máme rovnici (19.7), přesně jak jsme předpokládali.

Proveřme si vztah (19.7) na příkladu. Zjistíme, zda platí i v případě tyče. Vypočítali jsme, že pro osu jdoucí jedním koncem je moment setrvačnosti roven  $1/3 ML^2$ . Hmotný střed tyče se nachází

<sup>29)</sup> Steinerova nebo Huygensova-Steinerova věta. (pozn. red.)

v jejším středu, ve vzdálenosti  $L/2$ . Proto by mělo platit, že  $(1/3)ML^2 = 1/12 ML^2 + M(L/2)^2$ . Protože jedna dvanáctina plus jedna čtvrtina je rovna jedné třetině, neudělali jsme žádnou podstatnou chybu.

Ve skutečnosti jsme ani nepotřebovali počítat integrál, abychom určili moment setrvačnosti (19.5). Kdybychom prostě předpokládali, že je roven  $ML^2$  krát nějaký neznámý koeficient  $\gamma$ , a pak použili argument o dvou polovinách, abychom dostali  $(1/4)\gamma$  pro (19.6), pak podle naší věty o posunutí osy musí platit  $\gamma = 1/4\gamma + 1/4$ , takže  $\gamma = 1/3$ . Vždy lze najít ještě nějaký další způsob.

Při použití věty o rovnoběžných osách, je důležité mít na paměti, že osa pro  $I_T$  musí být rovnoběžná s osou, vzhledem k níž se počítá moment setrvačnosti.

Za zmínku stojí i jedna další vlastnost momentu setrvačnosti, neboť ji lze použít při hledání momentu setrvačnosti určitých těles. Máme-li nějaký rovinný obrazec a souřadnicovou soustavu s počátkem v této rovině a se z-ovou osou kolmou k této rovině, pak moment setrvačnosti obrazce vzhledem k ose z je roven součtu momentů setrvačnosti vzhledem k osám y a x. Lze to snadno dokázat, když si všimneme, že

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i y_i^2$$

neboť  $z_i = 0$ . Podobně

$$I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum m_i x_i^2,$$

ale

$$I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = I_x + I_y.$$

Jako příklad vypočítejme moment setrvačnosti homogenní pravoúhlé desky o hmotnosti  $M$ , šířky  $a$  a délky  $b$ , vzhledem k ose kolmé na desku a procházející jejším středem). Je

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2),$$

neboť vzhledem k ose ležící v rovině desky rovnoběžné s délkou, je moment setrvačnosti  $Ma^2/12$ , tj. jako pro tyč délky  $a$  a moment setrvačnosti vzhledem k druhé ose v rovině obdélníka je  $Mb^2/12$ , jako pro tyč délky  $b$ .

Abychom to shrnuli, moment setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose (kterou budeme nazývat osou z) má tyto vlastnosti:

1. Moment setrvačnosti je

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2) dm.$$

2. Skládá-li se těleso z více částí, přičemž moment setrvačnosti každé z nich známe, je celkový moment setrvačnosti roven součtu momentů setrvačnosti jednotlivých částí.
3. Moment setrvačnosti vzhledem ke kterékoli ose je roven součtu momentu setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose procházející hmotným středem a součinu celkové hmotnosti a druhé mocniny vzdálenosti osy od hmotného středu.
4. Má-li těleso tvar rovinného obrazce, je moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na jeho rovinu roven součtu momentů setrvačnosti kolem kterýchkoli dvou navzájem kolmých os ležících v rovině a protínajících se na kolmé ose.

## HMOTNÝ STŘED; MOMENT SETRVAČNOSTI

Momenty setrvačnosti homogenních těles několika základních tvarů jsou v *tab. 19.1*. V *tab. 19.2* jsou momenty setrvačnosti některých dalších těles, které lze určit z *tab. 19.1* pomocí uvedených vlastností momentů setrvačnosti.

**Tabulka 19.1**

Těleso	Osa $z$	$I_z$
Tenká tyč délky $L$	$\perp$ na tyč ve středu	$\frac{1}{12} ML^2$
Tenký prstenec s poloměry $r_1, r_2$	$\perp$ na prstenec ve středu	$\frac{1}{2} M(r_1^2 + r_2^2)$
Koule s poloměrem $r$	středem	$\frac{2}{5} Mr^2$

**Tabulka 19.2**

Těleso	Osa $z$	$I_z$
Pravouhelníková deska, strany $a, b$	$\parallel$ s $b$ , středem	$\frac{1}{12} Ma^2$
Pravouhelníková deska, strany $a, b$	$\perp$ na desku, středem	$\frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$
Tenký koncentrický prstenec s poloměry $r_1$ a $r_2$	kterýkoli průměr	$\frac{1}{4} M(r_1^2 + r_2^2)$
Pravouhlý rovnoběžnostěn, strany $a, b, c$	$\parallel$ s $c$ , středem	$\frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$
Přímý rotační válec, poloměr $r$ , délka $L$	$\parallel$ s $L$ , středem	$\frac{1}{2} Mr^2$
Přímý rotační válec, poloměr $r$ , délka $L$	$\perp$ $L$ , středem	$M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)$

### 19.4 ROTAČNÍ KINETICKÁ ENERGIE

Zabývejme se dále dynamikou. V analogii mezi posuvným a rotačním pohybem v kapitole 18 jsme využili větu o práci, ale nehovořili jsme o kinetické energii. Jakou kinetickou energii má tuhé těleso, když rotuje kolem určité osy úhlovou rychlostí  $\omega$ ? Pomocí našich analogií můžeme ihned odhadnout správnou odpověď. Moment setrvačnosti odpovídá hmotnosti, úhlová rychlost odpovídá rychlosti, takže kinetická energie by měla být rovna  $1/2 I\omega^2$ , a také je, jak ihned ukážeme. Předpokládejme, že těleso rotuje kolem nějaké osy, takže každému bodu odpovídá rychlost  $\omega r_i$ , kde  $r_i$  je vzdálenost od daného bodu k ose. Je-li hmotnost tohoto bodu  $m_i$ , je kinetická energie celého tělesa rovna součtu kinetických energií všech malých částí:

## ROTAČNÍ KINETICKÁ ENERGIE

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (r_i \omega)^2.$$

$\omega^2$  je konstanta, stejná pro všechny body, takže

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (19.8)$$

V závěru kapitoly 18 jsme si ukázali, že existují některé zajímavé úkazy spojené s tělesem, které není tuhé, ale které může přejít z jednoho tuhého stavu s určitým momentem setrvačnosti do druhého tuhého stavu. V našem příkladu s otáčivým stolkem jsme měli s roztaženými rukama určitý moment setrvačnosti  $I_1$  a úhlovou rychlost  $\omega_1$ . Když jsme ruce přitáhli k sobě, měli jsme jiný moment setrvačnosti  $I_2$  a jinou úhlovou rychlost  $\omega_2$ , ale znovu jsme byli „tuhým tělesem“. Moment hybnosti zůstal konstantní, neboť vzhledem k svislé ose otáčivého stolku nepůsobil žádný moment síly. To znamená, že  $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$ . Ale co s energií? To je zajímavá otázka. S přitáženými rukama se otáčíme rychleji, ale náš moment setrvačnosti je menší, a zdálo by se, že by se energie mohly rovnat. Ale energie si nejsou rovny, neboť se vyrovnává  $I\omega$  a ne  $I\omega^2$ . Proto když porovnáme kinetickou energii předtím a potom, kinetická energie předtím je  $(1/2) I_1 \omega_1^2 = L \omega_1 / 2$ , kde  $L = I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$  je moment hybnosti. Potom máme,  $T = L \omega_2 / 2$ , a protože  $\omega_2 > \omega_1$ , je kinetická energie větší než předtím. Takže, když jsme měli roztažené ruce, měli jsme určitou energii a když jsme je přitáhli, otáčeli jsme se rychleji a měli jsme větší kinetickou energii. Co se stalo s větou o zachování kinetické energie? Někdo tady musel vykonat určitou práci. Vykonali jsme ji my! Kdy? Když pohybuje závaží horizontálním směrem, nekonáme přece žádnou práci. Ale to platí tehdy, když se neotáčíme! Když se otáčíme, působí na závaží odstředivá síla. Závaží by chtěla uletět, proto když se otáčíme, musíme závaží přitahovat proti směru odstředivé síly. Práce, kterou vykonáme proti odstředivé síle, musí být v souladu s rozdílem rotační energie a samozřejmě tomu tak je. Odtud pochází dodatečná kinetická energie.

Existuje ještě jiná zajímavá vlastnost, o níž se zmíníme jen popisně jako o obecně zajímavé záležitosti. Tato vlastnost je trochu složitější, ale stojí za to se o ní zmínit, neboť je sama poměrně zvláštní a způsobuje i mnoho zajímavých jevů.

Vraťme se znovu k experimentu s otáčivou podložkou. Všimněme si zvláště těla a zvláště ruky z hlediska člověka, který se otáčí. Po přitážení rukou se závažími se celý otáčí rychleji. *Trup těla se nezměnil*, a přece se otáčí rychleji než předtím. Kdybychom kolem trupu nakreslili kružnici a dále uvažovali pouze o předmětech uvnitř kružnice, pak by se jejich moment hybnosti *změnil*, pohybují se rychleji. Proto při přitážení rukou musí na tělo působit moment síly. Odstředivá síla nemůže působit žádným momentem, neboť je to radiální síla. To znamená, že odstředivá síla není jedinou silou, jež vzniká v rotujícím systému, *je tu ještě jiná síla*. Tato jiná síla se nazývá *Coriolisova* a má velmi podivnou vlastnost. Když totiž něčím pohybujeme v rotujícím systému, vzniká síla působící do strany. Podobně jako odstředivá síla, je to nepravá síla. Nacházíme-li se v rotujícím systému a pohybujeme předmětem v radiálním směru, zjistíme, že k tomu, aby se skutečně pohyboval radiálně, musíme na něj působit i do strany. Právě tento boční tah roztočil náš trup.

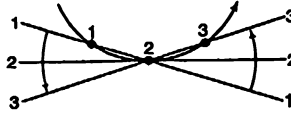
Odvoďme vzorec pro Coriolisovu sílu, abychom viděli, jak skutečně působí. Předpokládejme, že Pavel sedí na rotující desce, která se mu zdá být nehybnou. Ale z hlediska Petra, který stojí na Zemi a zná správné zákony mechaniky, se deska otáčí. Předpokládejme, že jsme na desku nakreslili nějakou radiální přímku a že Pavel podél ní posouvá nějaké těleso. Chtěli bychom ukázat, že k tomu je potřebná boční síla. Podař se nám to tak, když si všimneme momentu hybnosti tělesa. Těleso se točí se stálou úhlovou rychlostí  $\omega$ , takže moment hybnosti je

$$L = mv_{\perp}r = m\omega r \cdot r = m\omega r^2.$$

Je-li tedy těleso blízko osy, má relativně malý moment hybnosti. Přesuneme-li ho do nové, vzdálenější polohy, zvětšíme  $r$ , má těleso větší moment hybnosti. Má-li se pohybovat podél poloměru, musí na něj působit moment síly. (Při chůzi podél poloměru po rotující desce je třeba se naklonit, působit silou na stranu. Někdy si to zkuste.) Potřebný moment síly je roven rychlosti změny  $L$  podle času, jak se těleso pohybuje podél poloměru. Jestliže se těleso pohybuje jen podél poloměru,  $\omega$ , zůstává konstantní, takže moment síly je roven

$$N = F_c r = \frac{dL}{dt} = \frac{d(m\omega r^2)}{dt} = 2m\omega r \frac{dr}{dt},$$

kde  $F_c$  je Coriolisova síla. Chceme vědět, jakou boční sílu musí Pavel vynaložit, aby se těleso pohybovalo rychlostí  $v_r = dr/dt$ . Je to síla  $F_c = N/r = 2m\omega v_r$ .



Obr. 19.4 Tři postupné pohledy na radiálně se pohybující bod na otáčející se podložce

Ted, když už máme vzorec pro Coriolisovu sílu, se podíváme na celou situaci trochu podrobněji, abychom viděli, zda můžeme pochopit původ této síly z elementárnějšího hlediska. Všimněme si, že Coriolisova síla je stejná pro každý poloměr a je tedy přítomna dokonce i v počátku na ose otáčení! Ale vznik této síly v počátku lze zvláště snadno pochopit, podíváme-li se na to, co se děje, z inerciální soustavy Petra, který stojí na zemi. Obr. 19.4 znázorňuje tři postupné pohledy na pohyb bodu  $m$  procházejícího počátkem. Vidíme, že v důsledku rotace se bod nepohybuje po přímce, ale po zakřivené čáře, jež se dotýká průměru desky v bodě  $r=0$ . Aby se bod pohyboval po křivce, musí na něj působit síla, která mu dodává zrychlení v absolutním prostoru. To je Coriolisova síla.

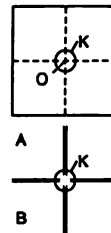
Coriolisova síla se objevuje i v jiných situacích. Můžeme ukázat, že i při pohybu tělesa konstantní rychlostí po obvodu kruhu na něj působí Coriolisova síla. Proč? Pavel vidí, že těleso se pohybuje po kružnici rychlostí  $v'$ , z druhé strany Petr pozoruje rychlost  $v = v' + \omega r$ , neboť bod  $m$  je unášen deskou. Proto víme, čemu je síla skutečně rovna, konkrétně celkové odstředivé síle v důsledku rychlosti  $v$ , tj.  $mv^2/r$ . Z Pavlova hlediska má odstředivá síla tři části. Můžeme je napsat následujícím způsobem

$$F_r = -\frac{mv^2}{r} = -\frac{mv'^2}{r} - 2mv'\omega - m\omega^2 r.$$

$F_r$  je síla, kterou bude pozorovat Pavel. Pokusme se ji pochopit. Poznal by Pavel první člen? „Ano“, řekl by, „i kdybych se neotáčel, a kdybych běžel po kružnici rychlostí  $v'$ , působila by odstředivá síla.“ Je to prostě odstředivá síla, již by Pavel očekával, i kdyby deska nerotovala. Pavel si navíc dobře uvědomuje, že je tu ještě jiná odstředivá síla, jež působí i na tělesa, která jsou na jeho desce v klidu. To je třetí člen. Ale je tu ještě další, druhý člen, který je zase roven  $2m\omega v$ . Coriolisova síla  $F_c$  byla tangenciální, když rychlost byla radiální, a nyní je radiální, když rychlost je tangenciální. Skutečně, oba výrazy se navzájem liší znaménkem. Coriolisova síla má vzhledem k rychlosti stejný směr bez ohledu na to, jaký směr má rychlost. S rychlostí svírá pravý úhel a její velikost je  $2m\omega v$ .

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 19.1 ■ Osm tenkých homogenních tyčí tvoří plochý čtverec přidržený nehmotným rámečkem (na obrázku A čárkovaným). Délka každé tyče je  $l$  a její hmotnost  $M$ . Čtverec se volně otáčí bez tření kolem osy  $O$  kolmé k jeho rovině úhlovou rychlostí  $\omega_0 \text{ s}^{-1}$ . Během otáčení vytvoří vnitřní mechanismus  $K$  spojený s rámečkem z tyčí kříž podle obrázku B. Mechanismus má konstantní moment setrvačnosti  $40/3 Ml^2$ . Jakou energii mechanismus spotřebuje?

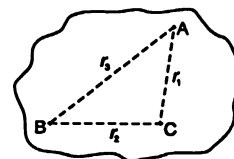


- 19.2 ■ Torzní moment pružného vlákna je úměrný úhlu zkrutu:  $\tau_v = -k\vartheta$ .
- a) Ukažte, že potenciální energie takového vlákna, zkrouceného o úhel  $\vartheta$  je  $1/2 k\vartheta^2$ .
- b) Moment síly působící na rámeček galvanometru je dán výrazem  $\tau = nABl$ , kde  $i$  je proud protékající rámečkem,  $n$  počet závitů a  $B$  magnetická indukce vytvářená permanentním magnetem galvanometru. Při měření náboje kondenzátoru se kondenzátor vybíjí přes rámeček galvanometru a měří se maximální úhel odklonění. Přitom výboj nastává tak rychle, že během protékání proudu se rámeček nestačí podstatně vychýlit z počáteční polohy  $\vartheta = 0$ . Zanedbáte-li tření a vezmete-li v úvahu, že  $|i| = |dq/dt|$ , ukažte, že maximální úhel odklonění je úměrný původnímu náboji kondenzátoru  $q_0$ .

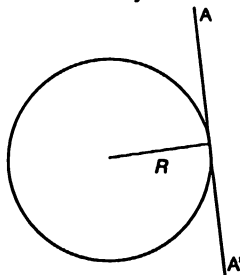
- 19.3 ■ Přímý rovný drát délky  $l$  a hmotnosti  $M$  je uprostřed ohnut pod úhlem  $\vartheta$  podle obrázku. Čemu je roven jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející bodem  $A$  kolmo k rovině drátu?



- 19.4 ■ Kovová destička nepravidelného tvaru, ale stálé tloušťky má hmotnost  $M$  a těžiště v bodě  $C$ . Moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé k rovině destičky a procházející bodem  $A$  je znám a roven  $I_A$  (viz obrázek). Za jakých podmínek kladených na vzdálenosti  $r_1$ ,  $r_2$  a  $r_3$  platí následující výraz pro moment setrvačnosti destičky vzhledem k ose kolmé k její rovině a procházející bodem  $B$ :  $I_B = I_A + Mr_3^2$ ?



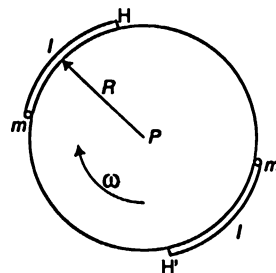
- 19.5 ■ Kruh s poloměrem  $R$  rotuje kolem své tečny  $AA'$ . Přitom vzniká rotační těleso nazývané toroid. Určete jeho objem.



- 19.6 ■ Hmotné body s hmotnostmi  $M_1$  a  $M_2$  se nacházejí na opačných koncích tenké nehmotné tyče délky  $L$ . Tyč roztočíme kolem kolmé osy. Kterým bodem tyče musí procházet osa rotace, aby energie potřebná k dosažení úhlové rychlosti  $\omega_0$  byla minimální?

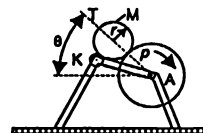


- 19.7 ■ Ke zpomalení rotace umělých družic se používá zařízení, které pracuje na následujícím principu. Homogenní kruhový kotouč s poloměrem  $R$  a hmotností  $M$  může volně rotovat ve vodorovné rovině kolem kloubu  $P$  umístěného ve středu kotouče. Na okraji kotouče jsou umístěna dvě malá závaží, z nichž každé má hmotnost  $m$ . S kotoučem jsou také spojena dvěma vlákny délky  $l$  navinutými na jeho obvodu (viz obrázek). Když kotouč rotuje, závaží jsou současně uvolněna beze změny celkového momentu hybnosti soustavy. Potom se závaží od kotouče vzdalují a v okamžiku, kdy se vlákna napnou v radiálním směru, sklouznou z háčků  $H$  a  $H'$  a umožňují tak závažím odletět. Najděte délku vláken  $l$  při níž se úhlová rychlost po takové operaci zmenší  $n$ -krát.

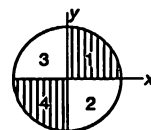


- 19.8 ■ Pavel se nachází v souřadnicové soustavě  $(x', y)$  a rovnoměrně rotuje vzhledem k Petrovi, který je nehybný v souřadnicové soustavě  $(x, y)$ . Najděte výraz pro složku síly, jež podle Pavlova mínění působí na nějakou částici a ukažte, že tato síla je tvořena složkami pravé síly  $F$ , kterou pozoruje i Petr, a dvou nepravých sil: radiální odstředivé síly a Coriolisovy síly, jež je kolmá k rychlosti.
- 19.9 ■ Homogenní koule s poloměrem  $R$  a hmotností  $M$  je na počátku vržena po rovině tak, že po ní klouže bez valení. Koeficient tření mezi koulí a rovinou je  $\mu$ . Jakou vzdálenost koule proběhne než její pohyb přejde od klouzání k valení a jakou bude mít v tom okamžiku rychlost?

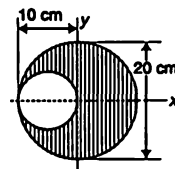
- 19.10 ■ Na obrázku je znázorněno zjednodušené schéma zařízení k podávání tiskařské čerň do tiskařského stroje. Čerň postupuje z bubnu  $K$ , který se volně otáčí kolem pevné osy. Moment setrvačnosti tohoto bubnu je zanedbatelně malý. Na obrázku  $P$  je nosný tiskařský válec s pevnou osou a  $T$  je podávací hřídel, jež se volně valí po  $K$  i  $P$ . Hřídel  $T$  představuje plný válec s poloměrem  $r$  a hmotností  $M$ ; po celou dobu se valí po  $K$  i  $P$  bez prokluzování a geometrie zařízení je uspořádána tak, že přímka spojující osy  $T$  a  $P$  svírá s vodorovnou rovinou úhel  $\theta$ . Jaké maximální úhlové zrychlení  $\varepsilon$  může mít válec  $P$ , aby se neztratil kontakt mezi  $T$  a  $K$ ? Závisí na tom rychlost tiskařského stroje.



- 19.11 ■ Plný válec se skládá ze čtyř sekcí – kvadrantů, přičemž hustoty materiálů, z nichž jsou jednotlivé sekce vyrobeny, se liší, a jsou v poměru čísel uvedených na obrázku. Vedeme-li osy  $x$  a  $y$  jako na obrázku, napište rovnici přímky procházející počátkem a těžištěm válce.



- 19.12 ■ V kruhovém kotouči konstantní hustoty je vyříznut otvor podle obrázku. Kde leží těžiště tohoto tělesa?

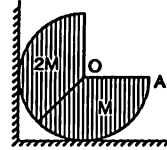


- 19.13 ■ Najděte polohu těžiště homogenního drátu ohnutého do oblouku kružnice poloměru  $R$ . Délka drátu je  $L$ , přičemž  $R > L/2\pi$ . Použijte soustavu souřadnic s počátkem ve středu kružnice a s osou  $x$  procházející středem drátu.

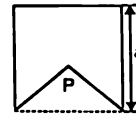
19.14 ■ Najděte těžiště výseče kruhu s vrcholovým úhlem  $\alpha$  vyříznuté z homogenního kotouče poloměru  $R$ . Můžete třeba použít i výsledek předchozí úlohy.

19.15 ■ Válec o poloměru  $\pi$  cm a hmotnosti 3 kg je rozřezán podél osy na tři stejné části. Totéž je provedeno i s druhým válcem téhož poloměru, ale hmotnosti 6 kg. Tyto části jsou vzájemně slepeny podle obrázku, při čemž přímka  $OA$  je vodorovná. Stěna je dokonale hladká a podlaha dokonale drsná.

a) Jakou silou působí válec na stěnu?  
 b) V jaké vzdálenosti od středu na přímce  $OA$  musíme umístit hmotný bod o hmotnosti  $m$ , aby soustava zůstala v rovnováze i po odstranění stěny?

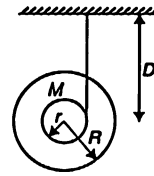


19.16 ■ Z čtvercové kovové destičky strany  $a$  máme z jedné strany vyříznout rovnoramenný trojúhelník tak, aby zbývající část destičky zavěšená v bodě  $P$  (vrchol trojúhelníka, viz obrázek) byla v rovnováze nezávisle na poloze. Čemu je rovna výška trojúhelníka?



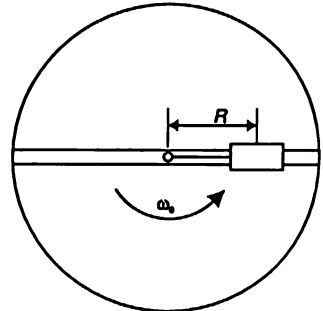
19.17 ■ Cívka je složena ze dvou stejných kotoučků s poloměrem  $R$  a hmotností  $M$  nasazených na lehké osičce s poloměrem  $r$ . Nít navinutá na ose cívky je připevněna ke stropu. Vzdálenost cívky od stropu je  $D$  (viz obrázek). Z této polohy se cívka začne spouštět dolů.

a) Jaký úhel musí svírat nít se svislou přímkou na počátku, aby se cívka při spouštění nerozhoupávala?  
 b) Jaké je svislé zrychlení těžiště cívky?



19.18 ■ Otáčivý stůl s momentem setrvačnosti  $I_0$  se může volně otáčet kolem vertikální osy. Na stole je vedena přímá radiální dráha, po níž se může bez tření pohybovat vozík o hmotnosti  $m$  (viz obrázek). Nít připevněná k vozíku je vedena přes malou kladku a dutou osou pod stůl. Na počátku soustava rotuje úhlovou rychlostí  $\omega_0$  a vozík se nachází ve fixované poloze ve vzdálenosti  $R$  od osy. Pak začne být nít větší silou vtažována do duté osy tak, až se vozík zastaví ve vzdálenosti  $r$  od osy.

a) Jaká bude úhlová rychlost soustavy v konečném stavu?  
 b) Dokažte, že rozdíl energií konečného a počátečního stavu soustavy je roven práci, kterou vykonala síla vtažující nít.  
 c) Jestliže nít uvolníme, jakou rychlostí bude procházet bodem  $R$ ?



# Rotace v prostoru

## 20.1 MOMENTY SIL V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

## 20.2 ROVNICE ROTACE A VEKTOROVÝ SOUČIN

## 20.3 SETRVAČNÍK

## 20.4 MOMENT HYBNOSTI TUHÉHO TĚLESA

### 20.1 MOMENT SÍLY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

V této kapitole se budeme zabývat jedním z nejpozoruhodnějších a nejzábavnějších důsledků mechaniky – chováním rotujícího tělesa. Za tím účelem musíme nejdříve rozšířit matematickou formulaci rotačního pohybu, pojmy moment hybnosti, moment síly atd. na trojrozměrný prostor. Tyto rovnice nebudeme *používat* v jejich úplné obecnosti, ani nebudeme studovat všechny jejich důsledky, neboť by nám to zabralo mnoho let a my se brzy musíme věnovat jiným tématům. V úvodním kurzu můžeme uvést jen základní zákony a aplikovat je na několik mimořádně zajímavých příkladů.

Nejdříve si všimněme, že máme-li rotaci ve třech rozměrech, ať už jde o tuhé těleso nebo o nějaký jiný systém, pak to, co jsme odvodili v dvojrozměrném případě, stále platí. Stále tedy platí, že  $xF_y - yF_x$  je moment síly „v rovině  $xy$ “ nebo moment síly „kolem osy  $z$ “. Ukáže se i to, že tento moment síly je roven rychlosti změny  $xp_y - yp_x$ , neboť kdybychom se vrátili k odvození rovnice (18.15) z Newtonových zákonů, viděli bychom, že nemusíme předpokládat rovinný pohyb; když diferencujeme  $xp_y - yp_x$ , dostaneme  $x\dot{p}_y - y\dot{p}_x$ , takže tato věta stále platí. Veličinu  $xp_y - yp_x$  nazýváme momentem hybnosti příslušejícím rovině  $xy$  nebo momentem hybnosti vzhledem k ose  $z$ . Protože toto platí, můžeme si vzít jakoukoli jinou dvojici souřadnicových os a odvodit další rovnici. Vezměme si rovinu  $yz$  a ze symetrie je jasné, že když prostě dosadíme  $y$  za  $x$  a  $z$  za  $y$ , dostaneme pro moment síly  $yF_z - zF_y$  a  $yp_z - zp_y$  bude moment hybnosti spojený s rovinou  $yz$ . Samozřejmě, mohli bychom vzít ještě jinou rovinu, rovinu  $zx$ , a pro ni bychom dostali

$$zF_x - xF_z = \frac{d}{dt}(zp_x - xp_z).$$

Je zcela jasné, že tyto tři rovnice lze odvodit pro pohyb jedné částice. Navíc, kdybychom výrazy jako  $xp_y - yp_x$  sečetli pro mnoho částic a součet nazvali celkovým momentem hybnosti, měli bychom tři výrazy pro tři roviny  $xy$ ,  $yz$  a  $zx$ . Kdybychom totéž provedli i se silami, mohli bychom

hovořit o momentu síly v rovině  $xy$ ,  $yz$  i  $zx$ . Dostali bychom poznatek, že vnější moment síly příslušející kterékoli rovině je roven rychlosti změny momentu hybnosti příslušejícímu této rovině. Toto je zobecnění našich poznatků o dvojrozměrném případě.

Někdo by ale mohl říci: „Ale existuje více rovin! Nemůžeme vzít nějakou jinou rovinu pod nějakým jiným úhlem a vypočítat moment síly v této rovině? Protože bychom pro každou takovou rovinu museli napsat další sérii rovnic, měli bychom velmi mnoho rovnic!“ Kupodivu se ukazuje, že stačí, když v nějaké jiné rovině změníme  $x'$ ,  $F'_y$ , atd. a vypočteme kombinaci  $x'F'_y - y'F'_x$ , pak lze výsledek napsat jako *kombinace* tří výrazů v rovinách  $xy$ ,  $yz$  a  $zx$ . To není nic nového. Jinými slovy známe-li tři momenty sil v rovinách  $xy$ ,  $yz$ ,  $zx$ , potom lze moment síly v libovolné rovině a příslušný moment hybnosti napsat jako jejich kombinace: 6 procent z jednoho, 92 procent z druhého atd. Tuto vlastnost si nyní rozebereme.

Předpokládejme, že Petr určil všechny momenty síly a všechny momenty hybnosti v příslušných rovinách v souřadnicích  $xyz$ , ale Pavel má souřadnicové osy  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , jež mají jiný směr. Abychom si to trochu zjednodušili, budeme předpokládat, že se pootočily jen osy  $x$  a  $y$ . Pavlovy  $x'$  a  $y'$  jsou nové, ale  $z'$  je stejné jako  $z$ . Má tedy nové roviny  $yz$  a  $zx$ . Proto jeho momenty síly a momenty hybnosti jsou jiné. Například jeho moment síly v rovině  $x'y'$  bude  $x'F'_y - y'F'_x$ , atd. Nyní musíme najít vztah mezi novými a starými momenty síly, tj. najít spojení mezi oběma souřadnicovými soustavami. Někdo možná poznamená: „To vypadá podobně, jako to, co jsme dělali s vektory.“ Ano, přesně to chceme provést. Ale pak může říci: „A není moment síly vlastně vektor?“ *Ukáže se*, že je to vektor, ale to nemůžeme vědět dříve, než provedeme jeho analýzu. Každý krok nebudeme provádět podrobně, chceme jen naznačit, jak se do dělá. Momenty sil, které vypočítá Petr, jsou

$$\begin{aligned} N_{xy} &= xF_y - yF_x \\ N_{yz} &= yF_z - zF_y \\ N_{zx} &= zF_x - xF_z. \end{aligned} \quad (20.1)$$

Poznamenejme, že nedáme-li dostatečný pozor na souřadnice, můžeme v takovýchto výrazech dostat nesprávné znaménko. Proč nepíšeme  $N_{yz} = zF_y - yF_z$ ? Souvisí to se skutečností, že souřadnicová soustava může být buď pravotočivá, nebo levotočivá. Zvolíme-li si (libovolně) znaménko pro  $N_{xy}$ , můžeme správně vyjádření dalších dvou veličin vždy najít záměnou  $xyz$  v jednom z pořadí

$$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$$

nebo

$$x \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow x.$$

Pavel ve své soustavě vypočítá takovéto momenty sil

$$\begin{aligned} N_{x'y'} &= x'F'_y - y'F'_x \\ N_{y'z'} &= y'F'_z - z'F'_y \\ N_{z'x'} &= z'F'_x - x'F'_z. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Předpokládáme, že jedna souřadnicová soustava je vzhledem k druhé pootočena o pevný úhel  $\vartheta$ , přičemž osy  $z$  a  $z'$  jsou totožné. (Tento úhel  $\vartheta$  nemá nic společného s rotací předmětů nebo s tím, co se děje v dané souřadnicové soustavě. Určuje jen vztah mezi souřadnicovými osami jednoho a souřadnicovými osami druhého pozorovatele, přičemž předpokládáme, že je

konstantní.) Souřadnice v těchto dvou systémech souvisí navzájem takto:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \\y' &= y \cos \vartheta - x \sin \vartheta \\z' &= z.\end{aligned}\quad (20.3)$$

Podobně, protože síla je vektor, transformuje se do nového systému stejně jako  $x, y, z$ , protože veličina je vektorem tehdy a jen tehdy, kdy její různé složky se transformují jako  $x, y, z$

$$\begin{aligned}F_x' &= F_x \cos \vartheta + F_y \sin \vartheta \\F_y' &= F_y \cos \vartheta - F_x \sin \vartheta \\F_z' &= F_z.\end{aligned}\quad (20.4)$$

Dosažením do (20.2) za  $x', y', z'$  z (20.3) a za  $F_x', F_y', F_z'$  z (20.4) můžeme nyní snadno zjistit, jak se transformují momenty síly. Tak dostáváme dlouhý výraz pro  $N_{x'y'}$ , v němž se ukáže na první pohled překvapující skutečnost, že se zredukuje na  $x'F_y' - y'F_x'$ , v čemž poznáváme moment síly v rovině  $xy$

$$\begin{aligned}N_{x'y'} &= (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) (F_y \cos \vartheta - F_x \sin \vartheta) - (y \cos \vartheta - x \sin \vartheta) (F_x \cos \vartheta + F_y \sin \vartheta) = \\&= xF_y (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) - yF_x (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) + xF_x (-\sin \vartheta \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta) + \\&\quad + yF_y (\sin \vartheta \cos \vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta) = xF_y - yF_x = N_{xy}.\end{aligned}\quad (20.5)$$

Tento výsledek je jasný, neboť pootočíme-li naše souřadnice jen *v rovině*, pak otáčením kolem osy  $z$  se nezmění, neboť ani rovina se nezměnila. Zajímavější bude sledování výrazu  $N_{y'z'}$ , neboť tu jde o novou rovinu. To, co jsme dělali s rovinou  $x'y'$ , provedme nyní s rovinou  $y'z'$ . Dostáváme

$$\begin{aligned}N_{y'z'} &= (y \cos \vartheta - x \sin \vartheta) F_z - z (F_y \cos \vartheta - F_x \sin \vartheta) = \\&= (yF_z - zF_y) \cos \vartheta + (zF_x - xF_z) \sin \vartheta = N_{yz} \cos \vartheta + N_{zx} \sin \vartheta.\end{aligned}\quad (20.6)$$

Nakonec si zopakujeme totéž pro rovinu  $z'x'$

$$\begin{aligned}N_{z'x'} &= z (F_x \cos \vartheta + F_y \sin \vartheta) - (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) F_z = \\&= (zF_x - xF_z) \cos \vartheta - (yF_z - zF_y) \sin \vartheta = N_{zx} \cos \vartheta + N_{yz} \sin \vartheta.\end{aligned}\quad (20.7)$$

Chtěli jsme odvodit pravidlo, jak najít momenty síly v nových souřadnicích a už ho máme. Jak si lze toto pravidlo zapamatovat? Když si pozorně prohlédneme vztahy (20.5), (20.6) a (20.7), vidíme, že mezi nimi a vztahy pro  $x, y, z$  existuje úzká souvislost. Kdybychom  $N_{xy}$  označili jako  $z$ -ovou složku  $N$ , pak (20.5) bychom mohli chápat jako vektorovou transformaci, neboť  $z$ -ová složka se nezmění a tak to má být. Dáme-li podobně do souvislosti rovinu  $yz$  a  $x$ -ovou složku našeho nového vektoru a rovinu  $zx$  s  $y$ -ovou složkou tohoto vektoru, pak tyto výrazy budou mít tvar

$$\begin{aligned}N_z &= N_z \\N_x' &= N_x \cos \vartheta + N_y \sin \vartheta \\N_y' &= N_y \cos \vartheta - N_x \sin \vartheta.\end{aligned}\quad (20.8)$$

což je právě transformační pravidlo vektorů!

Dokázali jsme, že kombinaci  $x\vec{F}_y - y\vec{F}_x$  můžeme ztotožnit s tím, čemu běžně říkáme  $z$ -ová souřadnice určitého uměle zavedeného vektoru. Ačkoli moment síly způsobuje otáčení v rovině, a *a priori* nemá vektorový charakter, matematicky se chová jako vektor. Tento vektor je kolmý k rovině otáčení a jeho délka je úměrná točivé síle. Tři složky takovéto veličiny se transformují jako skutečný vektor.

Moment síly tedy reprezentujeme vektorem. Každé rovině, v níž moment síly působí, přiřadíme kolmici. Samotná kolmice ještě nespecifikuje znaménko směru kolmice. Proto musíme zavést pravidlo, které nám řekne, že působil-li moment síly v rovině  $xy$  v určitém smyslu, směr kolmice, kterou jí chceme přiřadit, je totožný s kladným směrem osy  $z$ , tj. musíme definovat, co je „pravé“ a co „levé“. Předpokládáme-li, že souřadnicová soustava  $x, y, z$  je pravotočivá, bude pravidlo následující: Představíme-li si otáčení tak, že otáčíme šroubem s pravotočivým závitem, směr vektoru, který přiřazujeme tomuto otáčení, bude ve směru pohybu šroubu.

Proč je moment síly vektor? Je to šťastná shoda okolností, že rovině můžeme přiřadit jednu osu, a tak momentu síly vektor. Je to zvláštnost trojrozměrného prostoru. V dvojrozměrném prostoru je moment síly obyčejný skalár a není třeba, abychom mu přiřazovali směr. V případě tří rozměrů je to vektor. Kdybychom měli čtyři rozměry, dostali bychom se do velkých problémů, neboť (kdybychom jako čtvrtý rozměr měli například čas) bychom neměli jen roviny  $xy, yz$  a  $zx$ , ale i  $tx, ty$  a  $tz$ . Bylo by jich šest a šest veličin nemůže reprezentovat jeden čtyřrozměrný vektor.

Dělsí dobu se budeme zabývat trojrozměrným prostorem, a proto bude dobré, když si všimneme, že předcházející matematický popis nezávisel na tom, že  $x$  byla souřadnice polohy a  $F$  síla; závisel jen na transformačních zákonech platných pro vektory. Kdybychom tedy místo  $x$  použili  $x$ -ovou souřadnici nějakého jiného vektoru, nic by se nezměnilo. Jinými slovy, kdybychom vypočítali  $a_x b_y - a_y b_x$ , kde  $a$  a  $b$  jsou vektory, a kdybychom tento výraz nazvali  $z$ -ovou složkou nějaké nové veličiny  $c$ , pak tyto nové veličiny budou tvořit vektor  $c$ . K popisu vztahu tohoto nového vektoru k vektorům  $a$  a  $b$  potřebujeme matematické označení. K tomuto účelu se zavedlo označení  $c = a \times b$ . V teorii vektorové algebry máme tedy vedle známého skalárního součinu ještě nový druh součinu, tzv. *vektorový součin*. Jestliže  $c = a \times b$ , je to totéž, jako kdybychom napsali

$$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \quad (20.9)$$

Kdybychom zaměnili pořadí vektorů  $a$  a  $b$  ( $a$  by byl  $b$  a  $b$  by byl  $a$ ), znaménko vektoru  $c$  by se změnilo, neboť např.  $c_z$  by bylo rovno  $b_x a_y - b_y a_x$ . Vektorový součin proto není podobný obyčejnému násobení  $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ , platí pro něj  $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ . Odtud můžeme ihned dokázat, že když  $\vec{a} = \vec{b}$ , pak vektorový součin je roven nule:  $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ .

Vektorový součin je velmi důležitý, neboť jím lze popsat vlastnosti rotací. Důležité je i to, abychom pochopili, jaký je geometrický vztah mezi vektory  $a, b$  a  $c$ . Vztah mezi složkami těchto vektorů je dán rovnicemi (20.9) a z toho lze určit i jejich geometrickou souvislost. Především zjistíme, že vektor  $c$  je kolmý k oběma vektorům  $a$  i  $b$ . (Zkuste vypočítat zda  $c \cdot a$  nebude nula.) Dále velikost vektoru  $c$  je rovna velikosti  $a$  krát velikosti  $b$  krát sinus úhlu mezi nimi. Jaký směr má vektor  $c$ ? Představme si, že vektor  $a$  otočíme do směru vektoru  $b$  tak, aby příslušný úhel pootočení byl menší než  $180^\circ$ . Pak šroub s pravotočivým závitem otáčející se takovýmto způsobem bude směřovat ve směru  $c$ . Skutečnost, že hovoříme o *pravotočivém* a ne o *levotočivém* šroubu, je věc konvence a neustále nám připomíná, že jsou-li  $a$  a  $b$  „skutečné“ vektory v běžném smyslu, pak nový vektor, který jsme sestrojili jako  $a \times b$ , je umělý vektor, jenž se trochu liší od

vektorů  $a$  a  $b$ , neboť jsme ho zkonstruovali podle zvláštního pravidla. Pro obyčejné vektory  $a$  a  $b$  máme zvláštní název, říkáme jim *polární vektory*. Příkladem takových vektorů je polohový vektor  $r$ , síla  $F$ , hybnost  $p$ , rychlost  $v$ , intenzita elektrického pole  $E$  atd. Vektory, v jejichž definici je jeden vektorový součin, se nazývají *axiálními vektory* nebo *pseudovektory*. Příkladem pseudovektorů jsou (samozřejmě) moment síly  $N$  a moment hybnosti  $L$ . Úhlová rychlost  $\omega$  je rovněž pseudovektor, podobně jako intenzita magnetického pole  $B$ .

Abychom dokončili studium matematických vlastností vektorů, uvedeme pravidla jejich násobení pomocí skalárních a vektorových součinů. V této chvíli z toho pro naše aplikace budeme potřebovat velmi málo, ale z důvodu úplnosti uvedeme všechny vzorce násobení vektorů, takže později je budeme moci použít. Jsou to

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\
 \text{b) } & (\alpha a) \times b = \alpha (a \times b) \\
 \text{c) } & a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c \\
 \text{d) } & a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b) \\
 \text{e) } & a \times a = 0 \\
 \text{f) } & a \cdot (a \times b) = 0.
 \end{aligned} \tag{20.10}$$

## 20.2 ROVNICE ROTACE A VEKTOROVÝ SOUČIN

Je vůbec možné napsat nějaké fyzikální rovnice pomocí vektorového součinu? Takových rovnic je velmi mnoho. Například, hned vidíme, že moment síly je roven vektorovému součinu polohového vektoru a vektoru síly

$$N = r \times F. \tag{20.11}$$

To je vektorový zápis tří rovnic  $N_x = yF_z - zF_y$ , atd. Podobně moment hybnosti jedné částice je roven vektorovému součinu vzdálenosti od počátku a hybnosti

$$L = r \times p. \tag{20.12}$$

Pro rotace v trojrozměrném prostoru platí jako analog Newtonova zákona  $F = dp/dt$  tvrzení, že vektor momentu síly je roven časové změně vektoru momentu hybnosti

$$N = \frac{dL}{dt}. \tag{20.13}$$

Sečteme-li (20.13) pro mnoho částic, je moment vnějších sil působících na celý systém roven změně celkového momentu hybnosti

$$N_{\text{vn}} = \frac{dL_{\text{celk}}}{dt}. \tag{20.14}$$

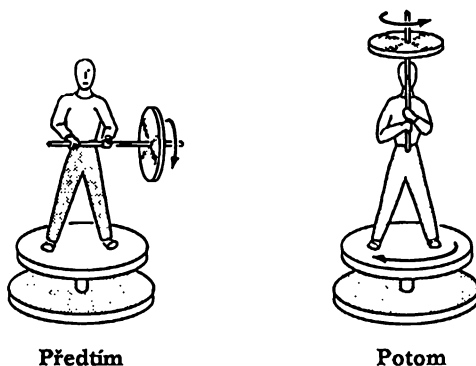
Odtud plyne: Je-li celkový moment vnějších sil roven nule, je vektor celkového momentu hybnosti soustavy konstantní. Platí tedy zákon *zachování momentu hybnosti*. Nepůsobí-li na daný systém moment síly, jeho moment hybnosti se nemůže změnit.

A co úhlová rychlost? I ta je vektor? O rotacích tuhého tělesa kolem pevné osy jsme již hovořili, ale na okamžik předpokládejme, že jím otáčíme současně kolem *dvou* os. Mohlo by se otáčet kolem nějaké osy uvnitř krabice, přičemž ta by se také otáčela kolem nějaké osy. Celkový výsledek takového kombinovaného pohybu je, že těleso se otáčí kolem nějaké nové osy! Tato nová osa má tu báječnou vlastnost, že ji lze určit podle pravidel sčítání vektorů. Vyjádříme-li rychlost rotace v rovině  $xy$  jako vektor ve směru osy  $z$ , přičemž jeho délka je úměrná rychlosti rotace v této rovině, a druhý takový vektor můří například ve směru osy  $y$  (což odpovídá rotaci v rovině  $zx$ ), pak když tyto vektory sečteme podle pravidla rovnoběžníka, velikost výsledného vektoru nám řekne, jak rychle se těleso otáčí a jeho směr určí rovinu otáčení. Takže prostě řečeno, úhlová rychlost je vektor, jehož složky jsou dány pravouhlými projekcemi do tří kolmých rovin<sup>30)</sup>.

Jako jednoduchou aplikaci použití vektoru úhlové rychlosti můžeme vypočítat výkon dodaný působením momentu síly na tuhé těleso. Výkon je roven práci za jednotku času a vyjde, že v trojrozměrném případě  $P = N \cdot \omega$ .

Všechny vztahy, jež jsme napsali pro rovinné rotace, lze zobecnit na trojrozměrný případ. Například, otáčeli-li se tuhé těleso kolem určité osy úhlovou rychlostí  $\omega$ , můžeme se zeptat: Jakou rychlost má bod, jehož polohový vektor je  $r$ ? Ukázat, že rychlost částice je dána jako  $v = \omega \times r$ , kde  $\omega$  je úhlová rychlost a  $r$  je poloha, necháme jako úkol pro studenty. Dalším příkladem vektorového součinu je Coriolisova síla, kterou lze napsat jako  $F_c = 2mv \times \omega$ . Takže pohybuje-li se částice v souřadnicovém systému rychlostí  $v$  a souřadnicový systém sám rotuje úhlovou rychlostí  $\omega$ , a díváme-li se na věc z hlediska rotujícího systému, pak musíme počítat se setrvačnou silou  $F_c$ .

## 20.3 SETRVAČNÍK



Obr. 20.1 Předtím: osa má horizontální směr; moment hybnosti vzhledem k vertikální ose = 0.  
Potom: osa má vertikální směr; moment hybnosti vzhledem k vertikální ose je stále roven nule; člověk a židle se otáčejí v opačném směru než kolo.

Vraťme se k zákonu zachování momentu hybnosti. Tento zákon může být ilustrován na příkladu s rychle se točícím kolem nebo setrvačnickem (obr. 20.1). Sedíme-li na otáčivé židli a držíme rotující těleso tak, že jeho osa je horizontální, pak vzhledem k této ose má kolo nějaký moment hybnosti. Moment hybnosti vzhledem k vertikální ose je nulový, neboť židle nasazená na

<sup>30)</sup> Pravdivost tvrzení lze odvodit výpočtem posunutí částic tělesa za infinitesimálně krátkou dobu  $\Delta t$ . Není to samozřejmé a výpočet přenecháváme těm, kdo se o to chtějí pokusit.



čepu, na kterém se může bez tření otáčet, je v klidu. Musí zůstat nulový i tehdy, když zvedneme kolo tak, aby se otáčelo kolem vertikální osy a mělo tak moment hybnosti vzhledem k této ose. Celý systém ovšem (kolo, my a židle) *nemůže* mít vertikální složku, takže aby se tento požadavek splnil, musí se židle i my otáčet na opačnou stranu než rotující kolo.

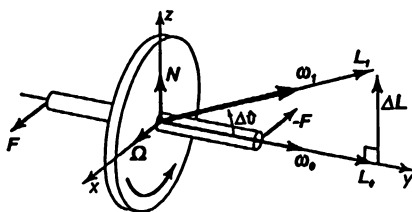
Provedme nejprve podrobnější analýzu popisovaného jevu. Co je překvapující, a co je třeba, abychom pochopili, je původ sil, jež způsobí naše otáčení, když natočíme osu setrvačnicku do vertikální polohy. Na obr. 20.2 je znázorněno kolo rychle se otáčející kolem osy  $y$ . Vzhledem k této ose má úhlovou rychlost a podobně i moment hybnosti. Představme si, že nyní chceme pootočit kolo kolem osy  $x$  malou úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Jaké síly k tomu potřebujeme? Za krátkou dobu  $\Delta t$  se osa otočí do nové polohy a s horizontálou bude svírat úhel  $\Delta \theta$ . Protože větší část momentu hybnosti pochází od rotace kolem osy (pomale pootočení přispěje málo), vidíme, že moment hybnosti se změnil. Jaká je tato změna? Moment hybnosti nezměnil svou velikost, ale svůj směr o  $\Delta \theta$ . Velikost vektoru  $\Delta L$  je tedy  $\Delta L = L_0 \Delta \theta$ , takže moment síly, který je roven změně momentu hybnosti podle času, je

$$N = \frac{\Delta L}{\Delta t} = L_0 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = L_0 \Omega.$$

Vezmeme-li v úvahu směry jednotlivých složek, vidíme, že

$$N = \Omega \times L_0. \quad (20.15)$$

Mají-li oba vektory  $\Omega$  a  $L_0$  horizontální směr, jako je to na obrázku, potom  $N$  má *vertikální* směr. K vytvoření takového momentu síly jsou potřebné síly  $F$  a  $-F$  na obou koncích osy kola. Odkud pocházejí tyto síly? Způsobíme je našima rukama při změně polohy rotační osy kola. Podle třetího Newtonova zákona stejně velké, ale opačné síly (stejně velké, ale opačné *momenty*) působí na nás. To způsobí, že se začneme otáčet v opačném směru kolem osy  $z$ .



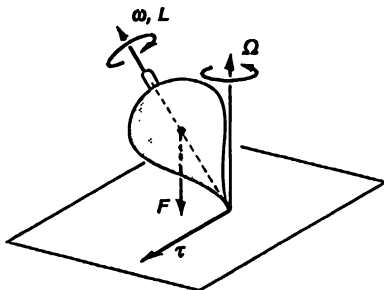
Obr. 20.2 Setrvačnick

Poslední poznatek lze zobecnit i na rychle se otáčející „dětskou káču“. V tomto známém případě vlastní tíha působící v těžišti vytváří moment síly vzhledem k bodu dotyku s podlahou (obr. 20.3). Tento moment síly má horizontální směr a způsobuje precesní pohyb rotační osy káčky po plášti rotačního kužele kolem svislé přímky. Je-li (vertikální) úhlová rychlost *precese*  $\Omega$ , máme znovu

$$N = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \Omega \times L_0.$$

Takže působíme-li na rychle se otáčející káču momentem síly, je směr precesního pohybu ve

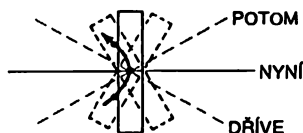
směru momentu síly, tedy, pod pravými úhly vzhledem k silám způsobujícím daný moment síly.



Obr. 20.3 Rychle se otáčející káča. Směr vektoru momentu síly je směrem precese.

Nyní můžeme tvrdit, že chápeme precesní pohyb setrvačníků. Ve skutečnosti ho chápeme po matematické stránce. V určitém smyslu se celá věc jeví jako „zázrak“. Když budeme probírat složitější fyziku, ukáže se, že mnohé jednoduché jevy lze odvodit matematicky mnohem rychleji, než je lze skutečně pochopit. Je to podivuhodné a jakmile přejdeme ke složitějším problémům, uvidíme, že matematicky dostaneme výsledky, jímž v podstatě *nikdo* nebyl schopen přímo porozumět. Příkladem je Diracova rovnice, jež má velmi pěkný a jednoduchý tvar, ale jejíž důsledky lze těžko pochopit. V našem případě se jeví precesní pohyb jako nějaký zázrak sestávající z pravých úhlů, kruhů, pootočení a pravotočivých šroubů. Měli bychom se pokusit pochopit hlubší fyzikální smysl věci.

Jak lze vysvětlit moment síly pomocí skutečných sil a zrychlení? Všimněme si, že když rotující těleso vykonává precesní pohyb, nerotují částice kola ve skutečnosti v rovině (obr. 20.4). Jak jsme si dříve vysvětlili (obr. 19.4), částice, které právě nyní procházejí osou precesního pohybu, se pohybují po *zakřivených trajektoriích*, a to znamená, že na ně působí síla ze strany. Ta je vytvořena naším tlakem na osu, a přenáší se špicemi až na rám kola. „Počkat“, někdo řekne, „ale co s částicemi, jež se pohybují opačně na druhé straně?“ Rychle lze rozhodnout, že na druhé straně musí působit *opačná síla*. Výsledná síla, jíž musíme působit, je proto rovna nule. *Síly* jsou vyvážené, ale jedna z nich musí působit na jednom konci kola a druhá na druhém. Těmito silami bychom mohli působit přímo, ale protože kolo je tuhé, stačí působit na jeho osu a síly se přenesou dále na obvod.



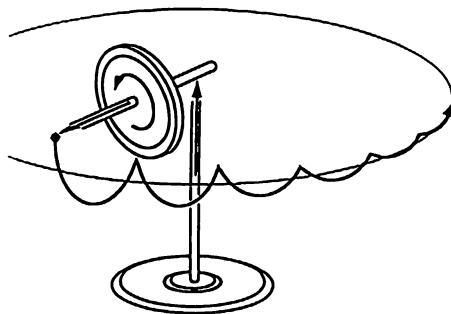
Obr. 20.4 Při otáčení osy vykonávají částice rotujícího kola (obr. 20.2) pohyb, který se děje po zakřivených trajektoriích.

Zatím jsme dokázali, že pomocí precesního pohybu může kolo vyvážit moment síly způsobený gravitací nebo jiný moment síly, jenž na něj působí. Přitom všechno, co jsme dokázali je, že takovýto pohyb je jedním řešením nějaké rovnice. Je-li tedy dán moment síly a *máme-li těleso, které nerušeně rotovalo*, pak bude vykonávat precesní pohyb hladce a rovnoměrně. Ale nedokázali jsme (a ani to není pravda), že rovnoměrná, regulární precese je *nejobecnějším* pohybem, jež může

vykonávat rotující těleso pod vlivem daného momentu síly. Obecný pohyb zahrnuje i oscilace kolem středního precesního pohybu, jimž se říká *nutace*.

Někteří lidé rádi říkají, že když na setrvačnický působí moment síly, začne vykonávat precesní pohyb, a že moment síly *způsobuje* precesi. Velmi zvláštní je to, že když uvolníme setrvačnick, pak pod vlivem tíhy nepadne, ale místo toho se začne pohybovat do strany! Jak to, že *svislá* tíhová síla, která směřuje dolů a kterou *známe a cítíme*, způsobí, že se setrvačnick bude pohybovat *do strany*? Všechny vzorce světa jako je (20.15) nám to neřeknou, neboť (20.15) je speciální rovnice a platí jen pro regulární precesní pohyb setrvačnicku. Co se ve skutečnosti dopodrobna odehraje, je toto. Kdybychom rotační osu drželi zcela pevně, takže by precesní pohyb vůbec nemohl nastat (ale setrvačnick by rotoval), nepůsobil by žádný moment síly, dokonce ani moment síly způsobený tíhou, neboť bychom ho vyvažovali svými prsty. Kdybychom ale náhle setrvačnick pustili, okamžitě by se uplatnil tíhový moment síly. Každý, kdo má zdravý rozum, by si myslel, že setrvačnick začne padat, a to skutečně začne, což lze vidět, nerotuje-li příliš rychle.

Setrvačnick skutečně padá, jak bychom očekávali. Ale jen co začne padat, začne se otáčet, a k tomu, aby tento otáčivý pohyb pokračoval, je třeba momentu síly. Za nepřítomnosti momentu síly v tomto směru, začne setrvačnick „padat“ v opačném směru, tj. ve směru chybějící síly, jež měla horizontální směr. To způsobí pohyb setrvačnicku kolem vertikální osy, jaký by měl při regulární precesi. Skutečný pohyb přitom překročí rychlost regulární precese a rotační osa se zvedne na úroveň, z níž začala padat. Trajektorie opisovaná volným koncem osy, je cykloida (takovou trajektorii opisuje například kamínek zachycený v rýze na pneumatice auta). Tento pohyb je obvykle příliš rychlý na to, abychom ho mohli postřehnout, rychle se utlumí v důsledku tření v ložiskách závěsu a zůstane jen regulární precesní pohyb (obr. 20.5). Čím pomaleji kolo rotuje, tím je nutace zřetelnější.



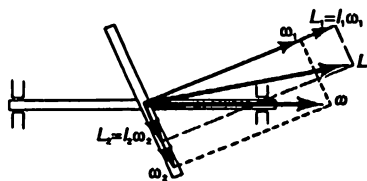
Obr. 20.5 Skutečný pohyb konce osy setrvačnicku pod vlivem tíhy ihned po uvolnění předtím uchycené osy

Když se pohyb ustálí, osa setrvačnicku je o něco níže než na začátku. Proč? To jsou složitější detaily, ale zmiňujeme se o nich, protože nechceme, aby čtenář měl dojem, že setrvačnick je absolutní zázrak. *Je to nádherná věc, ale není to žádný zázrak.* Kdybychom osu drželi zcela vodorovně a najednou ji pustili, pak z jednoduché rovnice precese zjistíme, že se bude otáčet ve vodorovné rovině. Ale to je nemožné! Ačkoli jsme to předtím zanedbali, je pravda, že kolo má *určitý* moment setrvačnosti kolem precesní osy a pohybuje-li se kolem této osy, i když jen pomalu, má malý moment hybnosti vzhledem k této ose. Odkud se vzal? Jsou-li čepy dokonalé, pak není žádný moment síly vzhledem k vertikální ose. Jak to, že *začne* precesní pohyb, jestliže se nezměnil moment hybnosti? Odpověď je následující: Cykloidální pohyb konce osy se utlumí na rovnoměrný pohyb středu myšlené valcíc se kružnice. To znamená, že se ustálí trochu níže. Protože

je níže, rotační moment hybnosti má malou vertikální složku, což je přesně to, co je třeba k přesnému pohybu. Takže rotační osa musela trochu klesnout, aby se mohla začít pohybovat dokola. Musela se trochu poddat gravitaci; tím, že se trochu sklonila, zachovala si rotaci kolem vertikální osy. Tak se tedy pohybuje setrvačnk.

## 20.4 MOMENT HYBNOSTI TUHÉHO TĚLESA

Dříve, než zanecháme trojrozměrné rotace, podíváme se, alespoň kvalitativně, na několik jevů, jež nejsou zcela samozřejmé, a jež se vyskytují při trojrozměrných rotacích. Nejvýraznější zvláštností je to, že obecně moment hybnosti tuhého tělesa *nemá nutně* stejný směr, jako úhlová rychlost. Podíváme se na kolo, které je upevněno šikmo na ose, jež prochází jeho těžištěm (obr. 20.6). Když roztočíme takové kolo kolem osy, každý ví, že se budou chvět ložiska, neboť kolo jsme upevnili šikmo. Kvalitativně víme, že v rotujícím systému působí na kolo odstředivá síla, která se snaží odhodit hmotu kola co nejdál od osy otáčení. Tato síla má tendenci vyrovnat rovinu kola, aby byla kolmá na osu. K překonání této tendence působí ložiska momentem síly. Působí-li ložiska momentem síly, musí docházet k změně momentu hybnosti. Jak se může při prostém otáčení kola kolem osy měnit moment hybnosti? Předpokládejme, že rozložíme úhlovou rychlost  $\omega$  na složky  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , kolmou a podélnou složku s rovinou kola. Čemu je roven moment hybnosti?



Obr. 20.6 Moment hybnosti rotujícího tělesa není nutně rovnoběžný s úhlovou rychlostí

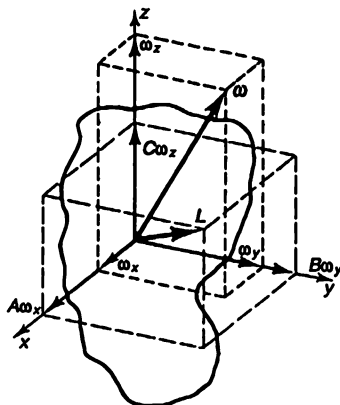
Momenty setrvačnosti vzhledem k těmto osám jsou *rozdílné*, takže složky momentu hybnosti, jež jsou rovny součinům momentů setrvačnosti a příslušné složky úhlové rychlosti, jsou (jen pro takto speciálně zvolené osy) *v jiném poměru* než složky úhlové rychlosti. Vektor momentu hybnosti tedy *nemíří* ve směru osy otáčení kola. Otáčíme-li kolo, otáčíme v prostoru i vektor momentu hybnosti, takže na osu musíme působit momentem síly.

Ačkoli je to příliš komplikované na dokazování, moment setrvačnosti má velmi důležitou a zajímavou vlastnost, kterou lze snadno popsat a používat, a která tvoří základ naší předcházející analýzy. Je to tato vlastnost: Každé tuhé těleso, dokonce i tak nepravidelné jako brambora, má tři navzájem kolmé osy procházející těžištěm, takové, že moment setrvačnosti vzhledem k jedné z nich má *největší možnou* hodnotu z hodnot určených vůči libovolným osám procházejícím těžištěm. Moment setrvačnosti vzhledem k další z nich má *nejmenší možnou* hodnotu a moment setrvačnosti vzhledem k třetí ose má velikost mezi prvními dvěma (nebo je roven některé z nich). Tyto osy se nazývají *hlavními osami* tělesa a mají tu zvláštní vlastnost, že když se těleso otáčí kolem některé z nich, má moment hybnosti stejný směr jako úhlová rychlost. V tělese, které má osy symetrie, míří hlavní osy podél os symetrie.

Ztotožníme-li souřadnicové osy  $x$ ,  $y$ ,  $z$  s hlavními osami a odpovídající hlavní momenty setrvačnosti nazveme  $A$ ,  $B$  a  $C$ , můžeme snadno vypočítat moment hybnosti a kinetickou energii

## ROTACE V PROSTORU

rotujícího tělesa pro jakoukoli úhlovou rychlost  $\omega$ .



Obr. 20.7 Úhlová rychlost a moment hybnosti tuhého tělesa ( $A > B > C$ )

Rozložíme-li  $\omega$  na složky  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  a  $\omega_z$  podél os  $x$ ,  $y$  a  $z$ , můžeme psát moment hybnosti s použitím jednotkových vektorů  $i, j, k$ , směřujících podél  $x, y, z$  jako

$$L = A \omega_x i + B \omega_y j + C \omega_z k. \quad (20.16)$$

Kinetická energie rotace je

$$E_k = \frac{1}{2} (A \omega_x^2 + B \omega_y^2 + C \omega_z^2) = \frac{1}{2} L \cdot \omega. \quad (20.17)$$

# PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 20.1 ■ Pomocí složkového zápisu vektorů nebo nějak jinak dokažte následující vztahy:

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= a \times b + a \times c, & a \times a &= 0, \\ a \times (b \times c) &= b \cdot (a \cdot c) - c \cdot (a \cdot b), & a \cdot (b \times c) &= (a \times b) \cdot c, \\ (a\alpha) \times b &= \alpha(a \times b), & a \cdot (a \times b) &= 0. \end{aligned}$$

- 20.2 ■ Tuhé těleso rotuje úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem nějaké pevné osy. Ukažte, že rychlost libovolného bodu  $P$  tohoto tělesa je rovna  $v = \omega \times r$ , kde  $r$  je vektor vedený z libovolně vybraného bodu na ose do daného bodu.

- 20.3 ■ Tuhé těleso se nejprve pootočí o velmi malý úhel  $\Delta\vartheta_1$  kolem jedné osy a potom o velmi malý úhel  $\Delta\vartheta_2$  kolem druhé osy, jež protíná první osu v bodě  $O$ . Ukažte, že obecné posunutí libovolného bodu uvažovaného tělesa bude takové, jako kdyby se těleso rovnou pootočilo o určitý malý úhel kolem jedné určité osy. Jak najdeme tuto osu a úhel? Dokažte, že tuhé těleso, které vykonává současně několik rotačních pohybů různými úhlovými rychlostmi kolem různých os se pohybuje tak, jako kdyby mělo jen jednu úhlovou rychlost rovnou vektorovému součtu všech úhlových rychlostí. (Každou úhlovou rychlost můžeme považovat za vektor o velikosti  $\omega$  a směru osy rotace v pravotočivém smyslu.)

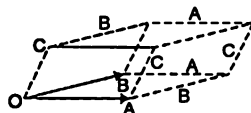
- 20.4 ■ Soustava  $N$  částic o hmotnostech  $m_i$ , polohových vektorech  $r_i$  a rychlostech  $v_i$  má moment hybnosti roven

$$L = \sum_{i=1}^N (r_i \times p_i) = \sum_i m_i (r_i \times v_i).$$

Budeme-li uvažovat soustavu souřadnic pevně spojenou s hmotným středem, můžeme mít za to, že soustava částic má moment hybnosti  $L_T$ . Nechť  $R_T$  a  $v_T$  jsou poloha a rychlost hotného středu a  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  celková hmotnost soustavy částic. Ukažte, že platí  $L = L_T + M(R_T \times v_T)$ .

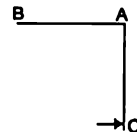
Výsledek srovnajte v řešení úlohy 11.9.

- 20.5 ■ Libovolné tři vektory  $A$ ,  $B$  a  $C$ , které neleží v rovině, nám tvoří tuhé těleso ohraničené šesti po dvojicích rovnoběžnými stěnami zvané rovnoběžnostěn. Ukažte, že objem tohoto tělesa (viz obrázek) je roven  $V = |A \cdot (B \times C)|$ .



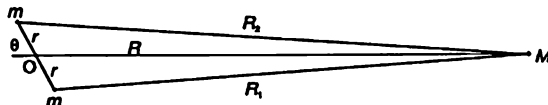
Rovnoběžnostěn má jeden vrchol v počátku soustavy souřadnic a tři sousední vrcholy v bodech  $(10, -5, 3)$ ,  $(3, -4, 7)$  a  $(-5, -6, 3)$  (v kartézské soustavě souřadnic  $x, y, z$ ). Čemu je roven objem tohoto rovnoběžnostěnu?

- 20.6 ■ Dvě homogenní stejné tuhé tyče  $AB$  a  $AC$  jsou spojeny v bodě  $A$  ( $AC \perp AB$ ) a přemisťují se na hladkém vodorovném stole (viz obrázek). V bodě  $C$  kolmo k  $AC$  dojde k vodorovnému nárazu. Najděte poměr rychlostí těžišť tyčí  $AB$  a  $AC$  bezprostředně po nárazu.



- 20.7 ■ Setrvačnick ve tvaru homogenní tenké kruhové destičky hmotnosti  $10,0$  kg a poloměru  $1$  m je namontován na ose, která prochází jeho těžištěm a svírá úhel  $1^\circ$  s kolmicí k rovině destičky. Roztočíme-li setrvačnick kolem této osy úhlovou rychlostí  $25,0$  rad/s, čemu bude roven moment silové dvojice působící v ložiskách?

- 20.8 ■ Dvě tělesa stejných hmotností  $m$  jsou spojena tuhou nehmotnou tyčí ve vzájemné vzdálenosti  $2r$  a jsou přitahována tělesem o hmotnosti  $M$  ve vzdálenosti  $R \gg r$  od středu tyče. Tyč svírá úhel  $\theta$  se směrem  $R$ . Najděte přibližnou velikost působícího momentu sil vzhledem ke středu tyče (viz obrázek).



- 20.9 ■ Měsíc i Slunce působí na Zemi silovým momentem, protože Země je zlehka zploštěná. Které z těchto těles vyvolává větší moment a kolikrát asi? Použijte výsledek předchozí úlohy.

- 20.10 ■ Rovníkový a polární poloměr Země jsou rovny 6378,388 km a 6356,912 km. Hustota Země  $\rho$  v různých hloubkách  $h$  měřená od povrchu Země je uvedena dále (hvězdičkou jsou označeny skoky hustoty):

$h, \text{ km}$	0	30*	100	200	400	1000	2000	2900*	3500	5000*	6000
$\rho, \text{ g/cm}^3$	2,60	3,0	3,4	3,5	3,6	4,7	5,2	5,7	10,2	11,5	17,1
		3,3						9,4		16,8	

Pomocí těchto údajů odhadněte a) moment setrvačnosti Země, b) moment hybnosti zemské rotace. c) kinetickou energii zemské rotace.

- 20.11 ■ 1) Symetrické těleso se začíná valit bez prokluzování dolů po nakloněné rovině z výšky  $h$ . Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející jeho těžištěm je  $I$ , hmotnost tělesa  $M$  a poloměr povrchové plochy, jež je v kontaktu s nakloněnou rovinou,  $r$ . Určete rychlost posuvného pohybu těžiště u paty nakloněné roviny.  
2) Použijte získaný obecný výraz k určení rychlosti těžiště  
a) koule,  
b) kotouče,  
c) kotouče o hmotnosti  $M_1$  s vnějším poloměrem  $R_1$  nasazeným na hřídel o hmotnosti  $m_2$  a o poloměru  $r_2$ .

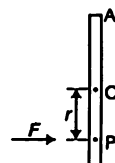
- 20.12 ■ Tenká tyč o hmotnosti  $M$  a délky  $l$  leží na vodorovné dokonale hladké ploše. Kousek plastelíny téže hmotnosti narazí rychlostí  $v$  směrující kolmo k tyči na jeden její konec a přilepí se. Jde o nepružný krátkodobý ráz (viz obrázek).



- a) Jaká je rychlost těžiště této soustavy před a po nárazu?  
b) Jaký je moment hybnosti soustavy vzhledem k jejímu těžišti těsně před nárazem?  
c) Jaká je úhlová rychlost tyče s plastelínou vzhledem k těžišti těsně po nárazu?  
d) Oč se zmenší kinetická energie soustavy při nárazu?

- 20.13 ■ Kdyby všechen led na Zemi roztál, střední výška hladiny světového oceánu by se zvedla přibližně o 61 m. Uvažujte střední zeměpisnou šířku zaledněné oblasti  $80^\circ$ , zanedbejte nerovnoměrné rozložení oceánů na zemském povrchu a vypočítejte, o kolik sekund by se přitom prodloužil den. Představujte si Zemi jako kouli s poloměrem 6370 km s momentem setrvačnosti  $8,11 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

- 20.14 ■ Homogenní tyč délky  $l$  o hmotnosti  $M$  leží nehybně na vodorovné dokonale hladké ploše. Během krátkého časového intervalu na ni v bodě  $P$  ( $OP = r$ ) působí impuls síly  $J = \int F dt$  (viz obrázek).



- a) Čemu je rovna rychlost těžiště  $O$  těsně po nárazu? Čemu je rovna úhlová rychlost vzhledem k bodu  $O$ ? Jaká je okamžitá rychlost bodu  $A$  na opačném konci tyče?  
b) Určete vzdálenost  $AP$ , při níž by rychlost bodu  $A$  těsně po nárazu byla nulová.

# Harmonický oscilátor

---

## 21.1 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

## 21.2 HARMONICKÝ OSCILÁTOR

## 21.3 HARMONICKÝ POHYB A POHYB PO KRUŽNICI

## 21.4 POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

## 21.5 NUCENÉ KMITY

### 21.1 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Kurz studia fyziky se obvykle dělí na tématické části jako například mechanika, elektřina, optika atd., přičemž se studují jedna za druhou. Například v našem kurzu jsme se zatím většinou zabývali mechanikou. Znovu a znovu se však stává podivná věc: rovnice, jež se objevují v různých odvětvích fyziky, a dokonce i v jiných vědách, jsou často téměř stejné. Mnohé jevy mají proto své analogie v těchto různých odvětvích. Jako jednoduchý příklad uveďme, že šíření zvukových vln je v mnohém podobné šíření světelných vln. Při podrobném studiu akustiky zjistíme, že studujeme téměř totéž, jako kdybychom se podrobně zabývali studiem optiky. Studium nějakého jevu v jedné oblasti tak může rozšířit naše vědomosti v jiné oblasti. Nejlépe bude, když si od začátku uvědomíme, že takováto rozšíření jsou možná, neboť jinak by možná někdo neviděl důvod, proč ztrácet čas a energii s něčím, co se zdá být jen malou částí mechaniky.

Harmonický oscilátor, který se chystáme studovat, má blízké analogie v mnoha jiných odvětvích. Ať už začneme s příkladem závaží na pružině, kyvadla s malou výhylkou nebo jiných mechanických zařízení, studujeme ve skutečnosti určitou *diferenciální rovnici*. Tato rovnice se ve fyzice i v jiných vědách objevuje vždy znovu a znovu. Ve skutečnosti je částí tolika jevů, že její studium si zaslouží naši pozornost. Některé jevy, které popisuje tato rovnice, jsou oscilace tělesa na pružině, oscilace náboje v elektrickém obvodu, oscilace ladičky vytvářející zvukové vlny, vibrace elektronů v atomu vytvářející světelné vlny, rovnice činnosti takového servosystému, jakým je termostat regulující teplotu, komplikované interakce v chemických reakcích, růst kolonie bakterií interagujících s dodávanou potravou a otravnými látkami, které bakterie produkují, lišky, požírající králský žeroucí trávu atd. Všechny tyto jevy probíhají podle rovnic, jež jsou si velmi podobné, a to je důvod, proč se tak podrobně zabýváme mechanickým oscilátorem. Tyto



rovnice jsou *lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty*. Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je rovnice, která se skládá ze součtu více členů, přičemž každý člen je derivací závisle proměnné podle nezávisle proměnné vynásobený nějakou konstantou. Takže

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (21.1)$$

se nazývá lineární diferenciální rovnicí  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty (každé  $a_i$  je konstanta).

## 21.2 HARMONICKÝ OSCILÁTOR

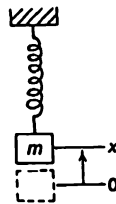
Snad nejjednodušším mechanickým systémem, který se při svém pohybu řídí lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty, je těleso zavěšené na pružině. Pružina se nejdříve napne, aby vyvážila tíhu tělesa. Když nastane rovnováha, zajímáme se o vertikální výchylky tělesa z rovnovážné polohy (*obr. 21.1*). Posunutí směrem nahoru označíme  $x$  a budeme předpokládat, že pružina je dokonale lineární. V takovém případě síla, jíž působí pružina, když ji natáhneme, je přímo úměrná výchylce, tj. síla je rovna  $-kx$  (se znaménkem mínus, neboť síla působí opačným směrem než posunutí). Takže hmotnost tělesa krát jeho zrychlení je rovno  $-kx$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (21.2)$$

Pro jednoduchost předpokládejme (nebo můžeme vhodně změnit jednotky času), že podíl  $k/m = 1$ . Nejdříve se budeme zabývat rovnicí

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x, \quad (21.3)$$

ale později se vrátíme k rovnici (21.2) s explicitně zapsanými  $k$  a  $m$ .



Obr. 21.1 Těleso upevněné na pružině – jednoduchý příklad harmonického oscilátoru

Numerickou analýzu rovnice (21.3) jsme provedli již tehdy, kdy jsme se poprvé začali zabývat mechanikou. Tuto rovnici (9.12) jsme řešili, abychom našli pohyb. Pomocí numerické integrace jsme dostali křivku (*obr. 9.4*), podle níž, bylo-li  $m$  na začátku vychýleno, ale jinak v klidu, se začne pohybovat směrem dolů a projde nulovou polohou. Dále jsme jeho pohyb nesledovali, ale samozřejmě víme, že se pohybuje směrem nahoru a dolů – že *osciluje*. Při numerických výpočtech

jsme zjistili, že rovnovážnou polohou prošla křivka v bodě  $t = 1,570$ . Délka celého cyklu je čtyřikrát větší,  $T_0 = 6,28$  „s“ (v našich časových jednotkách). To jsme zjistili numericky, dokud jsme ještě neznali infinitezimální počet. Předpokládáme, že mezi tím vás na přednáškách z matematiky seznámili s funkcí, která se po dvojnásobném derivování zreprodukuje se znaménkem mfnus. (Samozřejmě, existují způsoby, jak tuto funkci najít přímo, ale ty jsou složitější, než když řešení jednoduše přijmeme.) Jde o  $x = \cos t$ . Zderivujeme-li ji, najdeme  $dx/dt = -\sin t$  a  $d^2x/dt^2 = -\cos t = -x$ . Funkce  $x = \cos t$  má v bodě  $t = 0$  počáteční hodnotu 1 a počáteční rychlost je rovna nule. S takovými počátečními podmínkami jsme začali naši numerickou analýzu. Nyní, když víme, že  $x = \cos t$ , můžeme vypočítat přesnou hodnotu času, za který projde bodem  $x = 0$ . Odpověď je:  $t = \pi/2$  nebo 1,57108. V důsledku chyb při numerické analýze jsme se zmylili v poslední číslici, ale byla to velmi blízká hodnota!

Abychom se dostali dále při řešení problémů, vrátíme se s jednotkami času ke skutečným sekundám. Jaké je potom řešení? Na začátku se můžeme domnívat, že konstanty  $k$  a  $m$  se nám podaří zahrnout, jestliže  $\cos t$  něčím vynásobíme. Zkusme tedy  $x = A \cos t$ . Potom  $dx/dt = -A \sin t$  a  $d^2x/dt^2 = -A \cos t = -x$ .

K našemu překvapení vidíme, že jsme neuspěli v řešení rovnice (21.2), ale znovu jsme dostali rovnici (21.3)! Tato skutečnost je ilustrací jedné z nejdůležitějších vlastností lineárních rovnic: *Vynásobíme-li nějaké řešení libovolnou konstantou, dostaneme znovu řešení téže rovnice.* Matematický důvod je jasný. Je-li  $x$  řešením a vynásobíme-li obě strany rovnice  $A$ , pak všechny derivace jsou vynásobeny  $A$ , a proto  $Ax$  je právě tak dobré řešení, jako bylo  $x$ . Fyzikální důvod je takový: Stáhneme-li závaží zavěšené na pružině dolů dvakrát tak daleko než dříve, síla je dvojnásobná, výsledné zrychlení je dvojnásobné, rychlost získaná za danou dobu je dvojnásobná a vzdálenost prošlá za danou dobu je dvojnásobná. Ale těleso *musí* projít dvojnásobnou vzdáleností, aby se dostalo zpět do počátku, protože jsme ho na začátku vychýlili dvakrát tak daleko. Takže do počátku se vrátí za stejnou dobu, bez ohledu na velikost počáteční výchylky. Jinými slovy: Pohyb popsaný lineární rovnicí má stejný časový průběh bez ohledu na to, jak velkou silou byl vyvolán.

Neprovedli jsme správnou úpravu – jen jsme se poučili, že řešení můžeme vynásobit jakoukoli konstantou a bude vyhovovat stejné rovnici, avšak ne jiné rovnici. Po takovýchto pokusech s násobením  $x$  nějakou konstantou zjišťujeme, že musíme změnit časové měřítko. Jinak řečeno, rovnice (21.2) má řešení ve tvaru

$$x = \cos \omega_0 t. \quad (21.4)$$

(Je důležité si uvědomit, že v tomto případě  $\omega_0$  není úhlovou rychlostí rotujícího tělesa, ale kdybychom nesměli použít stejné písmeno k označení více než jedné věci, neměli bychom dost písmen.) Důvod, proč jsme označili  $\omega$  indexem nula je ten, že za chvíli budeme mít více symbolů  $\omega$ . Zapamatujte si, že  $\omega_0$  odpovídá přirozenému pohybu oscilátoru. Nyní zkusme dosadit do rovnice (21.4). Jsme na tom lépe, neboť  $dx/dt = -\omega_0 \sin \omega_0 t$  a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 x.$$

Takže na konec jsme přece jen vyřešili rovnici, kterou jsme chtěli řešit. Rovnice  $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 x$  je stejná jako rovnice (21.2), jestliže  $\omega_0^2 = k/m$ .

Dále musíme prozkoumat fyzikální význam  $\omega_0$ . Víme, že funkce kosinus se opakuje s periodou  $2\pi$ . Takže  $x = \cos \omega_0 t$  bude opakovat stejný pohyb (projde celým cyklem), změní-li se „úhel“ o  $2\pi$ . Veličina  $\omega_0 t$  se často nazývá *fáze* pohybu. Abychom změnili  $\omega_0 t$  o  $2\pi$ , musíme čas změnit

## HARMONICKÝ OSCILÁTOR

o hodnotu  $T_0$ , která se nazývá *periodou* jedné úplné oscilace. Samozřejmě musí platit, že  $\omega_0 T_0 = 2\pi$ , tj.  $\omega_0 T_0$  musí odpovídat jednomu cyklu úhlové proměnné a všechno se zopakuje, zvětšíme-li  $t$  o  $T_0$  a fázi o  $2\pi$ . Takže

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (21.5)$$

Budeme-li mít těžší závaží, budou oscilace pružiny trvat déle. Je to proto, že závaží má větší setrvačnou hmotnost a protože síly jsou stejné, potrvá déle, než se závaží rozhýbe. Bude-li pružina silnější, bude pohyb rychlejší, a to souhlasí: Je-li pružina silnější, perioda se zkracuje.

Všimněme si, že perioda kmitu závaží na pružině nezávisí na tom, *jak* pohyb začal, jak daleko pružinu vychýlíme. *Perioda* oscilací je určena rovnicí pohybu (21.2), ale *není* určena amplituda. Ta je *určena* tím, jak pohyb začneme, tím čemu říkáme *počáteční podmínky*.

Ve skutečnosti jsme ještě nenašli nejobecnější možné řešení rovnice (21.2). Existují i jiná řešení. Je jasné proč – všechny případy popsané  $x = a \cos \omega_0 t$  začínají s počátečním posunutím a nulovou počáteční rychlostí. Ale pohyb například může začít, když je  $x = 0$  a tělesu dodáme úderem rychlost v čase  $t = 0$ . Takový pohyb není popsán kosinem, ale sinem. Jinak lze problém formulovat i takto: Je-li  $x = \cos \omega_0 t$  řešením, pak není zřejmé, zda bude pohyb stejný i tehdy, kdy náhodou vejdemo do místnosti v nějakém okamžiku (který nazveme „ $t = 0$ “) a uvidíme těleso jak právě prochází polohou  $x = 0$ . Proto  $x = \cos \omega_0 t$  nemůže být nejobecnějším řešením, musí být možné posunout začátek času. Jako příklad můžeme řešení napsat takto:  $x = a \cos \omega_0 (t - t_1)$ , kde  $t_1$  je nějaká konstanta. To odpovídá posunutí začátku času do nějakého jiného okamžiku. Dále můžeme psát

$$\cos(\omega_0 t + \Delta) = \cos \omega_0 t \cos \Delta - \sin \omega_0 t \sin \Delta$$

a

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

kde  $A = a \cos \Delta$  a  $B = -a \sin \Delta$ . Libovolný z těchto tvarů lze použít k zápisu obecného řešení rovnice (21.2), tj. každé řešení diferenciální rovnice  $d^2 x / dt^2 = -\omega_0^2 x$ , které existuje, lze napsat jako

$$a) \quad x = a \cos \omega_0 (t - t_1)$$

nebo

$$b) \quad x = a \cos(\omega_0 t + \Delta) \quad (21.6)$$

nebo

$$c) \quad x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Některé veličiny v (21.6) mají svůj název:  $\omega_0$  se nazývá *úhlovou frekvencí*, je to počet radiánů, o které se fáze změní za sekundu. Je určena diferenciální rovnicí. Ostatní konstanty nejsou určeny diferenciální rovnicí, ale počátečními podmínkami. Z těchto konstant udává  $a$  maximální dosaženou výchylku a nazývá se *amplitudou* kmitů. Konstantě  $\Delta$  se někdy říká *fáze* oscilací, ale to je nedorozumění, neboť jinak se fáze nazývá  $\omega_0 t + \Delta$ , přičemž se fáze mění v závislosti na čase.  $\Delta$  můžeme nazvat *fázovým posunem* od nějaké definované nulové fáze. Řekněme to jinak – různá  $\Delta$  odpovídají pohybům v různých fázích. Tak je to správně, ale jestli si můžeme nebo nemůžeme dovolit nazvat  $\Delta$  *fází*, to je jiná otázka.

### 21.3 HARMONICKÝ POHYB A POHYB PO KRUŽNICI

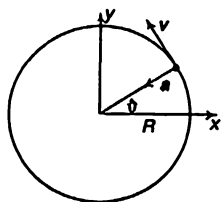
Skutečnost, že řešení rovnice (21.2) obsahuje kosinus, svědčí o tom, že tu může být nějaká souvislost s kružnicemi. Samozřejmě, je to umělá souvislost, neboť v lineárním pohybu se kružnice nevyskytují – je to prostě pohyb sem a tam. Mohli bychom poukázat na to, že tuto diferenciální rovnici jsme vlastně již vyřešili při studiu mechaniky pohybu po kružnici. Vykonává-li částice pohyb po kružnici konstantní rychlostí  $v$ , otáčí se polohový vektor spojující střed kružnice s částicí o úhel, jehož velikost se zvětšuje úměrně s časem. Nazveme-li tento úhel  $\vartheta = vt/R$  (obr. 21.2), pak  $d\vartheta/dt = \omega_0 = v/R$ . Přitom působí dostředivé zrychlení  $a = v^2/R = \omega_0^2 R$ . V jakémkoli okamžiku je souřadnice  $x$  rovna poloměru krát  $\cos \vartheta$  a souřadnice  $y$  je rovna součinu poloměru a  $\sin \vartheta$

$$x = R \cos \vartheta, \quad y = R \sin \vartheta.$$

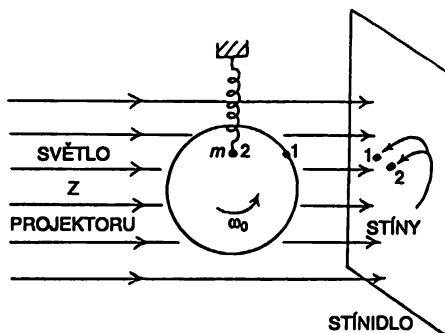
A co se zrychlením? Čemu je rovna  $x$ -ová složka zrychlení  $d^2x/dt^2$ ? Geometricky jsme si již odvodili, že je rovna velikosti zrychlení vynásobené kosinem prošlého úhlu se záporným znaménkem, neboť směřuje do středu

$$a_x = -a \cos \vartheta = -\omega^2 R \cos \vartheta = -\omega^2 x. \quad (21.7)$$

Jinak řečeno, koná-li částice pohyb po kružnici, má horizontální složku pohybu zrychlení, jež je úměrné horizontální vzdálenosti od středu. Samozřejmě známe i řešení pohybu po kružnici:  $x = R \cos \omega_0 t$ . Rovnice (21.7) nezávisí na poloměru kružnice, proto pro jakoukoli kružnici máme stejné řešení při daném  $\omega_0$ . Na základě různých důvodů můžeme očekávat, že velikost výchylky závaží na pružině bude úměrná  $\cos \omega_0 t$  a bude to představovat stejný pohyb, jaký bychom viděli, kdybychom se dívali na  $x$ -ovou složku polohy tělesa obhájícího po kružnici úhlovou rychlostí  $\omega_0$ . Jako důkaz lze experimentálně ověřit, že pohyb závaží zavěšeného na pružině směrem nahoru a dolů je při pohledu ze strany stejný jako pohyb po kružnici. Na obr. 21.3 se stůny knoflíku na klíče kola a závaží svisle kmitajícího na pružině pohybují souběžně. Rozkmitáme-li závaží ve správném okamžiku ze správné polohy a jsou-li obrátky kola nastaveny tak, aby frekvence obou pohybů souhlasily, pak se budou oba stůny pohybovat současně. Stejně lze porovnat numerické řešení, které jsme našli předtím s funkcí kosinus a přesvědčit se, zda souhlasí.



Obr. 21.2 Částice pohybující se po kruhové dráze konstantní rychlostí



Obr. 21.3 Demonstrace ekvivalence jednoduchého harmonického pohybu a rovnoměrného pohybu po kružnici

Na tomto místě můžeme poznamenat, že když je rovnoměrný pohyb po kružnici tak úzce spjat s kmitavým pohybem, můžeme kmitavý pohyb popsat jednodušeji jako projekci pohybu hmotného bodu po kružnici. Jinak řečeno, i když vzdálenost  $y$  v případě oscilátoru nemá význam, můžeme rovnici (21.2) napsat i pro  $y$  a obě rovnice spojit. To nám umožní provést analýzu našeho jednorozměrného oscilátoru pomocí znalostí pohybů po kružnici, což je mnohem snadnější, než kdybychom museli řešit příslušnou diferenciální rovnici. To lze provést použitím komplexních čísel, což si ukážeme v následující kapitole.

## 21.4 POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

Nyní se zamysleme nad tím, co určuje konstanty  $A$  a  $B$  nebo  $a$  a  $\Delta$ . Tyto konstanty jsou určeny tím, jak začne pohyb. Uvedeme-li závaží do pohybu tak, že ho trochu vychýlíme, máme jeden druh oscilací. Vychýlíme-li ho nejdříve a při pouštění postrčíme, dostaneme zase jiný pohyb. Konstanty  $A$  a  $B$  nebo  $a$  a  $\Delta$  jsou určeny tím, jak pohyb začal a ničím jiným, tj. takzvanými *počátečními podmínkami*. Ukážeme si, jak počáteční podmínky souvisí s těmito konstantami. Ačkoli bychom k tomu mohli použít jakýkoli z tvarů (21.6), nejsnadnější to je s tvarem (21.6c). Předpokládejme, že v čase  $t=0$  jsme pohyb začali s počáteční výchylkou  $x_0$  a rychlostí  $v_0$ . To je nejobecnější způsob, jak může pohyb začít. (Počáteční *zrychlení* nemůžeme zadat, neboť to je dáno vlastností pružiny, jakmile známe  $x_0$ ). Nyní vypočítejme  $A$  a  $B$ . Začneme s rovnicí pro  $x$

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Protože později budeme potřebovat i rychlost, zderivujeme  $x$  a dostaneme

$$v = -\omega_0 A \sin \omega_0 t + \omega_0 B \cos \omega_0 t.$$

Tyto vztahy platí pro každé  $t$ , ale my známe  $x$  a  $v$  v okamžiku  $t=0$ . Dosadíme-li do těchto rovnic  $t=0$ , na levé straně budeme mít  $x_0$  a  $v_0$ , tj. hodnoty pro  $x$  a  $v$  v okamžiku  $t=0$ . Víme, že kosinus nuly je jedna a sinus nuly je nula, a tak

$$x_0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A$$

a

$$v_0 = -\omega_0 A \cdot 0 + \omega_0 B \cdot 1 = \omega_0 B,$$

takže pro tento zvláštní případ platí

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Z hodnot  $A$  a  $B$  můžeme vypočítat  $a$  a  $\Delta$ , chceme-li.

Tím máme problém vyřešen, ale je tu ještě jedna fyzikálně zajímavá věc, kterou bychom měli ověřit, a to zachování energie. Protože nedochází ke ztrátám třením, energie by se měla zachovávat. Použijeme vztahy

$$x = a \cos(\omega_0 t + \Delta), \quad v = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \Delta).$$

Vypočítejme kinetickou a potenciální energii. Potenciální energie v kterémkoli okamžiku je  $1/2 kx^2$ , kde  $x$  je výchylka a  $k$  tuhost pružiny. Dosadíme-li za  $x$ , máme

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega_0 t + \Delta).$$

Je vidět, že potenciální energie není konstantní. Nikdy není záporná, což je přirozené, neboť v pružině je vždy nějaká energie, ale její velikost se mění s  $x$ . Na druhé straně, kinetická energie je rovna  $(1/2) mv^2$  a dosazením za  $v$  máme

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_0 t + \Delta).$$

Pro maximální  $x$  je kinetická energie rovna nule, neboť rychlost je nulová, a v okamžiku, kdy  $x$  prochází nulou, je kinetická energie maximální, neboť tehdy je pohyb nejrychlejší. Tyto změny kinetické energie jsou právě opačné než změny potenciální energie, ale celková energie musí být konstantní. Když si všimneme, že  $k = m\omega_0^2$ , vidíme, že

$$T + U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 [\cos^2(\omega_0 t + \Delta) + \sin^2(\omega_0 t + \Delta)] = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2.$$

Energie je úměrná druhé mocnině amplitudy. Zdvojnásobí-li se amplituda, zvětší se energie čtyřnásobně. Střední potenciální energie je rovna polovině celkové energie a střední kinetická energie je podobně rovna polovině celkové energie.

## 21.5 NUCENÉ KMITY

V dalším textu se budeme zabývat *harmonickým oscilátorem s nucenými kmity*, tj. takovým, na který působí vnější budící síla. Rovnice takového oscilátoru je

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F(t). \quad (21.8)$$

Rádi bychom zjistili, co se bude dít za takových okolností. Vnější budící síla může mít různé závislosti na čase. První závislost, jíž se budeme zabývat, je velmi jednoduchá – budeme předpokládat, že síla se mění harmonicky

$$F(t) = F_0 \cos \omega t. \quad (21.9)$$

Všimněme si však, že toto  $\omega$  se nemusí rovnat  $\omega_0$ ;  $\omega$  máme pod svou kontrolou – buzení může mít různé frekvence. Rovnici (21.8) se pokusíme vyřešit pro zvláštní sílu (21.9). Jaké řešení má rovnice (21.8)? Jedním partikulárním řešením (obecnější případ si probereme později) je

$$x = C \cos \omega t, \quad (21.10)$$

kde je třeba určit  $C$ . Jinak řečeno, můžeme předpokládat, že nutí-li vnější síla těleso pohybovat se sem a tam, pak těleso sleduje působení síly. Ať už je to jakkoli, můžeme to zkusit. Dosadíme (21.10) do (21.8) a máme

$$-m\omega^2 C \cos \omega t = -m\omega_0^2 C \cos \omega t + F_0 \cos \omega t. \quad (21.11)$$

Dosadili jsme i  $k = m\omega_0^2$ , abychom této rovnici nakonec lépe porozuměli. Protože v každém členu je  $\cos \omega t$ , můžeme jím rovnici vydělit a vidíme, že (21.10) je skutečně řešením, za předpokladu, že  $C$  zvolíme správně.  $C$  musí být rovno

$$C = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (21.12)$$

tj. částice  $m$  kmitá se stejnou frekvencí jako síla, ale s amplitudou, která závisí na frekvenci budící síly a na vlastní frekvenci oscilátoru. Za prvé to znamená, že je-li  $\omega$  velmi malé ve srovnání s  $\omega_0$ , pak posunutí a síla mají stejný směr. Na druhé straně, když budeme závaží nutit kmitat velmi rychle, pak (21.12) nám říká, že  $C$  je záporné pro  $\omega$  větší než vlastní frekvence oscilátoru  $\omega_0$  ( $\omega_0$  budeme nazývat vlastní frekvencí harmonického oscilátoru a  $\omega$  budící frekvencí). Při velmi vysoké frekvenci může být jmenovatel velmi velký a amplituda je potom velmi malá.

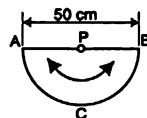
Samozřejmě, řešení, které jsme našli, je vyhovujícím řešením, jen od určitého časového počátku, neboť jinak existuje i takové řešení, které se po chvíli utlumí. Toto druhé řešení se nazývá *přechodovou* odezvou na  $F(t)$ , zatímco (21.10) a (21.12) se nazývají *ustálenou* odezvou.

Podle našeho vztahu (21.22) by se měl vyskytovat pozoruhodný jev: Je-li  $\omega$  téměř stejné jako  $\omega_0$ , blíží se  $C$  k nekonečnu. Proto nastavíme-li frekvenci vnější síly tak, aby byla v souladu s vlastní frekvencí, měli bychom dostat mimořádně velké výchylky. To ví dobře každý, kdo houpal dítě na houpačce. Nešlo by nám to, kdybychom zavřeli oči a houpačku rozhoupávali libovolně určitou frekvencí. Podařilo-li se nám najít správný rytmus, létá houpačka velmi vysoko, máme-li však špatný rytmus, můžeme někdy tlačit, kdybychom správně měli táhnout a podobně – prostě to nejde.

Nastavíme-li  $\omega$  tak, aby bylo přesně rovno  $\omega_0$ , měla by být amplituda oscilátoru *nekonečná*, což je nemožné. Příčinou je to, že naše rovnice tehdy přestane platit. Projeví se dodatečné členy, které odpovídají tření a dalším silám, jež nejsou v rovnici (21.8) zahrnuty, ale které se vyskytují v reálném světě. Proto se amplituda nezvětší z nějakého důvodu do nekonečna. Například proto, že pružina praskne!

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 21.1 ■ Tuhé těleso o hmotnosti  $M$  je volně nasazeno na vodorovnou osu, jež prochází ve vzdálenosti  $d$  od těžiště. Moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace je  $I$  (tření je zanedbatelné).
- Napište diferenciální rovnici, která popisuje změnu úhlu pootočení tělesa  $\vartheta$  s časem. Úhel pootočení odečítejte od rovnovážné polohy tělesa.
  - Vykonává-li těleso malé kmity tak, že  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ , jaká je jejich perioda?
- 21.2 ■ V předchozí úloze je moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm roven  $I_T$ . Najděte výraz pro periodu malých kmitů jako funkci  $d$  a  $I_T$  a ukažte, že
- existují dvě hodnoty  $d_1$ ,  $d_2$ , které odpovídají dané periodě;
  - perioda je rovna  $T = 2\pi \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}}$ ;
  - perioda je minimální, když  $d = \sqrt{\frac{I_T}{M}}$ , a najděte tuto minimální hodnotu periody.
- 21.3 ■ Lineární zavěšená pružina má v nenapjatém stavu délku  $D$  a upevníme-li na její konec závaží o hmotnosti  $m$ , prodlouží se na  $D + A$ . Na závaží, jež je v klidu, dopadne z výšky  $A$  druhé závaží téže hmotnosti a spojí se s ním. Najděte periodu a amplitudu kmitů takové soustavy a maximální výšku (měřeno od původního rovnovážného stavu), jíž bude při takovém pohybu dosaženo.
- 21.4 ■ Dvě částice  $A$  a  $B$  konají harmonický pohyb se stejnou amplitudou 10 cm podél téže přímky. Úhlové frekvence jejich pohybu jsou  $\omega_A = 20 \text{ s}^{-1}$  a  $\omega_B = 21 \text{ s}^{-1}$ . V okamžiku  $t = 0$  obě částice procházejí bodem  $x = 0$  v kladném směru osy  $x$  (jsou ve fázi).
- Jak budou od sebe vzdáleny v okamžiku  $t = 0,350 \text{ s}$ ?
  - Jaká bude v tomto okamžiku jejich vzájemná rychlost?
- 21.5 ■ Kostra z homogenního drátu je tvořena polokružnicí  $ABC$  a jejího průměru  $AB$  o délce 50 cm (viz obrázek). Tato kostra je upevněna ve středním bodě svého poloměru  $P$  na hladké osičce tak, že může vykonávat kývavý pohyb bez tření. Určete periodu jejich malých kmitů.





# A

# lgebra

---

## 22.1 SČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ

## 22.2 INVERZNÍ OPERACE

## 22.3 ABSTRAKCE A ZOBECNĚNÍ

## 22.4 APROXIMACE IRACIONÁLNÍCH ČÍSEL

## 22.5 KOMPLEXNÍ ČÍSLA

## 22.6 IMAGINÁRNÍ EXPONENTY

### 22.1 SČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ

Při studiu kmitavých soustav budeme mít příležitost použít jednoho z nejpozoruhodnějších, přímo překvapujících vzorců celé matematiky. Z hlediska fyziky by nám stačilo, abychom tento vzorec během dvou minut uvedli a mohli bychom být spokojeni. Vědu však máme stejně tak pro intelektuální potěšení, jako pro praktické využití, takže místo toho, abychom tomuto vzácnému skvostu věnovali jen několik minut, vložíme ho přiměřeně do velkolepého rámce té části matematiky, jež se nazývá elementární algebrou.

Možná si kladete otázku: „Co dělá matematika na přednáškách z fyziky?“ Máme k tomu několik možných zdůvodnění: Za prvé, je jasné, že *matematika je důležitým nástrojem*, ale to by byl důvod jen k uvedení zmíněného vzorce ve dvou minutách. Na druhé straně, v teoretické fyzice objevujeme, že všechny fyzikální zákony lze napsat v matematické formě, a pocítujeme, že v tom je určitá jednoduchost, a proto i krása. Nakonec, abychom uměli chápat přírodu, může být nevyhnutelné, abychom lépe *cháпали* matematické vztahy. Skutečný důvod je však ten, že je to předmět, který se nám líbí, a ačkoli si my lidé dělíme přírodu různými způsoby a na různých katedrách studujeme různé předměty, takovéto dělení je ve skutečnosti umělé a měli bychom se věnovat tomu, co nás intelektuálně těší, ať to najdeme kdekoli.

Další důvod, proč se nyní chceme podrobněji věnovat algebře, ačkoli většina z nás ji studovala na školách nižšího stupně, je ten, že tehdy jsme ji studovali poprvé; všechny vzorce nám byly neznámé a byla to těžká práce. Taková, jakou máme nyní s fyzikou. Častokrát je nám potěšením podívat se zpět, jakou část předmětu jsme již zvládli a jak vypadá mapa nebo plán studia předmětu jako celku. Snad jednou někdo z katedry matematiky bude přednášet mechaniku takovým způsobem, aby ukázal, co jsme se snažili naučit na přednáškách z fyziky!

Nebudeme se exaktně věnovat algebře z hlediska matematiky, neboť matematici se zajímají zejména o to, jak dokazovat různá matematická tvrzení, kolik předpokladů je absolutně

nevyhnutelných a co není potřebné. O výsledky toho, co dokázali, se už tak nezajímají. Například Pythagorova věta, že součet čtverců nad odvěsnami pravouhelného trojúhelníka je rovna čtverci nad přeponou, se nám může zdát docela zajímavá; je to zajímavý fakt, neobvykle jednoduchá věc, kterou můžeme ocenit, aniž bychom se zabývali problémem jejího důkazu nebo tím, jaké jsou k tomu třeba axiomy. Proto v tomto duchu, můžeme-li to tak říci, kvalitativně popíšeme systém elementární algebry. Hovoříme o *elementární* algebře, neboť existuje takové odvětví matematiky, které se nazývá *moderní* algebra, kde neplatí některá pravidla (například  $ab = ba$ .) Tou se však nebudeme zabývat.

Diskuzi tohoto předmětu začneme od prostředka. Předpokládáme, že už víme, co jsou přirozená čísla, co je nula a co znamená zvětšit nějaké číslo o jednotku. Třeba si řeknete: „To není prostředek, to jsou začátky!“ Ale z matematického hlediska to je „prostředek“, neboť bychom se mohli vrátit ještě dále nazpět k teorii množin a odvodit některé z těchto vlastností přirozených čísel. My však nepůjdeme tímto směrem, směrem matematické filozofie a matematické logiky, ale vyjdeme z předpokladu, že víme, co jsou to přirozená čísla, a že s nimi umíme počítat.

Vyjdeme-li z určitého čísla  $a$  a postupně k němu  $b$ -krát přičteme jednotku, číslo, které dostaneme, nazýváme  $a + b$  a tak se definuje *sčítání* přirozených čísel.

Když už máme definici součtu, můžeme uvažovat takto: Začneme-li z ničeho a přičítáme k tomu  $b$ -krát za sebou  $a$ , výsledek nazýváme *násobením* přirozených čísel;  $a$  krát  $b$ .

Dále můžeme mít i posloupnost *násobení*: Začneme-li s 1 a násobíme ji  $a$   $b$ -krát za sebou, nazýváme to *umocňováním a na mocnitel b tedy*  $a^b$ .

Lze snadno dokázat, že jako výsledek těchto definic platí:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } a + b = b + a & \text{e) } (ab)c = a(bc) & \text{i) } a + 0 = a \\
 \text{b) } a + (b + c) = (a + b) + c & \text{f) } (ab)^c = a^c b^c & \text{j) } a \cdot 1 = a \\
 \text{c) } ab = ba & \text{g) } a^b a^c = a^{(b+c)} & \text{k) } a^1 = a. \\
 \text{d) } a(b + c) = ab + ac & \text{h) } (a^b)^c = a^{(bc)} & \text{(22.1)}
 \end{array}$$

Tyto vztahy jsou nám všechny dobře známé, proto je jen uvádíme. Vidíme, že 1 a 0 mají zvláštní vlastnosti. Například  $a + 0$  je  $a$ ,  $a$  krát 1 =  $a$  a  $a^1$  je  $a$ .

V naší diskuzi musíme předpokládat několik dalších vlastností jako spojitost a uspořádanost, jež lze těžko definovat – to přenecháme rigorózní teorii. Je třeba přiznat, že jsme tu uvedli příliš mnoho „pravidel“. Některá z nich lze odvodit z ostatních, ale tím se nebudeme znepokojovat.

## 22.2 INVERZNÍ OPERACE

K těmto přímým operacím sčítání, násobení a umocňování existují i *inverzní* operace, jež jsou definovány takto: Předpokládejme, že máme dáno  $a$  a  $c$ . Chceme najít hodnoty  $b$ , jež vyhovují takovým rovnicím jako  $a + b = c$ ,  $ab = c$ ,  $b^a = c$ . Je-li  $a + b = c$ , pak  $b$  je definováno jako  $c - a$ , což se nazývá *odečítání*. Operace, kterou nazýváme *dělení*, je rovněž jasná: je-li  $ab = c$ , pak  $b = c/a$  definuje dělení – „obrácené“ řešení rovnice  $ab = c$ . Nyní máme mocninu  $b^a = c$  a klademe si otázku: „Čemu je rovno  $b$ ?“ Přece  $a$ -té odmocnině z  $c$ , tj.  $b = \sqrt[a]{c}$ . Položíme-li si například takovou otázku: „Třetí mocnina kterého čísla je rovna 8?“, odpověď zní – „Třetí odmocnina z 8 je 2.“ Protože  $b^a$  a  $a^b$  si nejsou rovny, jsou s umocňováním spojeny dva inverzní problémy. Druhý inverzní problém je: „Na kterou mocninu musíme umocnit 2, abychom dostali 8?“ Tomu se říká hledání *logaritmu*. Je-li  $a^b = c$ , pak píšeme  $b = \log_a c$ . Fakt, že tento zápis je komplikovanější než

ostatní neznamena, že je méně elementární (alespoň v případě, kdy jde o celá čísla). Ačkoli se logaritmy v algebře vyučují později, ve skutečnosti jsou stejně jednoduché jako odmocniny; představují prostě druh řešení algebraické rovnice. Přímé a inverzní operace lze shrnout následujícím způsobem:

a) sčítání $a + b = c$	a') odečítání $b = c - a$	(22.2)
b) násobení $ab = c$	b') dělení $b = \frac{c}{a}$	
c) mocnina $b^a = c$	c') odmocnina $b = \sqrt[a]{c}$	
d) mocnina $a^b = c$	d') logaritmus $b = \log_a c$	

Zde jsme u jádra věci. Tyto vztahy nebo pravidla platí pro přirozená čísla, neboť vyplývají z definic sčítání, násobení a umocňování. Chceme zjistit, zda *můžeme nebo nemůžeme rozšířit třídu objektů, jež představují  $a$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $c$ , aby pro ně platila stejná pravidla*, ačkoli procesy sčítání  $a + b$  atd. už nebude možno definovat například ve smyslu přímého přičítání 1 nebo postupného násobení přirozenými čísly.

### 22.3 ABSTRAKCE A ZOBECNĚNÍ

Při řešení algebraických rovnic použitím všech těchto definic brzy objevíme neřešitelné problémy, takové, jako je tento: Předpokládejme, že chceme vyřešit rovnici  $b = 3 - 5$ . Znamená to, že podle naší definice odčítání musíme najít číslo, které, když ho přičteme k 5, dává 3. Přirozeně, takové číslo neexistuje, neboť v úvahu bereme jen přirozená čísla – je to neřešitelný problém. Východiskem je však zajímavý plán, velkolepá myšlenka: abstrakce a zobecnění. Z celé struktury algebry (pravidla plus přirozená čísla) abstrahujeme původní definice sčítání a násobení, ale ponecháváme si pravidla (22.1) a (22.2), o nichž budeme předpokládat, že platí pro širší třídu čísel, i když byly původně odvozeny pro užší třídu čísel. Tedy místo toho, abychom použili přirozená čísla k definování pravidel, použijeme tato pravidla k definici symbolů, jež představují nějaký obecnější druh čísel. Například použitím jen samotných pravidel můžeme dokázat, že  $3 - 5 = 0 - 2$ . Skutečně můžeme dokázat, že všechna odčítání lze provést, definujeme-li celou množinu nových čísel:  $0 - 1, 0 - 2, 0 - 3, 0 - 4$  atd., tzv. záporná celá čísla. Pak můžeme uvažovat o všech dalších pravidlech jako  $a(b + c) = ab + ac$  a podobně a zjišťovat jak tato pravidla vypadají pro záporná čísla. Zjistíme, že všechna pravidla jsou platná pro záporná i pro kladná celá čísla.

Takže rozsah objektů, pro něž platí pravidla, jsme zvětšili, ale změnil se význam symbolů.

Nelze například říci, že  $-2$  krát 5 znamená  $-2$  krát přičíst 5. To nemá smysl, ale přesto bude všechno vycházet podle pravidel.

Zajímavý problém vzniká při umocňování. Předpokládejme, že chceme zjistit, co znamená  $a^{(3-5)}$ . Víme jen, že  $3-5$  je řešením úlohy  $(3-5) + 5 = 3$ . Odtud víme, že  $a^{(3-5)} a^5 = a^3$ . Proto podle definice dělení  $a^{(3-5)} = a^3 / a^5$ . Dáme-li si trochu práce, dostaneme výsledek ve tvaru  $1/a^2$ , takže vidíme, že záporné mocniny jsou reciproké ke kladným mocninám, ale symbol  $1/a^2$  zatím nemá smysl, neboť, ať už je  $a$  kladné nebo záporné, jeho druhá mocnina je číslo větší než 1 a ještě nevíme, co se myslí tím, když 1 dělíme číslem větším než 1!

Pojďme dále. Naším plánem je pokračovat v procesu zobecňování. Vždy, když najdeme další problém, který nemůžeme vyřešit, rozšíříme náš číselný obor. Vezměme si dělení: Nemůžeme najít takové celé číslo, dokonce ani záporné celé číslo, jež by bylo výsledkem dělení 3:5. Předpokládáme-li však, že i všechny zlomky splňují daná pravidla, můžeme hovořit o násobení a sčítání zlomků a vše vychází stejně dobře jako předtím.

Vezměme si další příklad s mocninami: Co je  $a^{3/5}$ ? Víme jen, že  $(3/5) 5 = 3$ , neboť to byla definice 3/5. Takže také víme, že  $a^{(3/5)5} = a^3$ , neboť to je jedno z pravidel. Z toho pomocí definice odmocniny zjistíme, že  $a^{(3/5)} = \sqrt[5]{a^3}$ .

Tak můžeme definovat, co znamenají zlomky v různých výrazech – samotná pravidla nám pomáhají určit definice, není v tom libovůle. Je to pozoruhodný fakt, že všechna pravidla stále platí jak pro kladná a záporná celá čísla, tak i pro zlomky!

Pokračujme v procesu zobecňování. Existují nějaké další rovnice, které neumíme vyřešit? Ano, existují. Například nelze vyřešit rovnici  $b = 2^{1/2} = \sqrt{2}$ . Není možné najít takové racionální číslo (zlomek), jehož druhá mocnina je rovna 2. V moderní době je na tuto otázku velmi snadná odpověď. Známe desetinný systém, takže nám nedělají problémy nekonečná desetinná čísla jako způsob aproximace druhé odmocniny ze 2. Historicky to však byl velký problém pro staré Řeky. Skutečně přesná definice toho, o co tu jde, vyžaduje znát něco z podstaty spojitosti a uspořádanosti, a to je na tomto místě právě nejtěžší krok v procesu zobecňování. Formálně a velmi přesně to provedl Dedekind. Avšak, bez obav o matematickou přesnost, můžeme snadno pochopit, co zamýšlíme provést, tj. aproximovat takové číslo celou posloupností desetinných zlomků (neboť každé konečné desetinné číslo je racionální číslo), která se stále více a více přibližuje k hledanému výsledku. To nám pro naše účely postačí, umožní nám to manipulovat s iracionálními čísly i jejich výpočet (jako například čísla  $\sqrt{2}$ ) s libovolnou přesností.

## 22.4 APROXIMACE IRACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Další problém se objeví u iracionálních mocnitelů. Chceme například vědět, čemu je rovno  $10^{\sqrt{2}}$ . Odpověď je v podstatě jednoduchá. Aproximujeme-li  $\sqrt{2}$  desetinným číslem s určitým počtem desetinných míst, pak mocnitel je racionální číslo a předcházející metodou můžeme vypočítat aproximaci čísla  $10^{\sqrt{2}}$ . Dále můžeme desetinné číslo prodloužit o několik desetinných míst (znovu to bude racionální číslo), vypočítat příslušnou odmocninu (tentokrát mnohem vyšší, neboť jmenovatel zlomku je nyní mnohem větší) a dostaneme lepší přiblížení. Samozřejmě odmocniny, které se tu vyskytnou, budou mít vysoké odmocnitele a výpočet bude dost obtížný. Jak se můžeme vypořádat s tímto problémem?

K výpočtu druhé odmocniny, třetí odmocniny a jiných odmocnin nižšího řádu existuje aritmetický postup, pomocí něhož můžeme vypočítat jedno desetinné místo za druhým. Ale námaha, již je třeba vynaložit při počítání iracionálních mocnin a s nimi spojených logaritmů (inverzní problém), je příliš velká, neboť neexistuje jednoduchý aritmetický předpis, který bychom mohli použít. Proto byly sestaveny tabulky, jež nám umožňují počítat takovéto mocniny. Nazývají se tabulky logaritmů nebo tabulky mocnin podle toho, jak jsou sestaveny. Je to jen otázka úspory času. Když máme umocnit nějaké číslo na iracionální mocninu, můžeme si výsledek místo počítání vyhledat. Příslušný výpočet je, samozřejmě, jen technickým problémem, ale je to zajímavý problém s dlouhou historií. V první řadě, nejen že máme problém jak vyřešit  $x = 10^{\sqrt{2}}$ , ale i to, jak vyřešit  $10^x = 2$  neboli  $x = \log_{10} 2$ . Není to problém toho typu, kdy jsme museli zavádět nějaký nový druh čísel; je to čistě počtářský problém. Výsledkem je iracionální číslo s nekonečným počtem desetinných míst a ne nějaký nový druh čísla.

Nyní se zabýváme otázkou řešení takových rovnic. Základní myšlenka je skutečně velmi jednoduchá. Vypočítáme-li  $10^1$ ,  $10^{4/10}$ ,  $10^{1/100}$ ,  $10^{4/1000}$  atd. a vynásobíme-li je navzájem, dostaneme  $10^{1,414\dots}$ , tj.  $10^{\sqrt{2}}$ . To je základní myšlenka výpočtu. Místo počítání  $10^{1/10}$ , atd. však budeme počítat  $10^{1/2}$ ,  $10^{1/4}$  atd. Předtím si však vysvětlíme, proč používáme číslo 10 a ne nějaké jiné číslo. Víme, že logaritmické tabulky jsou velmi užitečné pro praxi, neboť, odhlédneme-li od matematického problému výpočtu odmocnin, platí pro každý základ

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c. \quad (22.3)$$

Všichni víme, že tento vztah lze výhodně použít při výpočtu součinů použitím logaritmických tabulek. Jedinou otázkou je, s jakým základem  $b$  máme počítat? Na tom nezáleží, vždyť tento vztah stále platí a použijeme-li logaritmy s nějakým základem, můžeme logaritmy pro jakýkoli jiný základ najít jednoduše změnou škály – vynásobením nějakým faktorem. Vynásobíme-li rovnici (22.3) číslem 61, pak bude platit stejně; proto výsledek bude stejný, ať použijeme tabulky logaritmů pro základ  $b$  nebo tabulky, kdy všechny logaritmy byly vynásobeny číslem 61. Předpokládejme, že známe logaritmy se základem  $b$  pro všechna čísla, tj. že známe řešení rovnice  $b^a = c$  pro jakékoli  $c$ . Čemu je roven logaritmus stejného čísla při jiném základu, řekněme při základu  $x$ ? Odpověď najdeme řešením rovnice  $x^a = c$ , což provedeme snadno, neboť vždy můžeme psát  $x = b^t$ . Tento vztah nám definuje  $t$  při známém  $x$  a  $b$  takto:  $t = \log_b x$ . Dosadíme-li  $b^t$  za  $x$ , máme  $(b^t)^a = b^{ta} = c$ , jinými slovy,  $ta'$  je logaritmus  $c$  s bází  $b$ , a proto  $a' = a/t$ . Takže logaritmy se základem  $x$  jsou rovny logaritmům se základem  $b$ , jež vynásobíme konstantou  $1/t$ . Libovolné dvě tabulky logaritmů jsou ekvivalentní, vynásobíme-li jednu z nich konstantou  $1/\log_b x$ . To nám umožňuje zvolit si libovolný základ. Z praktických důvodů bereme za základ číslo 10. (Může vzniknout otázka, zda neexistuje nějaký přirozený základ, pro který se věci zjednoduší. Odpověď na tuto otázku se pokusíme najít později. Prozatím budeme používat jako základ číslo 10.)

Podívejme se, jak se počítají logaritmy. Začneme výpočtem postupných odmocnin čísla 10. Výsledky jsou v tab. 22.1. Mocnitelé čísla 10 jsou v prvním sloupci a mocniny  $10^t$  jsou ve třetím sloupci. Máme  $10^1 = 10$ . Deset na jednu polovinu můžeme snadno vypočítat, neboť to je druhá odmocnina z 10 a druhou odmocninu jakéhokoli čísla lze snadno vypočítat.<sup>31)</sup>

Hledaná odmocnina je 3,16228. K čemu je to dobré? Již tento výsledek nám něco řká; známe už alespoň jeden logaritmus; kdybychom potřebovali logaritmus 3,162278, pak víme, že výsledek je velmi blízko k 0,500 00. Potřebujeme se však dostat dále; potřebujeme více informací. Proto najdeme znovu druhou odmocninu, čímž dostaneme  $10^{1/4}$ , což je 1,77828. Nyní známe logaritmus více čísel: 1,250 je logaritmus 17,78 a shodou okolností, chce-li někdo vědět čemu je rovno  $10^{0,75}$ , můžeme to vypočítat, neboť to je  $10^{(0,5 + 0,25)}$ , a tedy je to součin druhého a třetího čísla v tabulce 22.1. Budeme-li mít ve sloupci mocnitelů dostatečně mnoho čísel, abychom z nich mohli zkombinovat téměř každé číslo, můžeme vynásobením příslušných čísel ve třetím sloupci najít libovolnou mocninu 10, a o to nám jde. Najdeme tedy deset opakovaných druhých odmocnin 10 a to je hlavní část našeho výpočtu.

<sup>31)</sup> Existuje k tomu určitý aritmetický algoritmus, ale nejjednodušší způsob, jak najít druhou odmocninu jakéhokoli čísla  $N$ , je vzít si její přibližnou hodnotu  $a$ , najít  $N/a$ , udělat průměr  $a' = 1/2(a + N/a)$  a toto  $a'$  si vzít jako novou hodnotu pro  $a$ . Konvergence je velmi rychlá – počet platných desetinných míst se vždy zdvojnásobí.

Tabulka 22.1 Postupné druhé odmocniny čísla 10

Mocnitel $s$	$1024^s$	$10^s$	$(10^s - 1)/s$
1	1024	10,00000	9,00
1/2	512	3,16228	4,32
1/4	256	1,77828	3,113
1/8	128	1,33352	2,668
1/16	64	1,15478	2,476
1/32	32	1,074607	2,3874
1/64	16	1,036633	2,3445
1/128	8	1,018152	2,3234 <sup>211</sup>
1/256	4	1,0090350	2,3130 <sup>104</sup>
1/512	2	1,0045073	2,3077 <sup>53</sup>
1/1024	1	1,0022511	2,3051 <sup>26</sup>
			↓ <sup>26</sup>
$\Delta / 1024$ ( $\Delta \rightarrow 0$ )	$\Delta$	$1 + ,0022486 \Delta$	$- 2,3025$

Proč nepokračujeme dále ve zvyšování přesnosti tabulky? Protože jsme si něčeho všimli. Umocníme-li 10 na velmi malou mocninu, dostaneme 1 plus malé číslo. Proč je to tak, je jasné, neboť chceme-li z  $10^{1/1000}$  dostat znovu 10, musíme najít tisící mocninu, takže je lépe nezačínat s příliš velkými čísly. Odmocniny s příliš velkými odmocniteli budou blízské jedné. Vidíme, že malá čísla, která jsou přičtena k 1, se začínají zmenšovat, jako kdybychom je vždy vydělili 2. Vidíme, že 1815 přejde na 903, potom na 450, 225 atd. Vypočteme-li tedy další odmocninu, dostaneme 1,00112 ve výborném přiblížení a místo výpočtu všech dalších odmocnin odhadneme konečnou limitu. Čemu bude rovno 10 umocněno na malou část  $\Delta$  z 1024, když se  $\Delta$  blíží k nule? Bude to nějaké malé číslo, blízké 0,0022511  $\Delta$ . Nebude to přesně tato hodnota, ale přesnější hodnotu můžeme určit takovýmto trikem: od  $10^s$  odečteme 1 a vydělíme mocnitelem  $s$ . Tím se všechny malé odchylky od 1 budou blížit ke stejnému číslu. Vidíme, že jsou si velmi blízké. Na začátku čtvrtého sloupce tabulky si sice nejsou rovny, ale jak postupujeme dolů, rozdíl se zmenšují, vždy přibližně na polovinu předcházejícího rozdílu: 211, 104, 53, 26. Kdybychom pokračovali, byly by 13, 7, 3, 2 a 1 nebo dohromady 26. Takže do konečné správné hodnoty nám chybí 26 a taje proto 2,3025. (Později se přesvědčíme, že přesná hodnota má být 2,3026, ale protože jsme realisté, nebudeme na našem výpočtu nic měnit.) Pomocí této tabulky nyní můžeme určit jakoukoli mocninu čísla 10, jestliže exponent vyjádříme jako násobky 1/1024.

Provedme nyní výpočet logaritmu. Použijme postup, pomocí něhož se skutečně sestavovaly logaritmické tabulky. Tento postup je znázorněn v tab. 22.2 a číselné hodnoty jsou vzaty z druhého a třetího sloupce tab. 22.1.

Předpokládejme, že chceme vypočítat logaritmus čísla 2, tj. chceme vědět, na jaký mocnitel musíme umocnit 10, abychom dostali 2. Můžeme umocnit 10 na 1/2? Ne, to je číslo mnohem větší, než 2. Vidíme tedy, že hledaný mocnitel bude větší než 1/4 a menší než 1/2. Vydělíme  $2 \cdot 10^{1/4} = 1,778 \dots$  a dostaneme 1,124... Tím jsme z logaritmu oddělili část rovnou 0,250000. Nyní hledáme logaritmus čísla 1,124... a když ho budeme mít, přičteme k němu 1/4 neboli 256/1024. Dále v najdeme tabulce nejbližší číslo 1,124..., což je číslo 1,074607. Jím budeme dělit a dostaneme 1,046598. Tak zjistíme, že 2 lze napsat jako součin těchto čísel z tab. 22.1:

$$2 = (1,77828) (1,074607) (1,036633) (1,0090350) (1,000573).$$

Tabulka 22.2 Výpočet logaritmu:  $\log_{10} 2$ 

$$\begin{aligned}
2 &: 1,77828 = 1,124682 \\
1,124682 &: 1,074607 = 1,046598 \text{ atd.} \\
2 &= (1,77828)(1,074607)(1,036633)(1,090350)(1,000573) = \\
&= 10^{\left[ \frac{1}{1024} (256 + 32 + 16 + 4 + 0,254) \right]} = 10^{\left[ \frac{308,254}{1024} \right]} = \\
&= 10^{0,30103} \quad \left( \frac{573}{2249} = 0,254 \right) \\
\log_{10} 2 &= 0,30103.
\end{aligned}$$

Poslední číslo 1,000573 je již mimo rozsah naší tabulky. K určení logaritmu tohoto čísla použijeme výsledek, že  $10^{\Delta/1024} \approx 1 + 2,3025 \Delta / 1024$ . Odtud máme  $\Delta = 0,254$ . Proto je třeba 10 umocnit na tuto mocninu:  $(256 + 32 + 16 + 4 + 0,254) / 1024$ . Sečtením dostáváme  $308,254/1024$  a po dělení máme 0,30103, takže  $\log_{10} 2 = 0,30103$ , což je výsledek přesný na 5 desetinných míst!

Tímto způsobem poprvé počítal logaritmy pan Briggs z Halifaxu v r. 1620, který řekl: „Postupně jsem vypočítal 54 druhých odmocnin z čísla  $10^a$ . Víme, že ve skutečnosti počítal jen prvních 27 odmocnin, neboť ostatní lze vypočítat pomocí našeho triku s  $\Delta$ . Druhou odmocninu z 10 počítal postupně 27-krát, což je o sedmáct odmocnin víc, než jsme počítali my, ale dalo mu to mnohem více práce, neboť počítal až na 16 desetinných míst, a když tabulky uveřejnil, zaokrouhlil výsledky na 14 desetinných míst, proto byly bez zaokrouhlovacích chyb. Touto metodou vypočítal logaritmy na 14 desetinných míst, což bylo dost namáhavé, ale všechny logaritmické tabulky, jež byly vydány v průběhu dalších třista let, byly vypůjčeny z Briggsových tabulek, přičemž byl zredukován počet desetinných míst. Jen nedávno byly počtači vypočteny nové tabulky. Dnes existují mnohem efektivnější metody výpočtu logaritmů pomocí rozvoju do nekonečných řad.

V předcházejících výpočtech jsme objevili velmi zajímavou věc, a to, že pro velmi malé mocniny  $\varepsilon$  můžeme  $10^\varepsilon$  vypočítat velmi snadno. Čistě numerickou analýzou jsme zjistili, že  $10^\varepsilon = 1 + 2,3025 \varepsilon$ . Samozřejmě, z toho vyplývá, že pro velmi malé  $n$  je  $10^{n/2,3025} = 1 + n$ . Také víme, že logaritmy vzhledem k jakémukoli jinému základu jsou násobky logaritmů se základem 10. Číslo 10 jsme zvolili jako základ jen proto, že máme 10 prstů a snadněji se nám počítá v desítkové soustavě. Chceme-li však najít matematicky přirozený základ, jenž nemá nic společného s počtem prstů lidských bytostí, můžeme se pokusit vhodně změnit naši škálu logaritmů. Lze to provést tak, že logaritmy se základem 10 se vynásobí 2,3025... To odpovídá novému základu logaritmů, jenž se nazývá přirozeným základem a označuje se  $e$ . Všimněme si, že  $\log_e (1 + n) \approx n$  neboli  $e^n \approx 1 + n$  pro  $n \rightarrow 0$ .

Snadno se zjistí, čemu je  $e$  rovno:  $e = 10^{1/2,3025}$  neboli  $10^{0,434294\dots}$ , je to tedy iracionální mocnina. Naši tabulku postupných druhých odmocnin z 10 můžeme použít nejen k výpočtu logaritmů, ale i libovolných mocnin čísla 10. Vypočtíme tedy, čemu je roven tento přirozený základ  $e$ . Nejdříve přepíšeme číslo 0,434294... jako  $444,73/1024$ . Vidíme, že  $444,73 = 256 + 128 + 32 + 16 + 2 + 0,73$ . Protože máme sumu v exponentu, bude  $e$  součinem čísel

$$(1,77828)(1,33352)(1,074607)(1,036633)(1,018152)(1,009035)(1,001643) = 2,7184.$$

(Jediné číslo, které není v tabulce, je 0,73, ale víme, že je-li  $\Delta$  dostatečně malé, je výsledek roven  $1 + 2,3025 \Delta$ ). Po vynásobení všech čísel máme 2,7184. (Mělo by to být 2,7183, ale i tento

výsledek je dost přesný.) Iracionální mocniny a logaritmy se tedy počítají z takovýchto tabulek. Tak jsme vyřídili iracionální čísla.<sup>32)</sup>

## 22.5 KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Navzdory dosavadní námaze stále neumíme vyřešit všechny rovnice. Například čemu je rovna druhá odmocnina z  $-1$ ? Předpokládejme, že máme řešit rovnici  $x^2 = -1$ . Druhá mocnina žádného racionálního, ani iracionálního čísla, ba ani ničeho, co zatím známe, není rovna  $-1$ . Naše čísla musíme znovu zobecnit a jejich třídu dále rozšířit. Předpokládejme, že řešením rovnice  $x^2 = -1$  je něco, co nazveme  $i$ . Toto „ $i$ “ má definitoricky tu vlastnost, že jeho druhá mocnina je rovna  $-1$ . Je to tak všechno, co o něm můžeme říci. Rovnice  $x^2 = -1$  má však více než jeden kořen. Někdo může řešení napsat jako  $i$ , ale někdo jiný může říci: „Já s tím nesouhlasím, dávám přednost  $-i$ . Moje  $i$  je minus vaše  $i$ “. Také  $-i$  je právě tak dobré řešení; neboť jediná definice  $i$  je, že  $i^2 = -1$ , pak musí platit, že každá rovnice, kterou napíšeme, je stejně správná, jestliže se v ní všude změní znaménko u  $i$ . Tomu se říká komplexní sdružení. Pomocí sčítání čísel  $i$ , jejich násobením číslu, přičítáním dalších čísel apod. podle našich pravidel můžeme vytvořit nová čísla. Tak zjistíme, že čísla lze zapsat ve tvaru  $p + iq$ , kde  $p$  a  $q$  nazýváme *reálná čísla*, tj. čísla, která jsme si definovali dříve. Číslo  $i$  se nazývá *imaginární jednotkou*. Každý reálný násobek čísla  $i$  se nazývá *ryze imaginární číslo*. Nejobecnější číslo  $a$  má tvar  $p + iq$  a nazývá se *komplexní číslo*. Vynásobíme-li například dvě taková čísla, řekněme  $(r + is)$  a  $(p + iq)$ , pak se nic hrozného nestane. Podle našich pravidel dostaneme

$$\begin{aligned}(r + is)(p + iq) &= rp + r(iq) + i(s)p + (is)(iq) \\ &= rp + i(rq) + i(sp) + (ii)(sq) \quad , \\ &= (rp - sq) + i(rq + sp)\end{aligned}\tag{22.4}$$

protože  $ii = i^2 = -1$ . Proto všechna čísla, která vyhovují pravidlům (22.1), mají takovýto matematický tvar.

Třeba řeknete: „Tak bychom mohli pokračovat do nekonečna! Definovali jsme mocniny imaginárních čísel a to, co s tím souvisí, a když už jsme hotovi, někdo přijde s další rovnicí, kterou nelze řešit, jako například  $x^6 + 3x^2 = -2$ , a musíme dělat další zobecnění!“ Ukazuje se však, že s tímto jediným dalším zobecněním ( $i^2 = -1$ ) lze vyřešit všechny algebraické rovnice! Je to fantastický fakt, jehož důkaz přenecháme matematikům. Důkazy jsou velmi pěkné a zajímavé, ale určitě ne samozřejmé. Opravdu nejsamozřejmější by bylo předpokládat, že budeme muset vymýšlet stále nová čísla, ale největším překvapením je, že to není třeba. To je poslední objev a po zavedení komplexních čísel se můžeme přesvědčit, že původní pravidla stále platí i pro komplexní čísla a již nepotřebujeme vymýšlet nová čísla. Umíme vypočítat komplexní mocninu jakéhokoli komplexního čísla; umíme vyřešit jakoukoli algebraickou rovnici a to všechno pomocí konečného počtu takovýchto symbolů. Nenacházíme žádná nová čísla. Například druhá odmocnina z  $i$  má přesný význam, není to něco nového. I mocnina  $i^i$  je definována. Nyní se na to podíváme.

<sup>32)</sup> V dnešní době počítačů a kalkulaček ztratily logaritmické tabulky jako nástroj numerických výpočtů svůj význam. Feynmanovo líčení nám však dává krásnou představu o historické úloze logaritmů a obrovském úsilí, jež museli vynaložit vědci v minulých stoletích při numerických výpočtech. Feynman sám však dokázal právě popsanými metodami a „triky“ nacházet a odhadovat numerické výsledky z paměti tak, že mohl dokonce soutěžit s tzv. „zázračnými počtáři“. (Pozn. red.)



Již jsme ukázali, jak se násobí. Sčítání je též snadné. Sčítáme-li dvě komplexní čísla  $(p + iq)(r + is)$ , výsledek je  $(p + r) + i(q + s)$ . Již víme, jak se čísla sčítají a násobí, ale problémem zůstává, jak vypočítat komplexní mocniny komplexních čísel. Ukazuje se, že to není o nic složitější, než počítání komplexních mocnin reálných čísel. Podívejme se proto, jak lze vypočítat komplexní mocninu čísla 10 (nejen iracionální mocninu, ale  $10^{r+is}$ ). Samozřejmě, stále se musíme přidržovat našich pravidel (22.1) a (22.2). Máme

$$10^{r+is} = 10^r \cdot 10^{is}. \quad (22.5)$$

Již víme jak vypočítat  $10^r$ , násobit něco něčím rovněž dokážeme, proto jediný problém je, jak vypočítat  $10^{is}$ . Nechť je  $10^{is}$  rovno komplexnímu číslu  $x + iy$ . Problém vypadá takto: je třeba najít  $x$  a  $y$  při daném  $s$ . Jestliže

$$10^{is} = x + iy,$$

pak musí platit i komplexně sdružená rovnice

$$10^{-is} = x - iy.$$

(Vidíme, že použitím našich pravidel můžeme odvodit množství výsledků, aniž bychom něco počítali.) Vynásobením odvodíme další zajímavý výsledek

$$10^{is} \cdot 10^{-is} = 10^0 = 1 = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (22.6)$$

Najdeme-li tedy  $x$ , budeme znát i  $y$ .

Problémem zůstává, jak vypočítat imaginární mocninu čísla 10. Existuje k tomu nějaký klíč? Můžeme si pomoci našimi pravidly a dále se nedostaneme; ale existuje tu jeden rozumný nápad. Budeme-li to umět pro nějaké  $s$ , pak to snadno určíme pro všechna ostatní  $s$ . (Známe-li například  $10^{is}$  pro nějaké  $s$  a pak chceme znát takovouto mocninu pro dvojnásobné  $s$ , uděláme z toho druhou mocninu a podobně.) Ale jak najít  $10^{is}$ , i když jen pro jedinou hodnotu  $s$ ? Uděláme proto dodatečný předpoklad, jenž nepatří zcela do kategorie našich ostatních pravidel, ale jenž vede k rozumným výsledkům a umožní nám postup: Je-li mocnitel  $is$  malý, budeme předpokládat, že platí  $10^\epsilon = 1 + 2,3025 \epsilon$  nejen pro malá reálná  $\epsilon$ , ale i pro komplexní  $\epsilon$ . Vyjdeme proto z předpokladu, že obecně platí  $10^{is} = 1 + 2,3025 \cdot is$  pro  $s \rightarrow 0$ . Pak, je-li s velmi malé (řekněme  $1/1024$ ), máme docela dobrou aproximaci čísla  $10^{is}$ .

Nyní sestavíme tabulku, podle níž můžeme vypočítat všechny imaginární mocniny čísla 10, tj. příslušné  $x$  a  $y$ . Začneme tím, že jako první mocnitel vezmeme  $1/1024$ , o němž předpokládáme, že je velmi přesně roven  $1 + 2,3025 i/1024$ , tedy

$$10^{i/1024} = 1,00000 + 0,0022486 i. \quad (22.7)$$

Dalším násobením čísla sebou samým můžeme najít vyšší imaginární mocniny. Proceduru z počítání tabulky pro logaritmy můžeme prostě obrátit a počítáním druhé, čtvrté, osmé atd. mocniny (22.7) najdeme čísla sestavená v tabulce 22.3. Všimněme si zajímavé věci, že hodnoty  $x$  jsou zpočátku kladné a pak záporné. Za malou chvíli se na tuto změnu znaménka podíváme podrobněji, ale nejdříve budeme zvědaví, pro jakou hodnotu  $s$  je reálná část  $10^{is}$  rovna nule.

## IMAGINÁRNÍ EXPONENTY

Přitom podle (22.6) bude mít  $y$  hodnotu  $i$ , proto bude platit  $10^{is} = i$  nebo  $is = \log_{10} i$ . Podobně, jako jsme počítali  $\log_{10} 2$ , použijme nyní *tabulku 22.3* a vypočítejme, čemu je rovno  $\log_{10} i$ !

**Tabulka 22.3** Postupné druhé mocniny čísla  $10^{i/1024} = 1 + 0,0022486 i$

Mocnitel $s$	$1024 s$	$10^{is}$
$i/1024$	1	$1,00000 + 0,00225 i^*$
$i/512$	2	$1,00000 + 0,00450 i$
$i/256$	4	$0,99996 + 0,00900 i$
$i/128$	8	$0,99984 + 0,01800 i$
$i/64$	16	$0,99936 + 0,03599 i$
$i/32$	32	$0,99742 + 0,07193 i$
$i/16$	64	$0,98967 + 0,14349 i$
$i/8$	128	$0,95885 + 0,28402 i$
$i/4$	256	$0,83872 + 0,54467 i$
$i/2$	512	$0,40679 + 0,91365 i$
$i/1$	1024	$-0,66928 + 0,74332 i$
* Má být $0,0022486 i$		

Která čísla z *tabulky 22.3* musíme navzájem vynásobit, abychom dostali ryze imaginární číslo? Po několika pokusech zjistíme, že  $x$  bude nejmenší, když vynásobíme „512“ a „128“. To nám dává  $0,13056 + 0,99144 i$ . Dále zjistíme, že toto číslo musíme vynásobit číslem, jehož imaginární část je přibližně rovna reálné části, kterou chceme odstranit. Proto zvolíme „64“, jehož imaginární část je  $0,14349$ , neboť toto číslo je nejbližší k  $0,13056$ . Dostáváme  $-0,01350 + 0,99993 i$ . To jsme přestřelili, proto musíme dělit  $0,99996 + 0,00900 i$ . Jak se to dělá? Změnou znaménka  $u$  i  $a$  vynásobením  $0,99996 - 0,00900 i$  (což nám pomůže, protože  $x^2 + y^2 = 1$ ). Budeme-li takto pokračovat, zjistíme, že mocnitel, na který je třeba umocnit 10, abychom dostali  $i$ , je  $(512 + 128 + 64 - 4 - 2 + 0,20) i / 1024$  neboli  $698,20 i / 1024$ . Umocníme-li 10 na tento mocnitel, dostaneme  $i$ . Proto  $\log_{10} i = 0,68226 i$ .

## 22.6 IMAGINÁRNÍ EXPONENTY

K dalšímu studiu umocňování na komplexní mocnitele se podíváme na postupné mocniny čísla 10 (máme na mysli zvětšení mocnitele po každém kroku o jednotku a ne jeho zdvojnásobení). Tak se dostaneme dále s *tab. 22.3* a uvidíme, co se bude dít se zápornými znaménky. Vezmeme si  $10^{i/8}$  a vyšší mocniny, jak je uvedeno v *tabulce 22.4*. Vidíme, že  $x$  klesá, projde nulou až téměř k hodnotě  $-1$  (kdybychom měli hodnoty pro  $p$  mezi 10 a 11, zřejmě by se  $x$  dostalo na hodnotu  $-1$ ) a vrací se zpět. Podobně se mění i hodnota pro  $y$ .

Tabulka 22.4 Postupné mocniny čísla  $10^{1/8}$ 

$p$	$10^{p/8}$
0	1,00000 + 0,00000i
1	0,95882 + 0,28402i
2	0,83867 + 0,54465i
3	0,64944 + 0,76042i
4	0,40672 + 0,91356i
5	0,13050 + 0,99146i
6	-0,15647 + 0,98770i
7	-0,43055 + 0,90260i
8	-0,66917 + 0,74315i
9	-0,85268 + 0,52249i
10	-0,96596 + 0,25880i
11	-0,99969 + 0,02602i
12	-0,95104 - 0,30905i
14	-0,62928 - 0,77717i
16	-0,10447 - 0,99453i
18	+0,45454 - 0,89098i
20	+0,86648 - 0,49967i
22	+0,99884 + 0,05287i
24	+0,80890 + 0,58836i

Tečky na obr. 22.1 představují hodnoty z tab. 22.4. Pro lepší představu jsou spojeny čarami. Vidíme, že hodnoty  $x$  a  $y$  oscilují.  $10^{1/8}$  je veličina, která se periodicky opakuje, což lze snadno vysvětlit. Je-li určitá mocnina rovna  $i$ , pak čtvrtá mocnina tohoto čísla bude rovna druhé mocnině  $i^2$ , tj.  $+1$ . Protože  $10^{0,68i} = i$ , dostaneme umocněním na čtvrtou  $10^{2,72i} = +1$ . Proto, kdybychom chtěli vypočítat například  $10^{3,00i}$ , můžeme to psát jako  $10^{2,72i}$  krát  $10^{0,28i}$ . Jinak řečeno,  $10^{1/8}$  má určitou periodu, po níž se opakuje. Samozřejmě, že hned poznáváme, čemu jsou podobné křivky na obr. 22.1. Jsou podobné sinu a kosinu, a proto jim budeme na chvíli říkat algebraický sinus a algebraický kosinus. Místo používání čísla 10 jako základu přejdeme k přirozenému základu, což změní jen horizontální měřítko. Označíme  $2,3025$  jako  $t$  a máme  $10^{1/8} = e^{it}$ , kde  $t$  je reálné číslo. Nyní máme  $e^{it} = x + iy$ , což zapíšeme jako algebraický kosinus  $t$  plus algebraický sinus  $t$

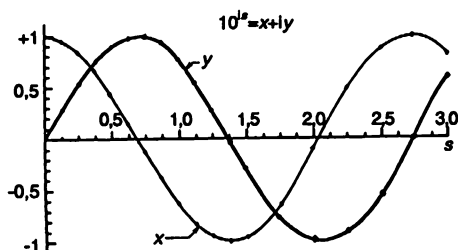
$$e^{it} = \underline{\cos t} + i \underline{\sin t}. \quad (22.8)$$

Jaké vlastnosti mají funkce cos  $t$  a sin  $t$ ? Víme například, že  $x^2 + y^2$  musí být rovno 1. Dokázali jsme to předtím a platí to stejně pro základ  $e$  i pro základ 10. Proto  $\underline{\cos}^2 t + \underline{\sin}^2 t = 1$ . Rovněž víme, že pro malá  $t$   $e^{it} = 1 + it$ , a proto cos  $t$  je přibližně 1 a sin  $t$  je přibližně  $t$ , takže všechny vlastnosti těchto pozoruhodných funkcí, které jsme získali při počítání imaginárních mocnin, jsou stejné jako vlastnosti trigonometrického sinu a kosinu.

Je i perioda stejná? Vypočítejme, na jakou mocninu je třeba umocnit  $e$ , abychom dostali  $i$ ? Jaký je logaritmus  $i$  při základu  $e$ ? Pro základ 10 jsme to již počítali. Bylo by to 0,68226i. Když přejdeme k základu  $e$ , musíme to vynásobit 2,3025, což je 1,5709. Tuto hodnotu budeme nazývat „algebraickým  $\pi/2$ “. Vidíme však, že od správné hodnoty  $\pi/2$  se liší jen na posledním desetinn-

## IMAGINÁRNÍ EXPONENTY

ném místě, což je způsobeno chybami v našich výpočtech! Nejdříve jsme tedy sestrojili čisté algebraickou cestou dvě nové funkce, sinus a kosinus, jež patří do algebry a jen do algebry. Nakonec jsme v nich však objevili právě ty funkce, s nimiž pracujeme v geometrii, takže mezi algebrou a geometrií zcela určitě existuje spojení.



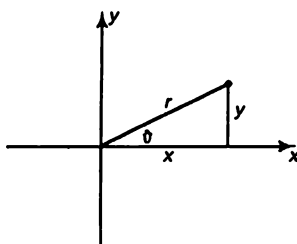
Obr. 22.1

Tuto kapitolu shrneme nejpozoruhodnějším vztahem matematiky

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta. \quad (22.9)$$

To je náš slibovaný skvost.

Geometrii můžeme spojit s algebrou tak, že znázorníme komplexní čísla v rovině. Vodorovná poloha bodu je  $x$ , svislá poloha je  $y$  (obr. 22.2). Tak můžeme zobrazit každé komplexní číslo  $x + iy$ . Nazveme-li radiální vzdálenost bodu  $r$  a úhel  $\vartheta$ , platí algebraický zákon, že  $x + iy$  lze napsat jako  $re^{i\vartheta}$ , přičemž geometrické vztahy mezi  $x$ ,  $y$ ,  $r$  a  $\vartheta$  jsou znázorněny na obrázku. Tak vypadá sjednocení algebry a geometrie.



Obr. 22.2  $x + iy = re^{i\vartheta}$

Na začátku této kapitoly, když jsme byli vyzbrojeni jen základními poznatky o přirozených číslech a tím, jak s nimi počítat, neuvědomovali jsme si sílu metody abstrakce a zobecnění. Použitím soustavy algebraických „zákonů“ nebo vlastností čísel (22.1) a použitím definic inverzních operací (22.2) jsme si sami dokázali vytvořit nejen nové druhy čísel, ale rovněž praktické věci, jako jsou tabulky logaritmů, mocnin a trigonometrických funkcí (což jsou vlastně imaginární mocniny reálných čísel), a to vše z deseti postupných druhých odmocnin desítky.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

Nejobecnějším druhem čísel, která vyhovují pravidlům elementární algebry jsou *čísla komplexní*. Komplexní číslo  $u$  může být zapsáno v podobě součtu reálného čísla  $x$  a imaginárního čísla  $iy$ :  $u = x + iy$ , kde  $i = \sqrt{-1}$  je imaginární jednotka. Každá algebraická rovnice zůstává v platnosti, změníme-li znaménko před  $i$ . Taková operace se nazývá *komplexní sdružení*. Je-li  $u = x + iy$ , komplexně sdružené číslo bude  $u^* = x - iy$ . Podle pravidel algebry komplexních čísel platí

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Veličina  $|u| = \sqrt{uu^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$  se nazývá *modul* čísla  $u$ .

Reálné číslo umocněné na imaginární číslo se stává komplexním číslem s modulem rovným jedné. Když se velikost imaginární mocniny mění, reálná a imaginární část komplexního čísla oscilují podle zákona sinu a kosinu. Zejména

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta. \quad (A)$$

22.1 ■ Do rovnice  $u + iv = (a + ib)(c + id)$  dosadíme  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\frac{d}{c} = \operatorname{tg} \beta$ .

Pomocí vztahu (22.4) a trigonometrických vzorců dokažte, že

a)  $\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$ ,

b)  $\frac{u}{v} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ .

22.2 ■ Řešte předchozí úlohu pomocí výše uvedeného vztahu (A).

22.3 ■ Dokažte, že  $\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$ ,  $\sin \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$ .

22.4 ■ Dokažte, že  $\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd + i(bc - cd)}{c^2 + d^2}$ .

22.5 ■ Funkce  $\operatorname{ch} \vartheta$  a  $\operatorname{sh} \vartheta$  definované vztahy  $\operatorname{ch} \vartheta = \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2}$ ,  $\operatorname{sh} \vartheta = \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{2}$  se nazývají hyperbolický kosinus a hyperbolický sinus úhlu  $\vartheta$ . Dokažte, že  $\cos i\vartheta = \operatorname{ch} \vartheta$ ,  $\sin i\vartheta = i \operatorname{sh} \vartheta$ ,  $\operatorname{ch}^2 \vartheta - \operatorname{sh}^2 \vartheta = 1$ .

22.6 ■ Na základě definice derivace  $\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  dokažte, že  $\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}$ .

22.7 ■ a) Postupným derivováním nebo nějakým jiným způsobem ukažte, že funkce  $e^x$  může být vyjádřena v podobě následující nekonečné řady:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

b) Ukažte, že funkce  $\cos x$  a  $\sin x$  mohou být vyjádřeny v podobě následujících nekonečných řad:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(Tyto řady se často používají při výpočtu funkcí  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$  pro malé argumenty  $x \ll 1$ , i když konvergují při libovolném  $x$ .)

22.8 ■ Najděte všechna algebraická řešení rovnice  $y = \sqrt[n]{1}$ , kde  $n$  je celé číslo.

22.9 ■ Využitím vlastností funkce  $e^{ln\theta}$  a binomické věty dokažte, že

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots$$

22.10 ■ a) Použijte vztah  $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} \cdot e^{i\phi}$  a odvoďte trigonometrické vzorce pro kosinus a sinus součtu dvou úhlů.

b) Podejte geometrickou interpretaci výsledku násobení jednoho komplexního čísla  $Ae^{i\theta}$  druhým komplexním číslem  $Be^{i\phi}$ .

22.11 ■ Najděte  $\log_{11} 2$  a  $\log_{11} 7$  za pomoci následující tabulky  $r$ -tých odmocnin čísla 11:

odmocnitel	$\sqrt[r]{11}$	$\log_{11} \sqrt[r]{11}$
1	11000	100000
2	33166	150000
4	18212	25000
8	13495	12500
16	11617	6667
32	10778	3333
64	10382	1667
128	10189	833

Ověřte výsledek pomocí identity  $\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N$ , kde  $a$  a  $b$  jsou dvě hodnoty základu logaritmů.

# 23

# Rezonance

## 23.1 KOMPLEXNÍ ČÍSLA A HARMONICKÝ POHYB

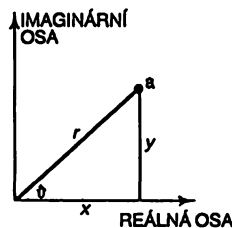
## 23.2 TLUMENÉ NUCENÉ KMITY

## 23.3 REZONANCE V ELEKTRICKÝCH OBVODECH

## 23.4 REZONANCE V PŘÍRODĚ

### 23.1 KOMPLEXNÍ ČÍSLA A HARMONICKÝ POHYB

V této kapitole budeme pokračovat v diskuzi o harmonickém oscilátoru, zejména o harmonickém oscilátoru s nucenými kmity, přičemž v další analýze použijeme novou techniku. V předchozí kapitole jsme zavedli komplexní čísla s reálnou a imaginární částí, která lze znázornit graficky, přičemž na vodorovnou osu se nanáší reálná část a na svislou osu imaginární část. Komplexní číslo  $a$  můžeme zapsat jako  $a = a_r + i a_i$ , kde index  $r$  znamená reálnou část  $a$  a index  $i$  znamená imaginární část  $a$ . Víme, že komplexní číslo  $a = x + iy$  můžeme napsat i ve tvaru  $x + iy = r e^{i\vartheta}$ , kde  $r^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = a a^*$  (obr. 23.1). (Komplexně sdružené číslo  $a^*$  k číslu  $a$  dostaneme, když v  $a$  změníme znaménko u  $i$ .) Komplexní číslo můžeme zapsat v libovolném z těchto dvou tvarů – udáním reálné a imaginární části nebo pomocí modulu  $r$  a fáze  $\vartheta$ . Známe-li  $r$  a  $\vartheta$ , jsou  $x$  a  $y$  rovny  $r \cos \vartheta$  a  $r \sin \vartheta$ , nebo naopak, známe-li komplexní číslo ve tvaru  $x + iy$ , je  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  a  $\text{tg } \vartheta = y/x$  (tj. podíl imaginární a reálné části.)



Obr. 23.1 Komplexní číslo lze znázornit bodem v „komplexní rovině“

Použití komplexních čísel k analýze fyzikálních jevů nám umožní následující trik. Uváděli jsme příklady oscilátorů, buzených vnější silou, která je rovna součinu konstanty  $F_0$  a  $\cos \omega t$ . Takovou sílu lze zapsat jako reálnou část komplexního čísla  $F_0 e^{i\omega t}$ , neboť  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ . Důvod, proč si ji zapíšeme v takovém tvaru, je ten, že s exponenciální funkcí se nám počítá snadněji než s kosinem. Celý trik tedy spočívá v tom, že naše oscilační funkce vyjádříme jako

reálné části určitých komplexních funkcí. Takto definovaná komplexní veličina  $F$  není rovna skutečné fyzikální síle, neboť žádná fyzikální síla není komplexní. Skutečné síly nemají imaginární část, jen reálnou část. Dále však budeme  $F_0 e^{i\omega t}$  nazývat „sílu“, i když je síla ve skutečnosti rovna reálné části tohoto výrazu.

Uvedeme další příklad. Představme si, že takto chceme zapsat sílu s kosinovým průběhem a s fázovým zpožděním  $\Delta$ . Bude to reálná část z  $F_0 e^{i(\omega t - \Delta)}$ , ale exponenciály můžeme napsat jako  $e^{i(\omega t - \Delta)} = e^{i\omega t} e^{-i\Delta}$ . Vidíme, že s exponenciálními funkcemi se počítá podstatně snadněji než s funkcemi sinus a kosinus, a to je důvodem, proč jsme se rozhodli použít komplexní čísla. Často budeme psát

$$F = F_0 e^{-i\Delta} e^{i\omega t} = \hat{F} e^{i\omega t}. \quad (23.1)$$

Malá stříška nad  $F$  nám má připomínat, že jde o komplexní veličinu. V tomto případě

$$\hat{F} = F_0 e^{-i\Delta}.$$

Použijme komplexní čísla k vyřešení nějaké rovnice, abychom se přesvědčili, zda jich lze využít v praktických situacích. Například zkusme vyřešit rovnici

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (23.2)$$

kde  $F$  je budící síla oscilátoru a  $x$  jeho výchylka. Ačkoli se to může zdát absurdní, předpokládejme čistě z matematického hlediska, že  $x$  a  $F$  jsou komplexní čísla, tj., že  $x$  má reálnou a imaginární část, a podobně i  $F$ . Rovnice (23.2) pak bude mít tvar

$$\frac{d^2 (x_r + ix_i)}{dt^2} + \frac{k(x_r + ix_i)}{m} = \frac{F_r + iF_i}{m}$$

neboli

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + \frac{kx_r}{m} + i \left( \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{kx_i}{m} \right) = \frac{F_r}{m} + \frac{iF_i}{m}.$$

Protože dvě komplexní čísla jsou si rovna pouze tehdy, jsou-li si rovny jejich reálné a imaginární části, vyplývá z toho, že *reálná část  $x$  splňuje rovnici s reálnou částí síly*. Musíme zdůraznit, že takové rozdělení na reálnou a imaginární část *neplatí* obecně, ale jen pro *lineární* rovnice, tj. rovnice, kde se  $x$  vyskytuje jen v první nebo nulté mocnině. Kdyby se tam například vyskytoval člen  $\lambda x^2$ , pak bychom po dosazení  $x_r + ix_i$  dostali  $\lambda (x_r + ix_i)^2$  a po rozdělení na reálnou a imaginární část bychom dostali  $\lambda (x_r^2 - x_i^2)$  pro reálnou část a  $2i\lambda x_r x_i$  pro imaginární část. V reálné části by se pak nenacházel jen člen  $\lambda x_r^2$ , ale i  $-\lambda x_i^2$ . V takovém případě bychom dostali jinou rovnici, než je ta, kterou chceme řešit. Rovnici, v níž by bylo přimícháno i  $x_i$ , veličina, kterou jsme do našich úvah zavedli úplně uměle.

Zkusme podle naší nové metody najít řešení, které již známe. Jde o stejnou rovnici (23.2), ale nyní ji zapíšeme jako

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \frac{\hat{F} e^{i\omega t}}{m}, \quad (23.3)$$



kde  $\hat{F}e^{i\omega t}$  je komplexní číslo. Proměnná  $x$  bude rovněž komplexní, přičemž musíme mít na zřeteli pravidlo, že skutečnému průběhu odpovídá reálná část  $x$ . Pokusíme se tedy najít řešení (23.3) odpovídající vynucené síle (ostatní řešení si prodiskutujeme později). Toto řešení má stejnou frekvenci jako budící síla, má nějakou amplitudu a fázi, takže může být také reprezentováno nějakým komplexním číslem  $\hat{x}$ , jehož absolutní hodnota udává průběh  $x$  a fáze časové zpoždění, podobně, jako u budící síly. Nádhernou vlastností exponenciálních funkcí, kterou nyní využijeme, je, že  $d(\hat{x}e^{i\omega t})/dt = i\omega\hat{x}e^{i\omega t}$ . Při diferencování exponenciální funkce se tato prostě násobí koeficientem v exponentu. Druhá derivace se provede stejně, dostaneme součin s dalším  $i\omega$ , takže prostým pohledem můžeme zjistit, jaká rovnice platí pro  $\hat{x}$ : Vždy, když vidíme derivaci, prostě násobíme  $i\omega$ . (Diferencování je nyní tak jednoduché jako násobení! Použití exponenciálních funkcí v lineárních diferenciálních rovnicích je téměř stejně velká myšlenka jako vynález logaritmů, pomocí nichž se násobení nahradí sčítáním. Zde se diferencování nahrazuje násobením). Naše rovnice má pak tvar

$$(i\omega)^2 \hat{x} + \frac{k}{m} \hat{x} = \frac{\hat{F}}{m}. \quad (23.4)$$

(Rovnici jsme dělili společným faktorem  $e^{i\omega t}$ .) Podívejte se, jak to je jednoduché! Diferenciální rovnice lze přeměnit na jednoduché algebraické rovnice. Ihned můžeme napsat řešení  $\hat{x} = \hat{F}/m[(k/m) - \omega^2]$  neboť  $(i\omega)^2 = -\omega^2$ .

Výsledek lze ještě trochu zjednodušit, dosadíme-li  $k/m = \omega_0^2$ , což nám dá

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (23.5)$$

Je to řešení, které jsme našli už dříve. Protože  $m(\omega_0^2 - \omega^2)$  je reálné číslo, jsou fázové úhly  $\hat{F}$  a  $\hat{x}$  stejné (nebo se liší o  $180^\circ$ , jestliže  $\omega^2 > \omega_0^2$ ), jak jsme naznačili již předtím. Absolutní hodnota  $\hat{x}$  určující velikost výchylek souvisí s velikostí  $\hat{F}$  prostřednictvím koeficientu  $1/m(\omega_0^2 - \omega^2)$ , jenž nabývá velmi velkých hodnot pro  $\omega$  přibližně rovno  $\omega_0$ . Proto je odezva na správnou frekvenci  $\omega$  velmi silná. (Uchopíme-li konec závěsu kyvadla a začneme jím kmitat ve správném rytmu, budou kyvy velmi velké.)

## 23.2 TLUMENÉ NUCENÉ KMITY

Provedli jsme analýzu kmitavého pohybu použitím elegantní matematické techniky. Její elegance se však vůbec neprojeví na takovém problému, který lze snadno vyřešit jinými způsoby. Projev se jen tehdy, kdy ji budeme aplikovat na obtížnější problémy. Řešme proto jiný, těžší problém, jenž se více přibližuje ke skutečnosti než předcházející problém. Rovnice (23.5) říká, že kdyby frekvence  $\omega$  byla přesně rovna  $\omega_0$ , dostali bychom nekonečné výchylky. Ty ve skutečnosti nevzniknou, neboť je omezi další vlivy (například tření). K rovnici (23.2) proto přidejme člen vyjadřující tření.

To je v podstatě velmi složitý problém, neboť člen vyjadřující tření je velmi komplikovaný. Za mnoha okolností však platí, že síla tření je *úměrná rychlosti pohybu*. Příkladem takového tření je tření při pomalém pohybu tělesa v oleji nebo v husté tekutině. Je-li těleso v klidu, síla tření na

něj nepůsobí, ale čím rychleji se pohybuje, tím rychleji ho olej obtéká a tím větší je jeho odpor. Proto budeme předpokládat, že v rovnici (23.2) máme navíc k dalším členům ještě sílu tření úměrnou rychlosti:  $F_t = -h dx/dt$ . Pro naši další matematickou analýzu bude vhodné, když konstantu  $h$  napíšeme jako  $m$  krát  $\gamma$ , což nám rovnici trochu zjednoduší. Naše rovnice pak bude mít tvar

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F, \quad (23.6)$$

nebo napíšeme-li  $h = m\gamma$ ,  $k = m\omega_0^2$  a celou rovnici vydělíme  $m$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}. \quad (23.6a)$$

K hledání řešení máme nyní rovnici zapsanou v nejvhodnější formě. Je-li  $\gamma$  velmi malé, znamená to, že tření je slabé; je-li  $\gamma$  velmi velké, je i tření velmi silné. Jak vyřešíme tuto novou lineární diferenciální rovnici? Předpokládejme, že budící síla je rovna  $F_0 \cos(\omega t + \Delta)$ . Mohli bychom dosadit do (23.6a) a pokusit se ji vyřešit, ale místo toho ji budeme řešit naší novou metodou. Proto  $F$  napíšeme jako reálnou část  $\hat{F}e^{i\omega t}$  a  $x$  jako reálnou část  $\hat{x}e^{i\omega t}$  a dosadíme do (23.6a). Ihned vidíme, že dostaneme rovnici

$$\left[ (i\omega)^2 \hat{x} + \gamma(i\omega) \hat{x} + \omega_0^2 \hat{x} \right] e^{i\omega t} = \frac{\hat{F}}{m} e^{i\omega t}. \quad (23.7)$$

(Účinnost „komplexní“ metody bychom skutečně ocenili, kdybychom se pokusili řešit rovnici (23.6a) naší starou přímou metodou.) Po vydělení obou stran  $e^{i\omega t}$  dostaneme výchylku  $\hat{x}$  způsobenou silou  $\hat{F}$

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}. \quad (23.8)$$

Opět je  $\hat{x}$  rovno  $\hat{F}$ , až na určitý faktor. Ačkoli označení  $\gamma$  a  $\omega_0$  se běžně používá, nemá tento faktor žádné technické pojmenování, ani se obvykle neoznačuje určitým písmenem, ale my ho označíme jako  $R$ , aby se nám s ním snadněji pracovalo:

$$R = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

a

$$\hat{x} = \hat{F}R. \quad (23.9)$$

Faktor  $R$  můžeme napsat jako  $p + iq$  i jako  $\rho$  krát  $e^{i\theta}$ . Podívejme se na jeho význam v případě, že ho napíšeme ve tvaru  $\rho e^{i\theta}$ . Víme, že  $\hat{F} = F_0 e^{i\Delta}$  a skutečná síla je rovna reálné části z  $F_0 e^{i\Delta} e^{i\omega t}$ , tj.  $F_0 \cos(\omega t + \Delta)$ . Dosazením za  $R$  do rovnice (23.9) máme

$$\hat{x} = R\hat{F} = \rho e^{i\theta} F_0 e^{i\Delta} = \rho F_0 e^{i(\theta + \Delta)}.$$

## REZONANCE

Fyzikální hodnota  $x$  je rovna reálné části komplexního  $\hat{x}$ , a tedy reálné části  $\varrho F_0 e^{i(\vartheta + \Delta)} e^{i\omega t}$ . Ale  $\varrho$  a  $F_0$  jsou reálné a reálná část  $e^{i(\vartheta + \Delta + \omega t)}$  je prostě  $\cos(\omega t + \Delta + \vartheta)$ , takže

$$x = \varrho F_0 \cos(\omega t + \Delta + \vartheta). \quad (23.10)$$

Tento výsledek nám říká, že amplituda výchylky je rovna absolutní hodnotě síly  $F$  vynásobené určitým faktorem  $\varrho$ . To bychom mohli nazvat „velikostí kmitů“. Co se týká fáze, říká nám, že  $x$  neosciluje ve fázi se silou, která má fázový posun  $\Delta$ , ale je dále posunuta o fázový úhel  $\vartheta$ . Proto  $\varrho$  a  $\vartheta$  představují velikost a fázový posun výchylky.

Vypočítejme, čemu je rovno  $\varrho$ . Druhá mocnina absolutní hodnoty komplexního čísla je rovna jeho součinu s komplexně sdruženým číslem, proto

$$\varrho^2 = \frac{1}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega) (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} = \frac{1}{m^2 [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}. \quad (23.11)$$

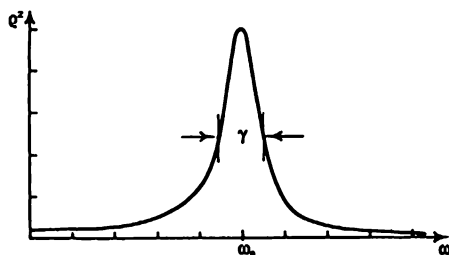
I fázový úhel  $\vartheta$  lze snadno najít, neboť máme

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\varrho e^{i\vartheta}} = \left( \frac{1}{\varrho} \right) e^{-i\vartheta} = m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega),$$

odkud

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (23.12)$$

se znaménkem minus, neboť  $\operatorname{tg}(-\vartheta) = -\operatorname{tg} \vartheta$ . Zápornou hodnotu  $\vartheta$  dostáváme pro všechna  $\omega$ , což odpovídá tomu, že posunutí  $x$  zaostává za silou  $F$ .



Obr. 23.2 Graf  $\varrho^2$  v závislosti na  $\omega$

Na obr. 23.2 je znázorněna závislost  $\varrho^2$  na frekvenci ( $\varrho^2$  je fyzikálně zajímavější než  $\varrho$ , neboť  $\varrho^2$  je úměrné amplitudě nebo víceméně energii vyvíjené v oscilátoru budící silou). Vidíme však, že je-li  $\gamma$  velmi malé, představuje  $1/(\omega_0^2 - \omega^2)^2$  hlavní příspěvek a pro  $\omega$  rovno  $\omega_0$  roste výchylka do nekonečna. Teď ovšem „nekonečno“ není skutečně nekonečné, neboť člen  $1/\gamma^2 \omega^2$  tam stále je. Fázový posun se mění, jak je vidět na obr. 23.3.

Za určitých okolností dostáváme vztah trochu odlišný od (23.8), jenž se také nazývá „rezonančním“ vztahem; někdo by si mohl myslet, že jde o jiný rezonanční jev, ale není tomu tak. Důvo-

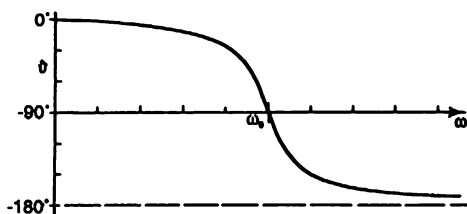
dem je to, že pro velmi malá  $\gamma$  je nejzajímavější část křivky v okolí  $\omega = \omega_0$  a (23.8) můžeme nahradit přibližným vztahem, jenž platí velmi přesně pro  $\omega$  blízko  $\omega_0$ , je-li  $\gamma$  velmi malé. Protože  $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$ , je to pro  $\omega$  blízko  $\omega_0$  skoro totéž jako  $2\omega_0(\omega_0 - \omega)$  a  $\gamma\omega$  je skoro totéž jako  $\gamma\omega_0$ . Použitím těchto přiblížení platí  $\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega + i\gamma/2)$ , takže pro  $\gamma \ll \omega_0$  a  $\omega \approx \omega_0$  platí

$$\hat{x} \approx \frac{\hat{F}}{2m\omega_0(\omega_0 - \omega + i\gamma/2)}. \quad (23.13)$$

Tomu odpovídající výraz pro  $Q^2$  lze najít snadno. Je to

$$Q^2 \approx \frac{1}{4m^2\omega_0^2 \left[ (\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right]}.$$

Důkaz následujícího tvrzení ponecháme studentům. Zvolíme-li výšku maxima rezonanční křivky na obr. 23.2 rovnu jedné, ptáme se, jaká bude šířka této křivky  $\Delta\omega$  v polovině výšky. Vyjde nám, že pro malé  $\gamma$  je  $\Delta\omega = \gamma$ . Rezonance je tím ostřejší, čím menší jsou účinky tření.



Obr. 23.3 Graf  $\phi$  v závislosti na  $\omega$

Jako jiné měřítko šířky se někdy používá veličina  $Q$  zvaná kvalita nebo činitel jakosti a definovaná jako  $Q = \omega_0 / \gamma$ . Čím je rezonance užší, tím je  $Q$  větší.  $Q = 1000$  odpovídá rezonanci, jejíž šířka je jen tisícinou frekvence.  $Q$  pro rezonanční křivku na obr. 23.2 je rovna 5.

Důležitost rezonančních jevů je v tom, že se vyskytují za mnoha dalších okolností, čemuž věnujeme zbytek této kapitoly.

### 23.3 REZONANCE V ELEKTRICKÝCH OBVODECH

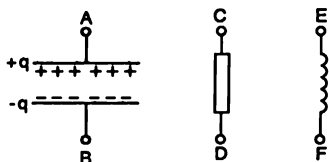
Nejjednodušší a nejširší uplatnění mají rezonanční jevy v elektřině. Ve světě elektřiny existuje množství prvků, jež lze zapojit do elektrických obvodů. Existují tři hlavní typy těchto pasivních elektrických prvků, jak se jim často říká, ačkoli každý z nich má v sobě trochu i z dalších dvou. Dříve, než je podrobně popíšeme, si všimněme, že celá myšlenka mechanického oscilátoru jako závaží na pružině je jen aproximace. Celá hmotnost ve skutečnosti není soustředěna jen v závaží; část z ní je v pružině. Podobně ani celá pružnost není jen v pružině; i samotné závaží má malou pružnost, ačkoli se může zdát absolutně tuhé, přece jen takové není. Při pohybu nahoru a dolů se působením pružiny mírně deformuje. Totéž platí i v elektřině. Existuje aproximace, v rámci níž můžeme věci rozkouskovat na ideální „elektrické prvky“, o nichž předpokládáme, že mají

dokonale ideální vlastnosti. Nyní není vhodná doba, abychom zkoumali, kdy platí takováto aproximace. Budeme prostě předpokládat, že za našich okolností platí.

Máme tři základní typy elektrických prvků. Prvním je *kondenzátor* (obr. 23.4); například dvě rovinné kovové desky navzájem oddělené tenkou vrstvou izolačního materiálu. Když se desky nabijí, je mezi nimi napětí, to znamená, že je mezi nimi určitý rozdíl potenciálů. Stejný rozdíl potenciálů je i na svorkách *A* a *B*, neboť kdybychom svorky propojili spojovacím drátem, vznikl by elektrický proud a náboj by se z desek ztratil. Jsou-li tedy na deskách elektrické náboje  $+q$  a  $-q$ , je mezi nimi určité napětí  $U$ . Mezi deskami bude také určité elektrické pole. Na konci kap. 14 jsme našli vzorec pro napětí

$$U = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{q d}{\epsilon_0 A}, \quad (23.14)$$

kde  $d$  je vzdálenost desek,  $A$  je plocha desek. Všimněme si, že napětí je lineární funkcí náboje. Kdybychom neměli rovnoběžné desky, ale nějaké izolované elektrody libovolného tvaru, bude napětí stále přesně úměrné náboji, ale konstantu úměrnosti nemusí být možné tak snadno vypočítat. Všechno, co potřebujeme vědět, je, že rozdíl potenciálů na kondenzátoru je *úměrný náboji*  $U = q/C$ . Konstanta úměrnosti je  $1/C$ , kde  $C$  je *kapacita* kondenzátoru.



Obr. 23.4 Tři pasivní prvky elektrických obvodů

Druhým typem elektrického prvku je *rezistor*, způsobuje odpor elektrickému proudu. Kovové vodiče a mnohé jiné látky kladou odpor elektrickému proudu podle následujícího zákona. Působí-li mezi dvěma místy v kusu materiálu elektrické napětí, protéká v něm elektrický proud  $I = dq/dt$ , který je úměrný napětí:

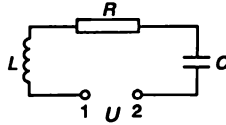
$$U = RI = R \frac{dq}{dt}. \quad (23.15)$$

Koeficient úměrnosti se nazývá *odpor*  $R$ . Tento vztah možná již znáte; je to Ohmův zákon.

Díváme-li se na náboj  $q$  kondenzátoru jako na analogii posunutí  $x$  mechanického systému, je proud  $I = dq/dt$  analogií rychlosti,  $1/C$  je analogické tuhosti pružiny  $k$  a  $R$  je analogické koeficientu tření  $\gamma$ . Je zajímavé, že existuje další elektrický prvek, jenž je analogií *hmotnosti*! Je to *cívka*, v níž se vlivem proudu vytváří magnetické pole. *Změna* magnetického pole vytvoří v cívce napětí, které je úměrné  $dI/dt$  (na čemž je založena funkce transformátoru). Magnetické pole je úměrné proudu a tzv. indukované napětí v cívce je úměrné změně proudu

$$U = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2 q}{dt^2}. \quad (23.16)$$

Koeficient  $L$  se nazývá *vlastní indukčnost* a je analogií hmotnosti v mechanickém oscilátoru.



Obr. 23.5 Elektrický oscilační obvod s odporem, cívkou a kondenzátorem

Předpokládejme, že máme obvod, v němž jsou všechny tři elektrické prvky zapojeny do série (obr. 23.5). Pak napětí v obvodu, tj. mezi body 1 a 2, je rovno práci vykonané přeneseným jednotkovým nábojem a skládá se ze součtu několika členů: na cívce  $U_L = L d^2 q / dt^2$ ; na odporu  $U_R = R dq / dt$  a na kondenzátoru  $U_C = q / C$ . Součet těchto příspěvků je roven přiloženému napětí  $U$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U(t). \quad (23.17)$$

Vidíme, že tato rovnice je stejná jako rovnice (23.6) v mechanice a lze ji řešit přesně stejně. Předpokládáme, že  $U(t)$  osciluje, tj. obvod napájíme generátorem s čistým sinusovým průběhem. Napětí  $U(t)$  pak můžeme napsat jako komplexní  $\hat{U}(t)$ , přičemž, chceme-li najít skutečné  $U$ , musíme  $\hat{U}(t)$  vynásobit  $e^{i\omega t}$  a vzít reálnou část. Podobnou úvahu lze provést pro náboj  $q$  a pak, stejným způsobem, jakým jsme dostali rovnici (23.8), dostaneme odpovídající rovnici. Druhá derivace  $\hat{q}$  je  $(i\omega)^2 \hat{q}$ , první je  $(i\omega) \hat{q}$ . Rovnice (23.17) se tak změně na

$$\left[ L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C} \right] \hat{q} = \hat{U},$$

neboli

$$\hat{q} = \frac{\hat{U}}{L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C}},$$

již můžeme napsat ve tvaru

$$\hat{q} = \frac{\hat{U}}{L(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}, \quad (23.18)$$

kde  $\omega_0^2 = 1/LC$  a  $\gamma = R/L$ . Je to přesně stejný jmenovatel jako v případě mechanického oscilátoru s přesně stejnými rezonančními vlastnostmi! Souvislost mezi elektrickým a mechanickým oscilátorem je naznačena v tab. 23.1.

Musíme se zmínit o malé technické záležitosti. V elektrotechnické literatuře se používá jiné označení. (V různých odvětvích vědy se často používají pro stejnou věc různá označení.) V elektrotechnice se k označení  $\sqrt{-1}$  běžně užívá místo  $i$ . (Koneckonců  $i$  musí být přece proud!) Inženýři dávají raději přednost vztahu mezi  $\hat{U}$  a  $\hat{I}$  než vztahu mezi  $\hat{U}$  a  $\hat{q}$ , neboť si na to zvykli. Protože  $\hat{I} = d\hat{q}/dt = i\omega\hat{q}$ , můžeme za  $q$  dosadit  $\hat{I}/i\omega$  a máme

$$\hat{U} = \left( i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C} \right) \hat{I} = \hat{Z}\hat{I}. \quad (23.19)$$

Tabulka 23.1

Obecná charakteristika	Mechanická vlastnost	Elektrická vlastnost
nezávisle proměnná závisle proměnná setrvačnost odpor tuhost rezonanční frekvence perioda činitel jakosti	čas $t$ poloha $x$ hmotnost $m$ koeficient tření $h = \gamma m$ tuhost $k$ $\omega_0^2 = k/m$ $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ $Q = \omega_0 / \gamma$	čas $t$ náboj $q$ indukčnost $L$ odpor $R = \gamma L$ (kapacita) <sup>-1</sup> $1/C$ $\omega_0^2 = 1/LC$ $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ $Q = \omega_0 L/R$

Dalším „dobrým“ zvykem bývá přepsat rovnici (23.17) do známější podoby: často ji můžeme vidět ve tvaru

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int^t Idt = U(\dot{t}). \quad (23.20)$$

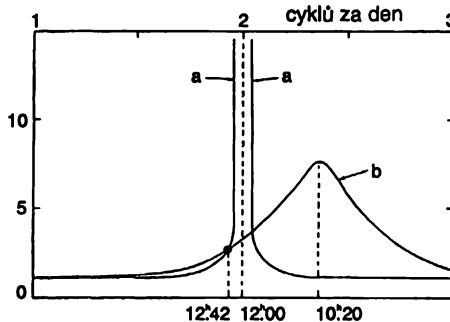
V každém případě zjistíme, že jejím řešením je vztah (23.19) dávající do souvislosti napětí  $\dot{U}$  a proud  $\dot{I}$ . Je to stejný vztah jako (23.18), vykrácený  $i\omega$ . Veličina  $(R + i\omega L + 1/i\omega C)$  je komplexní číslo a v elektrotechnice se používá tak často, že dostala název *komplexní impedance*  $\dot{Z}$ . Můžeme tedy psát  $\dot{U} = \dot{Z}\dot{I}$ . Inženýři používají toto označení proto, že za mlada, když věděli jen o stejnosměrném proudu, se naučili, že pro odpor platí  $U = RI$ . Když už jsou vzdělanější a znají střídavý proud, chtějí, aby tato rovnice vypadala podobně. Proto píšou  $\dot{U} = \dot{Z}\dot{I}$ , kde jediný rozdíl je v tom, že odpor je nahrazen komplikovanější, komplexní veličinou. Takže trvají na tom, že k označení imaginárních čísel musí používat  $j$ , když všichni ostatní lidé na světě označují imaginární jednotku  $i$ . Stačí, že netrvají na tom, aby písmeno  $Z$  bylo nahrazeno  $R$ ! (Do obtíží se pak dostávají při označování proudové hustoty, kterou značí rovněž  $j$  v tisku ovšem kurzívním. Různé obtíže ve vědě jsou do značné míry způsobeny nejednoznačností v označování, v jednotkách a v jiných konvencích, jež zavedl člověk, ale ne příroda.

## 23.4 REZONANCE V PŘÍRODĚ

Podrobně jsme se zabývali rezonancí v elektřině, ale mohli bychom uvést mnoho příkladů z jiných odvětví a ukázat, že rezonanční rovnice je vždy stejná. V přírodě často něco „kmitá“ a rezonuje. Konstatovali jsme to již v předcházející kapitole a nyní uvedeme další příklady. Podívali se za příklady do odborné literatury a hledáme křivku podobnou obr. 23.2 odpovídající stejné rovnici, co najdeme? Abychom demonstrovali široký okruh rezonančních jevů na malém vzorku, omezíme se na pět nebo šest knih.

První dva příklady jsou z mechaniky. První je z oblasti velkých rozměrů, a týká se zemské atmosféry. Atmosféra, o níž předpokládáme, že rovnoměrně obepíná celou Zemi, se pod vlivem přitažlivosti Měsíce protáhne mírně na jednu stranu nebo spíše promáčkne a vytvoří dvě přílivové vlny. Kdybychom ji mohli z tohoto vlivu uvolnit, začala by se rytmicky zplošťovat jako oscilátor. Tento oscilátor je *buzen* Měsícem, který efektivně obfáhá kolem Země. Kterákoli složka síly,

řekněme ve směru osy  $x$ , obsahuje kosinovou závislost, takže atmosféra Země reaguje na přitažlivost Měsíce jako oscilátor. Očekávané chování atmosféry je znázorněno na obr. 23.6 křivkou  $b$  (křivka  $a$  je jinou teoretickou křivkou a souvisí s textem knihy, z jejíhož kontextu je tento obrázek vybrán). Někdo si pomyslí, že z této rezonanční křivky známe jen jeden bod, neboť máme jen jednu frekvenci odpovídající rotaci Země pod Měsícem, jejíž perioda je 12,42–12 hodin (příliv nastává během jedné otáčky dvakrát) plus příspěvek od oběhu Měsíce kolem Země. Avšak z velikosti atmosférického přílivu a odlivu a z fázového zpoždění můžeme zjistit jak  $\rho$  tak  $\delta$ . Odtud najdeme  $\omega_0$  a  $\gamma$ , a tak najdeme celou křivku! To je velmi ubohý vědecký výsledek. Ze dvou čísel dostáváme jiná dvě čísla a na jejich základě nádhernou křivku. Samozřejmě, procházející daným bodem! Tato křivka je pro nás zbytečná, nemůžeme-li si ji ověřit dalším měřením, což lze často v případě geofyziky provést velmi obtížně. V tomto speciálním případě však existuje jev, jehož časový průběh se řídí (což lze teoreticky zdůvodnit) vlastní frekvencí  $\omega_0$ . Kdyby nastal nějaký výkyv atmosféry, začala by oscilovat svou vlastní frekvencí  $\omega_0$ . Takový prudký výkyv nastal v roce 1883, kdy výbuch sopky Krakatoa smetl polovinu ostrova. Byla to tak silná exploze, že bylo možné změřit periodu oscilací atmosféry. Výsledek byl 10,5 hodiny. Frekvence  $\omega_0$ , určená z obr. 23.6 vychází 10 hodin a 20 minut, takže toto měření nám poskytuje aspoň jednu kontrolu správnosti našeho chápání přílivu a odlivu v atmosféře.

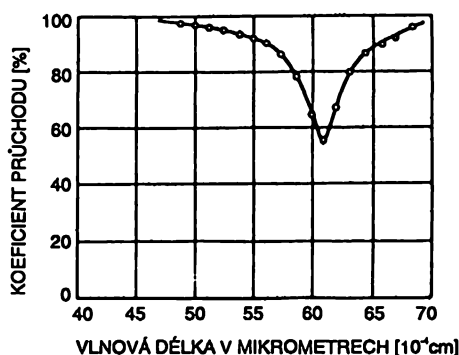


Obr. 23.6 Reakce atmosféry na vnější excitace. Křivka  $a$  zobrazuje očekávanou reakci na atmosférický příliv a odliv typu  $S_2$  způsobený gravitací Měsíce: zvětšení v maximu je 100:1. Křivka  $b$  představuje průběh odvozený z pozorovaného zvětšení a fáze přílivu a odlivu typu  $M_2$ . (Munk, Mac Donald, „Rotation of the Earth“ Cambridge University Press, 1960)

Přenesme se nyní do oblasti mechanických oscilací v malém měřítku. Vezměme si krystal chloridu sodného, v němž jsou vedle sebe ionty chloru a sodíku, jak jsme již dříve popsali. Tyto ionty jsou střídavě kladně a záporně elektricky nabitě. Je tu možnost vzniku zajímavých oscilací. Předpokládejme, že bychom mohli vychýlit všechny kladné náboje vpravo a všechny záporné náboje vlevo a pak je nechali volně se pohybovat. Budou kmitat sem a tam, sodíková mřížka proti chlorové mřížce. Jako bychom rozkmitali tyto ionty? To je snadné, neboť kdybychom vložili krystal do elektrického pole, pak kladné náboje se vychýlí jedním a záporné druhým směrem! Pomocí vnějšího elektrického pole, bychom snad rozkmitali celý krystal. Potřebná frekvence elektrického pole je však tak vysoká, že odpovídá infračervenému záření! Rezonanční křivku se proto pokusíme najít měřením absorpce infračerveného světla v chloridu sodném. Taková závislost je znázorněna na obr. 23.7. Na vodorovné ose není vynesena frekvence, ale vlnová délka, což je čistě technická záležitost, neboť mezi frekvencí a vlnovou délkou platí určitý vztah, takže je to totéž, jako kdybychom tam nanášeli frekvenci a rezonanci odpovídala nějaká frekvence.



Ale jak je to se šířkou rezonanční křivky? Čím je určena? V mnoha případech je to tak, že šířka, kterou je vidět na obrázku, není skutečnou šířkou  $\gamma$ . Existují dva důvody, proč můžeme dostat širší křivku, než dává teorie. Nemají-li všechny objekty stejnou frekvenci (to se může stát, když v určitých částech krystalu existuje mechanické napětí, takže jejich vlastní frekvence se o něco liší od ostatních oblastí), máme vlastně množství rezonančních křivek, jež se vzájemně překrývají, z čehož dostaneme širší křivku. Druhým důvodem je prostě to, že nemůžeme dostatečně přesně změřit frekvenci. Pootevřeme-li šterbinu spektrometru a myslíme si, že měříme jednu frekvenci, máme ve skutečnosti celé pásmo frekvencí  $\Delta\omega$  a nemusíme mít dostatečnou rozlišovací schopnost, abychom viděli úzkou křivku. Na první pohled neumíme říci, zda na *obr. 23.7* je přirozená šířka, nebo zda je to šířka v důsledku nehomogenity krystalu nebo konečné šířky šterbiny spektrometru.

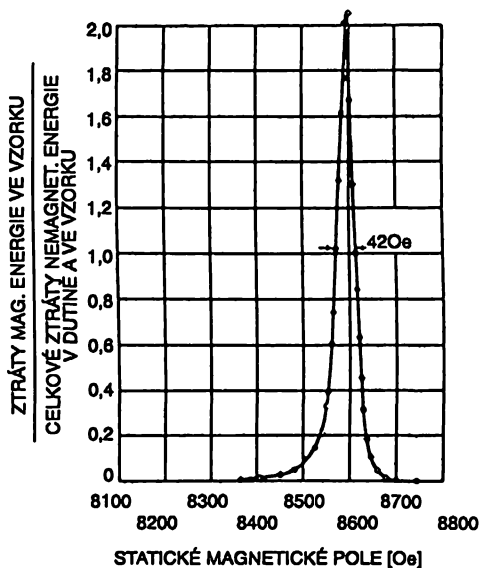


Obr. 23.7 Koeficient průchodu infračerveného záření tenkou ( $0,17 \mu\text{m}$ ) vrstvou chloridu sodného [Podle R. B. Barnes, Z. Physik 75, 723 (1932). Kittel, Introduction to Solid State Physics, Wiley, 1956]

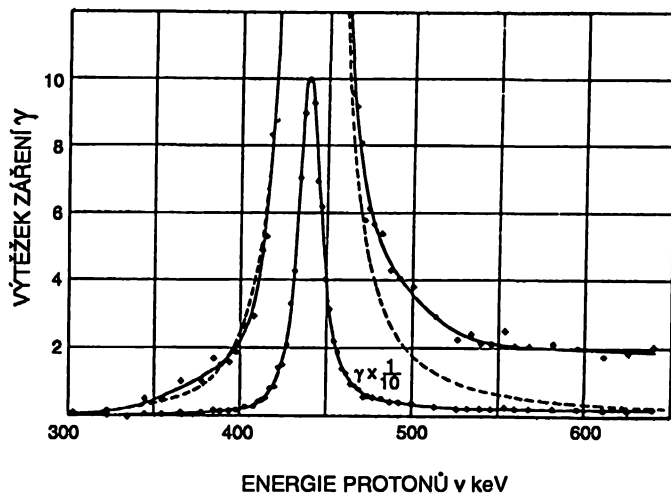
Jako další příklad uvedeme kmitání magnetu. Máme-li magnet v konstantním magnetickém poli, bude severní pól magnetu přitahován k jedné straně a jižní pól k druhé straně. Proto na něj bude působit moment síly a magnet bude kmitat kolem rovnovážné polohy podobně jako jehla kompasu. Avšak magnety, o nichž mluvíme, jsou atomy. Protože atomy mají určitý moment hybnosti, nezpůsobí moment síly jejich jednoduchý pohyb ve směru pole, ale precesní pohyb. Při pohledu ze strany „kmitá“ každá složka pohybu a toto kmitání můžeme rušit nebo budít a měřit absorpci rušícího, případně budícího signálu. Taková typická rezonanční křivka je na *obr. 23.8*. Technika měření byla v tomto pokusu trochu odlišná. Frekvence vnějšího, budícího magnetického pole byla stále stejná, ačkoli jsme očekávali, že rezonanční křivka byla získána měřením při různých frekvencích. Mohlo by se to dělat i tak, ale z technického hlediska bylo jednodušší nechat frekvenci  $\omega$  jako pevnou a měnit velikost konstantního magnetického pole, což odpovídá změně  $\omega_0$  v rezonančním vztahu. Graf znázorňuje rezonanční křivku v závislosti na  $\omega_0$ . Je to typická rezonance s určitými parametry  $\omega_0$  a  $\gamma$ .

Pojďme ještě dále. Náš další příklad se bude týkat atomových jader. Pohyb protonů a neutronů v jádře je svým způsobem kmitavým pohybem, což lze ukázat pomocí následujícího experimentu. Bombardováním atomů lithia protony zjistíme, že určitá reakce, při níž vznikají  $\gamma$  paprsky, má velmi ostré maximum typické pro rezonanci. Na *obr. 23.9* je zřejmý jeden rozdíl od ostatních případů: na vodorovné ose není frekvence, ale energie! Je to z toho důvodu, že v kvantové mechanice to, co chápeme pod klasickou energií, souvisí s vlnovou frekvencí. Analyzujeme-li veličinu, která v obyčejné fyzice těles makroskopických rozměrů souvisí s frekvencí, zjistíme, že

při kvantověmechanických experimentech s atomovými objekty dostaneme odpovídající křivky této veličiny v závislosti na energii. Naše křivka je v určitém smyslu důkazem takové souvislosti. Ukazuje, že mezi frekvencí a energií existuje nějaký hlubší vzájemný vztah.



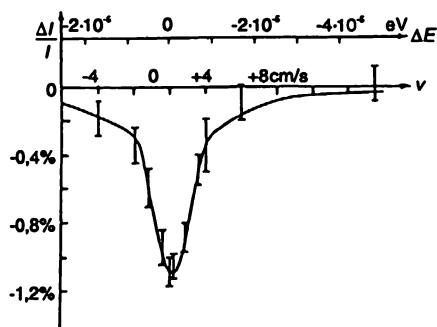
Obr. 23.8 Ztráty magnetické energie v paramagnetické organické sloučenině v závislosti na intenzitě vnějšího magnetického pole [Holden et al., Phys. Rev. 75, 1614 (1949)]; 1 oersted (Oe) =  $(1/4\pi) \cdot 10^3$  A/m



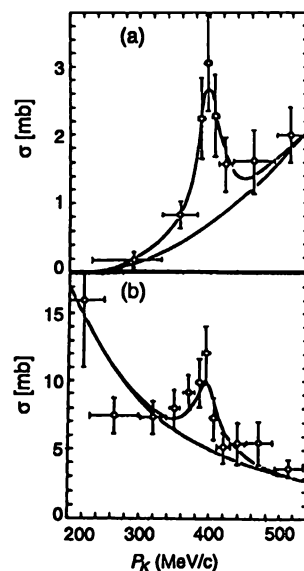
Obr. 23.9 Intenzita gama záření lithia jako funkce energie bombardujících protonů. Přerušovaná čára představuje teoretický výpočet pro protony s momentem hybnosti  $l=0$  [Bonner and Evans, Phys. Rev. 73, 666 (1948)]

Podívejme se na příklad, v němž jde znovu o energetické hladiny jádra, ale které jsou mnohem užší. Frekvence  $\omega_0$  na obr. 23.10 odpovídá energii 100 000 eV, zatímco šířka  $\gamma$  je přibližně

$10^{-5}$  eV. To znamená, že  $Q=10^{10}$ ! V době, kdy se tato křivka měřila, to byl oscilátor s největším ze všech známých  $Q$ . Toto měření prováděl dr. Mössbauer a obdržel za ně Nobelovu cenu. Na vodorovné ose je vynesena rychlost, neboť k získání málo se lišících frekvencí využil Dopplerův jev při vzájemném pohybu zdroje a absorpčního materiálu. Lze si představit, jaký to musel být jemný experiment, když rychlost pohybu byla jen několik centimetrů za sekundu! Kdyby se zachovalo měřítko jako na uvedeném obrázku, vyšla by nulová frekvence v bodě  $10^{10}$  cm směrem doleva – na ukázkou, bohužel, nemáme dost papíru!



Obr. 23.10 Laskavostí Dr. R. Mössbauera



Obr. 23.11 Závislost účinného průřezu na hybnosti pro reakce

(a)  $K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi + \pi^-$       (b)  $K^- + p \rightarrow K^0 + n$

Dolní křivky v a i b představují předpokládané pozadí bez rezonance, zatímco horní křivky obsahují ještě navíc superponovanou rezonanci [Ferro – Luzzi et al., Phys. Rev. Lett. 8, 28 (1962)]; srážkový průřez je v milibarnech,  $1 \text{ mb} = 10^{-25} \text{ m}^2$ .

Nakonec, když se podíváme například do časopisu Physical Review z 1. ledna 1962, najdeme tam nějakou rezonanční křivku? V každém čísle tohoto časopisu je nějaká rezonanční křivka a rezonanční křivka z tohoto čísla je na obr. 23.11. Je to velmi zajímavá křivka – rezonance objevená v jedné reakci mezi podivnými částicemi, v reakci, kde interaguje částice  $K^-$  a proton. Detekce rezonance se prováděla pozorováním počtu určitého druhu vylétajících částic. Přitom se získávají různé křivky, jejichž tvar je však stejný a jejichž rezonanční maximum se nachází při stejné energii. Z toho vyplývá, že při určité energii kaonů existuje nějaká rezonance. To znamená, že existuje určitý stav odpovídající této rezonanci, jejíž lze získat spojením částice  $K^-$  a protonu. Je to nová částice nebo rezonance. Dnes nevíme, zda ostré maximum jako je toto máme nazvat „částicí“ nebo prostě rezonancí. Je-li rezonance velmi ostrá, odpovídá to jedné určité energii právě tak, jako kdyby se v přírodě nacházela částice s takovou energií. Když je rezonance široká, nevíme, zda máme říkat, že tomu odpovídá částice s krátkou dobou života nebo prostě jen rezonance ve funkci pravděpodobnosti reakce. To jsme si již řekli v druhé kapitole, když jsme hovořili o částicích, ale v době psaní druhé kapitoly tato rezonance ještě nebyla známa, takže naše tabulka by měla obsahovat ještě další částici!

# PŘÍKLADY A CVIČENÍ

23.1 ■ Sestavte a řešte diferenciální rovnici popisující chování proudu, jenž protéká a) cívkou o indukčnosti  $L$ , b) kondenzátorem o kapacitě  $C$ , je-li na ně podáno harmonické napětí s úhlovou frekvencí  $\omega$ . Najděte komplexní impedanci uvedených obvodů.

23.2 ■ Najděte závislost impedance  $\hat{Z}$  na úhlové frekvenci  $\omega$  v obvodu sestávajícím z indukčnosti  $L$  a kapacity  $C$ , jsou-li spojeny  
a) sériově,  
b) paralelně. Získané výsledky kvalitativně posuďte.

23.3 ■ a) Ukažte, že diferenciální pohybová rovnice tělesa o hmotnosti  $m$ , jež je upevněno na pružině tuhosti  $k$  a vystaveno působení tření  $-m\gamma v$ , je

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \text{ kde } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

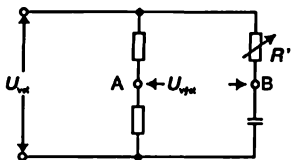
b) Najděte řešení této rovnice (používejte komplexní formu zápisu!) za předpokladu, že má tvar  $x = e^{\alpha t}$ , a pak dokažte, že obecné řešení je dáno výrazem

$$x = e^{-\gamma/2 t} \left[ A \cos \left( \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t \right) \right], \text{ pro } \gamma < 2\omega_0.$$

c) Jak se změní toto řešení, bude-li  $\gamma < 2\omega_0$ ?

23.4 ■ V okamžiku  $t = 0$  jsou poloha a rychlost částice o hmotnosti  $m$  z předchozí úlohy rovny  $x = x_0$  a  $\dot{x} = v_0$ . Určete  $A$  a  $B$ .

23.5 ■ Často je třeba, aby v elektrickém obvodu působilo sinusové napětí stálé amplitudy a regulovatelné fáze. Elektrické schéma, které umožňuje toho dosáhnout je na obrázku a nazývá se měnič fáze. Dokažte, že amplituda napětí mezi body  $A$  a  $B$  je rovna polovině amplitudy vstupního napětí a fázi je možno měnit změnou odporu  $R'$  v rozmezí od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ .

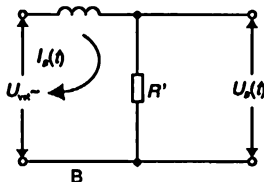
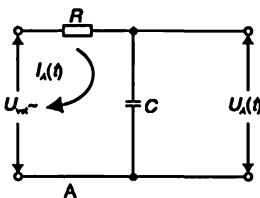


23.6 ■ Na vstupu obvodů  $A$  a  $B$  (viz obrázek) je zdroj napětí  $U_{vst} = U_0 \cos \omega t$ . Předpokládejme, že proud protékající mezi svorkami na výstupu je zanedbatelně malý.

a) Najděte vztah, který musí existovat mezi  $R$ ,  $C$ ,  $R'$  a  $L$  aby výstupní napětí obou obvodů

$U_A(t)$  a  $U_B(t)$  byla stejná.

b) Určete proudy  $I_A(t)$  a  $I_B(t)$ .



# Přechodové jevy

## 24.1 ENERGIE OSCILÁTORU

## 24.2 TLUMENÉ KMITY

## 24.3 PŘECHODOVÉ JEvy V ELEKTRICKÝCH OBVODECH

### 24.1 ENERGIE OSCILÁTORU

Ačkoli název této kapitoly je Přechodové jevy, některé její části jsou vlastně pokračováním předcházející kapitoly o nucených oscilacích. Jednou vlastností nucených kmitů, jíž jsme se dosud nezabývali, je jejich energie.

Jakou kinetickou energii má mechanický oscilátor? Je úměrná druhé mocnině rychlosti. Nyní se dostáváme k důležitému bodu. Mějme nějakou veličinu  $A$ , např. rychlost. Napíšeme-li ji ve tvaru komplexního čísla  $A = \hat{A} e^{i\omega t}$ , je fyzikálně správnou a početnou hodnotou  $A$  jen reálná část. Proto, potřebujeme-li z nějakého důvodu druhou mocninu  $A$ , nebylo by správné umocnit komplexní číslo a pak z něho vzít reálnou část, neboť reálná část druhé mocniny komplexního čísla není rovna druhé mocnině reálné části a obsahuje i jeho imaginární část. Takže, chceme-li najít energii, musíme se na chvíli vzdát komplexního zápisu a podívat se trochu na vnitřní mechanismus.

Pravá fyzikální hodnota  $A$  je rovna reálné části z  $A_0 e^{i(\omega t + \Delta)}$ , tj.  $A = A_0 \cos(\omega t + \Delta)$ , zatímco komplexní číslo  $\hat{A}$  je rovno  $A_0 e^{i\Delta}$ . Druhá mocnina této fyzikální veličiny je  $A^2 = A_0^2 \cos^2(\omega t + \Delta)$ . Druhá mocnina se proto mění od maxima k nule jako druhá mocnina kosinu. Druhá mocnina kosinu má maximální hodnotu rovnou 1, minimum 0 a střední hodnota je rovna 1/2.

Často nás nezajímá energie v některém okamžiku po dobu oscilací. V mnoha aplikacích potřebujeme znát jen střední hodnotu  $A^2$  za dobu mnohem větší, než je perioda oscilací! Pak můžeme použít střední hodnotu čtverce kosinu a dostaneme tuto větu: Reprezentuje-li  $A$  komplexní číslo, je střední hodnota  $A^2$  rovna  $1/2 A_0^2$ .  $A_0^2$  je rovno druhé mocnině modulu komplexního čísla  $\hat{A}$ . (Ten lze zapsat více způsoby – buď  $|\hat{A}|^2$  nebo i jako  $\hat{A}\hat{A}^*$ , což je  $\hat{A}$  krát číslo komplexně sdružené.) Tuto větu použijeme vícekrát.

Nyní se podíváme na energii nucených kmitů. Rovnice nucených oscilací je

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma m \frac{dx}{dt} + m \omega_0^2 x = F(t). \quad (24.1)$$

V našem případě je samozřejmě  $F(t)$  kosinovou funkcí  $t$ . Analyzujeme situaci: jakou práci koná větší síla  $F$ ? Práce vykonaná silou za sekundu, tj. výkon, je roven součinu síly a rychlosti. (Víme,

že diferenciál práce za dobu  $dt$  je  $F dx$  a výkon  $F dx/dt$ .) Takže

$$P = F \frac{dx}{dt} = m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right) + \omega_0^2 x \left( \frac{dx}{dt} \right) \right] + \gamma m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (24.2)$$

První dva členy na pravé straně lze rovněž zapsat jako  $d/dt [1/2 m (dx/dt)^2 + 1/2 m \omega_0^2 x^2]$ , což lze diferencováním ihned ověřit. Lze říci, že výraz v závorce je derivací dvou členů, které lze snadno pochopit – jeden představuje kinetickou energii pohybu a druhý potenciální energii pružiny. Nazvěme tuto veličinu nahromaděnou energií, tj. energií nahromaděnou v oscilátoru. Předpokládejme, že chceme znát střední výkon po dobu mnoha cyklů nucených oscilací za dlouhou dobu. Přitom se nahromaděná energie nemění – její derivace dává nulový průměrný efekt. Jinak řečeno, na základě výpočtu dlouhodobého průměru výkonu vyplývá, že celá energie nakonec končí v odporovém členu  $\gamma m (dx/dt)^2$ . Určitá energie se v oscilátoru nahromadí, ale ta se s časem nemění, počítáme-li průměr po dobu mnoha cyklů. Střední hodnota výkonu je proto rovna

$$\langle P \rangle = \left\langle \gamma m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle. \quad (24.3)$$

Užitím komplexních čísel a pomocí naší věty, že  $\langle A^2 \rangle = 1/2 A_0^2$ , ji můžeme najít. Je-li  $x = \hat{x} e^{i\omega t}$ , pak  $dx/dt = i\omega \hat{x} e^{i\omega t}$ . Střední výkon lze tedy napsat jako

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \gamma m \omega^2 x_0^2. \quad (24.4)$$

V elektrických obvodech se  $dx/dt$  nahrazuje proudem  $I$  (kde  $I = dq/dt$ , přičemž  $q$  odpovídá  $x$ ) a  $m\gamma$  odpovídá odporu  $R$ . Proto míra ztráty energie – výkon spotřebovaný vynucující silou – je rovna odporu obvodu vynásobenému střední hodnotou proudu:

$$\langle P \rangle = R \langle I^2 \rangle = R \frac{1}{2} I_0^2. \quad (24.5)$$

Tato energie se v rezistoru mění na teplo, jež se někdy nazývá tepelnou ztrátou nebo Joulovým teplem.

Dále je zajímavé zjistit, jak velká je nahromaděná energie. Energie není rovna výkonu, neboť i když se na začátku spotřeboval určitý výkon k jejímu nahromadění, dále se výkon stále absorbuje, dokud dochází k tepelným ztrátám. V každém okamžiku existuje nějaké množství nahromaděné energie, a proto bychom rádi vypočetli střední nahromaděnou energii  $\langle E \rangle$ . Střední hodnotu  $(dx/dt)^2$  jsme již vypočetli, takže

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \left\langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} m (\omega^2 + \omega_0^2) \frac{1}{2} x_0^2. \quad (24.6)$$

Je-li oscilátor velmi účinný a je-li  $\omega$  blízko  $\omega_0$ , takže  $|\hat{x}|$  je velké, je nahromaděná energie velmi velká – z relativně malé síly můžeme nahromadit velkou energii. Síla vykoná mnoho práce při spouštění oscilátoru, ale pak jí k udržení oscilací stačí již jen přemáhat tření. Při malém tření

může mít oscilátor velkou energii a i při velkých výchylkách nemusí mít vlastní spotřebu energie příliš velkou. Účinnost oscilátoru lze měřit porovnáním nahromaděné energie a velikosti práce budící síly při jednom kmitu.

Porovnání nahromaděné energie a práce za jeden cyklus se provádí pomocí veličiny  $Q$ , jež je definována jako  $2\pi$  krát střední nahromaděná energie dělená prací za jeden cyklus. (Kdybychom se zajímali o práci za jeden radián místo za jeden cyklus,  $2\pi$  by vypadlo.) Takže

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m (\omega^2 + \omega_0^2) \cdot \langle x^2 \rangle}{\gamma m \omega^2 \langle x^2 \rangle \cdot \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2\gamma\omega}. \quad (24.7)$$

$Q$  je užitečné číslo, jen je-li velmi velké. Je-li relativně velké, dává určitou míru kvality oscilátoru. Lidé se pokoušeli definovat  $Q$  co nejjednodušším způsobem a co nejužitečněji. Existují různé definice, jež se navzájem trochu liší, ale pro velmi velké  $Q$  všechny navzájem souhlasí. Nejrozsáhlejší definice je vztah (24.7), jenž je závislý na  $\omega$ . Pro dobrý oscilátor kmitající blízko rezonance můžeme (24.7) zjednodušit tím, že položíme  $\omega = \omega_0$ , z čehož máme  $Q = \omega_0 / \gamma$ , a to je definice, kterou jsme již používali.

Čemu je rovno  $Q$  pro elektrický obvod? Stačí, když dosadíme  $L$  za  $m$ ,  $R$  za  $m\gamma$  a  $1/C$  za  $m\omega_0^2$  (tab. 23.1). V rezonanci je  $Q$  rovno  $L\omega/R$ , kde  $\omega$  je rezonanční frekvence. Máme-li obvod s velmi vysokým  $Q$ , znamená to, že energie nahromaděná v oscilátoru je velmi velká ve srovnání s množstvím práce, kterou vykoná za jeden cyklus mechanismus pohánějící oscilátor.

## 24.2 TLUMENÉ KMITY

Nyní přejdeme k našemu hlavnímu tématu, přechodovým jevům. Přechodovým jevem rozumíme takové řešení diferenciální rovnice, kdy nepůsobí síla, ale systém prostě není v klidu. (Je-li zpočátku v klidu a nepůsobí na něj žádná síla, je to jednoduchý problém – je v klidu stále!) Předpokládejme, že oscilace začnou tak, že po nějakou dobu byl oscilátor buzen silou, kterou pak vypneme. Co se stane? Zjistíme, co se asi bude dít v systému s velmi vysokým  $Q$ . Dokud působí síla, nahromaděná energie se nemění a koná se určitá práce k udržení oscilací. Předpokládejme, že budící sílu najednou vypneme, tj. do oscilátoru přestaneme dodávat energii. Ztráty energie, jež se předtím nahrazovaly ze zdroje, již zdroj nevyrovnává. Protože nepůsobí vnější budící síla, začnou ztráty spotřebovávat energii nahromaděnou v oscilátoru. Předpokládejme, že  $Q/2\pi = 1000$ . Pak práce vykonaná po dobu jednoho cyklu je rovna  $1/1000$  nahromaděné energie. Nezdá se být rozumné předpokládat, že i nyní, bez budící síly, bude oscilátor nadále ztrácet  $1/1000$  své energie  $E$  za jeden cyklus? Zkusme předpokládat, že pro systémy s relativně vysokým  $Q$  může platit tato rovnice (později se k ní vrátíme, abychom ji upřesnili a uvidíme, že platí!):

$$\frac{dE}{dt} = -\omega \frac{E}{Q}. \quad (24.8)$$

Pozor, rovnice platí přesně jen pro velká  $Q$ . Na každém radiánu ztratí systém  $1/Q$  nahromaděné energie  $E$ . Za daný interval  $dt$  se energie změní o  $\omega dt/Q$ , neboť na  $dt$  připadá  $\omega dt$  radiánů. Jaká je frekvence? Mějme za to, že systém kmitá tak hladce, téměř bez vlivu síly, že když ji vypneme,

## ENERGIE OSCILÁTORU

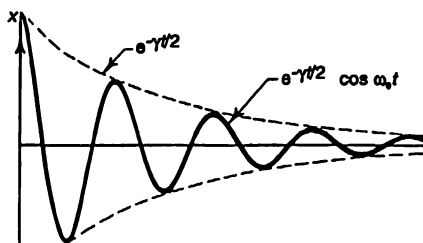
bude v podstatě dále sám oscilovat se stejnou frekvencí, takže  $\omega$  je rovna rezonační frekvenci  $\omega_0$ . Z (24.8) zjistíme, že nahromaděná energie se bude měnit jako

$$E = E_0 e^{-\omega_0 t / Q} = E_0 e^{-\gamma t}. \quad (24.9)$$

To nám udává množství energie v každém okamžiku. Jak bude záviset amplituda oscilací na čase? Stejně? Ne! Energie pružiny závisí na druhé mocnině výchylky, kinetická energie na druhé mocnině rychlosti, takže celková energie se mění s druhou mocninou výchylky. Proto výchylka, amplituda oscilací, bude klesat o polovinu pomaleji. Jinými slovy, odhadujeme, že řešením tlumeného přechodového pohybu budou oscilace blízke rezonační frekvenci  $\omega_0$ , přičemž amplituda pohybu se bude zmenšovat jako  $e^{-\gamma t / 2}$ :

$$x = A_0 e^{-\gamma t / 2} \cos \omega_0 t. \quad (24.10)$$

Tato rovnice a obr. 24.1 nám dávají představu, co asi můžeme očekávat. Pokusíme se provést přesnou analýzu pohybu tím, že vyřešíme diferenciální rovnici pohybu.



Obr. 24.1 Tlumené kosinové oscilace

Jak vyřešíme rovnice (24.1) bez vnější síly? Jako fyzikům nám nemusí tak moc záležet na metodě řešení jako na samotném řešení. Na základě naší předcházející zkušenosti zkusme hledat řešení ve tvaru exponenciální křivky  $x = Ae^{i\alpha t}$ . (Proč právě tak? Protože je to funkce, jež se nejsnadněji derivuje.) Dosadíme do (24.1), kde  $F(t) = 0$ , přičemž se řídíme pravidlem, že vždy, když  $x$  derivujeme, vynásobíme ho  $i\alpha$ . Je to snadné a naše rovnice má tvar

$$(-\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2) Ae^{i\alpha t} = 0 \quad (24.11)$$

Levá strana rovnice musí být rovna nule v každém okamžiku, což je možné jen tehdy, je-li buď  $A = 0$ , což není žádné řešení – oscilátor se nepohybuje, nebo

$$-\alpha^2 + i\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0. \quad (24.12)$$

Dokážeme-li tuto rovnici vyřešit a najít  $\alpha$ , budeme mít řešení v němž  $A$  nemusí být rovno nule! Máme

$$\alpha = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (24.13)$$



Na okamžik předpokládejme, že  $\gamma$  je hodně malé ve srovnání s  $\omega_0$ , takže  $\omega_0^2 - \gamma^2/4$  je určitě kladné a odmocnina není žádným problémem. Jediná věc, která nás trápí, je, že máme dvě řešení

$$\alpha_1 = i\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = i\frac{\gamma}{2} + \omega_\gamma \quad (24.14)$$

a

$$\alpha_2 = i\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = i\frac{\gamma}{2} - \omega_\gamma. \quad (24.15)$$

Vezměme první řešení (jako kdybychom si nevšimli, že druhá odmocnina má dva možné kořeny). Řešení pro  $x$  je pak  $x_1 = Ae^{i\alpha_1 t}$ , kde  $A$  je libovolná konstanta. Výraz  $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$  v  $\alpha_1$  označíme zkráceně jako  $\omega_\gamma$ , protože ho budeme často psát. Pak  $i\alpha_1 = -\gamma/2 + i\omega_\gamma$  a máme  $x = Ae^{(-\gamma/2 + i\omega_\gamma)t}$ , nebo díky nádherným vlastnostem exponenciální funkce

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2} e^{i\omega_\gamma t}. \quad (24.16)$$

Za prvé, poznáváme oscilace, oscilace s frekvencí  $\omega_\gamma$ , jež není rovna přesně frekvenci  $\omega_0$ , ale pro oscilátor s malými ztrátami je jí velmi blízka. Za druhé, amplituda oscilací se exponenciálně zmenšuje! Vezmeme-li například reálnou část z (24.16) máme

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2} \cos \omega_\gamma t, \quad (24.17)$$

což je velmi podobné našim odhadnutým řešením, jenom frekvence je ve skutečnosti  $\omega_\gamma$ . To je jediná chyba, jinak je to stejné – takže naše idea byla správná. Není však v pořádku to, že *existuje i druhé řešení*.

Druhé řešení je  $\alpha_2$  a vidíme, že jediný rozdíl je, že znaménko u  $\omega_\gamma$  je opačné:

$$x_2 = Be^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_\gamma t}. \quad (24.18)$$

Co to znamená? Brzy dokážeme, že jsou-li  $x_1$  a  $x_2$  možnými řešeními rovnice (24.1) s  $F=0$ , pak i  $x_1 + x_2$  je řešením téže rovnice! Takže obecné řešení má matematický tvar

$$x = e^{-\gamma t/2} (Ae^{i\omega_\gamma t} + Be^{-i\omega_\gamma t}). \quad (24.19)$$

Můžeme se ptát, proč jsme se namáhali ještě s druhým řešením, když první řešení bylo dobré. K čemu druhé řešení, když víme, že potřebujeme jen reálnou část? My to víme, ale „ví“ to i matematika? V případě nenulové budící síly  $F(t)$  jsme z ní udělali umělou, komplexní sílu, takže imaginární část rovnice jí byla určitým způsobem ovlivněna. Položíme-li však  $F(t) \equiv 0$ , pak naše dohoda, že  $x$  je rovno jen reálné části toho, co píšeme, je jen naší dohodou a matematické rovnice to ještě „nevědí“. Fyzikálnímu světu odpovídají reálná řešení, ale výsledek, jenž se nám dříve zdál být tak dobrý, není reálné, ale komplexní číslo. Naše rovnice „neví“, že my si libovolně vybereme jen reálnou část, a proto nám musí poskytnout i komplexně sdružené řešení,

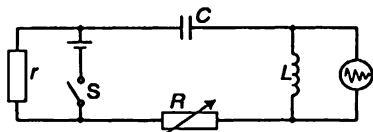
abychom, když je spojíme, dostali *skutečné reálné řešení*. Tuto úlohu splňuje  $\alpha_2$ . Aby  $x$  bylo reálné, musí být  $Be^{-i\omega_0 t}$  komplexně sdružené s  $Ae^{i\omega_0 t}$ , takže imaginární část vymizí. Pak  $B$  je komplexně sdružené s  $A$  a naše reálné řešení má tvar

$$x = e^{-\gamma t/2} \left( Ae^{i\omega_0 t} + A^* e^{-i\omega_0 t} \right). \quad (24.20)$$

Takže naším reálným řešením jsou oscilace s fázovým posunem a s tlumením – jak jsme předpokládali.

### 24.3 PŘECHODOVÉ JEVY V ELEKTRICKÝCH OBVODECH

Podívejme se, zda to, co jsme uvedli, odpovídá skutečnosti. Sestrojíme elektrický obvod znázorněný na *obr. 24.2*, kde je na osciloskop přivedeno napětí z cívky  $L$ , poté když náhle zapojíme zdroj napětí sepnutím spínače  $S$ .



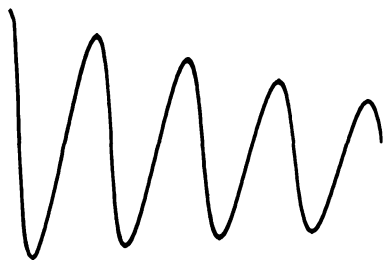
Obr. 24.2 Elektrický obvod na demonstraci přechodových jevů

Je to oscilační obvod, v němž vzniknou určité přechodové jevy. Je to podobná situace, jako když najednou zapneme budicí sílu a systém se rozkmitá. Je to elektrická analogie tlumeného mechanického oscilátoru, přičemž oscilace sledujeme na osciloskopu, na němž bychom měli vidět křivky, které jsme se pokoušeli analyzovat. (Vodorovný pohyb na osciloskopu se děje rovnoměrnou rychlostí a svislý pohyb odpovídá napětí na cívce. Zbytek obvodu je čistě technický detail. Protože setrvačnost zraku nestačí k tomu, abychom viděli jen jedinou stopu na obrazovce, experiment mnohokrát zopakujeme. Budeme zapínat a vypínat spínač, 60-krát za sekundu. Pokaždé, když ho zapneme, nastane současně i pohyb po vodorovné ose na obrazovce osciloskopu, na níž se nám křivka vykresluje znovu a znovu. Na *obr. 24.3* až *24.6* vidíme příklady tlumených oscilací vyfotografovaných z obrazovky osciloskopu. Na *obr. 24.3* jsou tlumené kmity obvodu s vysokým  $Q$ , tj. malým  $\gamma$ . Netlumí se příliš rychle a než zaniknou, vykoná obvod mnoho kmitů.

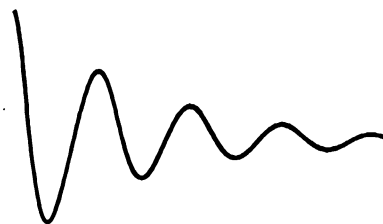
Podívejme se, co se stane, snížíme-li  $Q$ , takže oscilace zaniknou rychleji.  $Q$  můžeme snížit tím, že zvětšíme odpor  $R$ . Zvětšením odporu zaniknou oscilace rychleji (*obr. 24.4*). Když zvětšíme odpor ještě víc, zaniknou ještě rychleji (*obr. 24.5*). Zvětšíme-li však odpor nad určitou hodnotu, neuvidíme již vůbec žádné oscilace! Je otázkou, zda to není proto, že náš zrak je nedokonalý. Při větším odporu dostáváme křivku, jakou vidíme na *obr. 24.6*, na níž nejsou vidět žádné oscilace, snad až na jednu. Jak to lze matematicky vysvětlit?

Odpor je úměrný koeficientu  $\gamma$  pro mechanický oscilátor, v našem případě  $\gamma$  je  $R/L$ . Zvětšíme-li  $\gamma$  v řešeních (24.14) a (24.15), s nimiž jsme byli dosud spokojeni, vzniknou zmatky, a to tehdy, když  $\gamma/2$  začne být větší než  $\omega_0$ . Pak je musíme zapsat následujícím způsobem

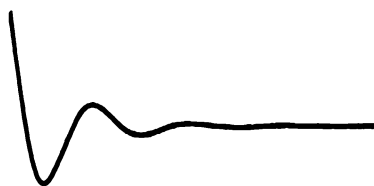
$$\alpha_1 = i \frac{\gamma}{2} + i \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \quad \text{a} \quad \alpha_2 = i \frac{\gamma}{2} - i \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}.$$



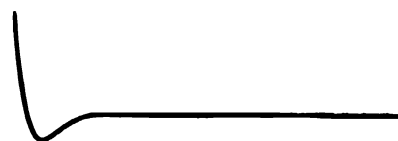
Obr. 24.3



Obr. 24.4



Obr. 24.5



Obr. 24.6

To jsou teď naše dvě řešení a stejnými matematickými úvahami znovu dostaneme, podobně jako předtím, řešení  $e^{i\alpha_1 t}$  a  $e^{i\alpha_2 t}$ . Dosazením za  $\alpha_1$  máme

$$x = A e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right) t},$$

což je krásný exponenciální útlum bez oscilací. Druhé řešení je

$$x = B e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right) t}.$$

Všimněme si, že odmocnina nemůže být větší než  $\gamma/2$ , neboť dokonce i když  $\omega_0 = 0$ , nastane jen rovnost obou členů v exponentu. Ale od  $\gamma^2/4$  se odečítá  $\omega_0^2$ , a proto je výraz v závorce vždy kladné číslo. Proč? Přece proto, že kdyby byl výraz záporný a měli bychom  $e$  umocněno na kladné číslo násobeno  $t$ , dostali bychom řešení rostoucí v závislosti na čase. Víme, že při zvětšování odporu v obvodu nebude obvod explodovat – právě naopak. Máme tedy dvě řešení, každé z nich je tlumená exponenciála, ale jedno zaniká mnohem rychleji než druhé. Obecné řešení je samozřejmě dáno kombinací těchto dvou. Koeficienty v této kombinaci závisí na tom, jak pohyb začal, jaké byly počáteční podmínky. Počátečním podmínkám našeho obvodu odpovídá záporné  $A$  a kladné  $B$ , takže máme rozdíl dvou exponenciál.

Podívejme se, jak lze najít koeficienty  $A$  a  $B$  (nebo  $A$  a  $A^*$ ), známe-li počáteční podmínky. Předpokládejme, že v čase  $t=0$  známe  $x = x_0$  a  $dx/dt = v_0$ . Dosadíme-li to do výrazů

$$x = e^{-\gamma t/2} \left( A e^{i\omega_r t} + A^* e^{-i\omega_r t} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\gamma t/2} \left[ \left( -\frac{\gamma}{2} + i\omega_r \right) A e^{i\omega_r t} + \left( -\frac{\gamma}{2} - i\omega_r \right) A^* e^{-i\omega_r t} \right],$$

protože  $e^0 = e^{i0} = 1$ , máme

$$x_0 = A + A^* = 2A_R$$

$$v_0 = \left(-\frac{\gamma}{2}\right)(A + A^*) + i\omega_\gamma(A - A^*) = -\frac{\gamma}{2}x_0 + i\omega_\gamma(2iA_I),$$

kde  $A = A_R + iA_I$  a  $A^* = A_R - iA_I$ . Takže najdeme

$$A_R = \frac{x_0}{2}, \quad A_I = \frac{\left(v_0 + \frac{\gamma}{2}x_0\right)}{2\omega_\gamma}. \quad (24.21)$$

Tak je  $A$  a  $A^*$  zcela určeno počátečními podmínkami, a tím i celková křivka řešení přechodového jevu. Řešení můžeme shodou okolností zapsat ještě jinak, všimneme-li si, že

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2 \cos \vartheta \quad \text{a} \quad e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} = 2i \sin \vartheta.$$

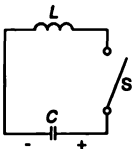
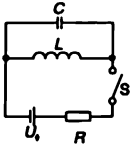
Úplné řešení můžeme pak napsat jako

$$x = e^{-\gamma t/2} \left[ x_0 \cos \omega_\gamma t + \frac{v_0 + \frac{\gamma}{2}x_0}{\omega_\gamma} \sin \omega_\gamma t \right], \quad (24.22)$$

kde  $\omega_\gamma = +\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ . To je matematické vyjádření tlumených kmitů. I když ho přímo nevyužijeme, rádi bychom zdůraznili skutečnosti, jež platí i v obecnějších případech.

Především, chování takového systému za nepřítomnosti vnější síly lze vyjádřit jako součet nebo superpozici čistě exponenciálních funkcí závislých na čase (které jsme psali jako  $e^{i\alpha t}$ ). Je to vhodný tvar, řešení, jež lze vyzkoušet za podobných okolností. Hodnoty  $\alpha$  mohou být obecně komplexní, přičemž imaginární část představuje tlumení. Nakonec, známý vztah mezi sinovou a exponenciální funkcí, jímž jsme se zabývali v kap. 22, se fyzikálně často projevuje jako přechod od oscilačního k exponenciálnímu chování, překročili nějaký fyzikální parametr (v tomto případě odpor  $\gamma$ ) určitou kritickou hodnotu.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 24.1 ■ Těleso při pohybu na vzduchovém polštáři ztrácí svou rychlost především díky vazkosti v tenké vzduchové vrstvě pod sebou, přičemž brzdící síla je úměrná rychlosti. Sestavte a řešte pohybovou diferenciální rovnici takového pohybu. Jak se rychlost tělesa mění v závislosti na čase a na vzdálenosti?
- 24.2 ■ Desky kondenzátoru o kapacitě  $C$  původně nabitého na napětí  $U_0$  jsou v okamžiku  $t = 0$  spojeny odporem  $R$ . Sestavte diferenciální rovnici pro  $U$  jako funkci  $t$ . Řešte ji za předpokladu, že existuje exponenciální řešení.
- 24.3 ■ Těleso na vzduchovém polštáři tažené silou  $F_0$  má magnet. Tento magnet při pohybu tělesa generuje smyčkové proudy, jejichž magnetická pole vyvolávají brzdící sílu úměrnou rychlosti s koeficientem úměrnosti  $\gamma$ . Určete a) jakou konečnou rychlost těleso dosáhne, b) jak se bude jeho rychlost měnit s časem, c) jak se bude jeho poloha měnit s časem, začíná-li svůj pohyb z klidu.
- 24.4 ■ Kondenzátor kapacity  $C$  a cívka indukčnosti  $L$  jsou spojeny podle obrázku. Původní napětí na kondenzátoru bylo  $U_0$  a klíč  $S$  byl ve vypnuté poloze. V okamžiku  $t = 0$  byl zapnut.
- a) Najděte napětí na kondenzátoru v závislosti na čase.  
 b) Zjistěte, jak se mění s časem veličiny  $CU^2/2$  a  $LI^2/2$ . Jaký je podle vašeho názoru fyzikální smysl těchto veličin?
- 
- 24.5 ■ V elektrickém obvodu na obrázku je klíč  $S$  na počátku zapnut. Obvodem protéká ustálený proud  $I = U_0/R$ . V okamžiku  $t = 0$  je klíč náhle vypnut. Jaké bude maximální napětí na kondenzátoru?
- 
- 24.6 ■ Těleso o hmotnosti 5,0 kg zavěšené na pružině kmitá s malým útlumem, který můžeme zanedbat. Za 10,0 s vykoná 10 úplných kmitů. Pak je uveden do chodu malý magnetický tlumič; vzniklý útlum je úměrný rychlosti. To má za následek, že amplituda se během 10 kmitů zmenší z 0,2 m na 0,1 m.
- a) Sestavte pohybovou rovnici tělesa a vyjádřete koeficienty před  $d^2x/dt^2$ ,  $dx/dt$  a  $x$  číselně v soustavě SI.  
 b) Čemu je rovna nová perioda kmitů?  
 c) Během kolika period (počínaje cyklem s amplitudou 0,2 m) klesne amplituda na 0,05 m a 0,02 m?  
 d) Čemu je rovna maximální rychlost disipace energie za první periodu po zapojení tlumiče?
- 24.7 ■ Tlumený harmonický oscilátor má podobu kuličky o hmotnosti  $m$  zavěšené na pružině tuhosti  $k$ . Pohybuje se ve vazkém prostředí, jež vyvolává třecí sílu  $-m\gamma(dx/dt)$ .
- 1) Pro případ pohybu s třením najděte řešení  $x = x(t)$  pro  $t \geq 0$ , působí-li na kuličku síla
- a)  $F = \begin{cases} 0 & \text{při } t < 0; \\ F_0 = \text{konst} & \text{při } t \geq 0 \end{cases}$ ;  
 b) na kuličku nepůsobí stálá síla, ale v okamžiku  $t = 0$  je kuličce udělena hybnost  $p = p_x$ ;  
 c)  $F = \begin{cases} 0 & \text{při } t < 0 \\ F_0 \cos \omega_0 t & \text{při } t \geq 0 \end{cases}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .
- 2) Působí-li na oscilátor síla  $F = F_0 \cos \omega t$  a uvažujeme-li dostatečně dlouhé časové intervaly, čemu bude rovna úhlová frekvence  $\omega^*$ , při níž amplituda kmitů dosahuje maximální hodnoty?

# Lineární systémy a přehled

## 25.1 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

## 25.2 SUPERPOZICE ŘEŠENÍ

## 25.3 KMITY V LINEÁRNÍCH SYSTÉMECH

## 25.4 ANALOGIE VE FYZICE

## 25.5 SÉRIOVÉ A PARALELNÍ IMPEDANCE

### 25.1 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

V této kapitole se budeme zabývat určitými aspekty oscilačních soustav, jež platí jaksi obecněji a nejen ve zvláštních systémech, o nichž jsme hovořili. Pro náš konkrétní systém jsme řešili diferenciální rovnici

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma m \frac{dx}{dt} + m \omega_0^2 x = F(t). \quad (25.1)$$

Tato konkrétní kombinace „operací“ působících na proměnnou  $x$  má zajímavou vlastnost. Když za  $x$  dosadíme  $(x + y)$ , dostaneme součet stejných operací působících na  $x$  a na  $y$ ; všude vynásobíme-li  $x$  a, dostaneme stejnou kombinaci operací  $a$ -krát. Lze to snadno dokázat. Aby nás psaní všech těchto písmen v (25.1) neunavovalo, použijeme místo toho symbol  $\mathcal{L}(x)$ . Když ho někde uvidíme, je třeba si místo něho představit levou stranu (25.1).  $\mathcal{L}(x + y)$  bude při takovém způsobu psaní znamenat

$$\mathcal{L}(x + y) = m \frac{d^2 (x + y)}{dt^2} + \gamma m \frac{d(x + y)}{dt} + m \omega_0^2 (x + y). \quad (25.2)$$

$\mathcal{L}$  někdy nazýváme operátorem, ale na pojmenování nezáleží, je to prostě „zkratka“. Naše první tvrzení bylo, že

$$\mathcal{L}(x + y) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y), \quad (25.3)$$

což samozřejmě vyplývá z faktu, že  $a(x + y) = ax + ay$ ,  $d(x + y)/dt = dx/dt + dy/dt$ , atd.  
 Naše druhé tvrzení se týkalo konstanty  $a$

$$\mathcal{L}(ax) = a\mathcal{L}(x). \quad (25.4)$$

Vztahy (25.3) a (25.4) spolu velmi těsně souvisí, neboť kdybychom do (25.3) dosadili  $x + x$ , měli bychom totéž, jako když v (25.4) bude  $a=2$  apod.

V komplikovanějších problémech se může vyskytnout více derivací a  $\mathcal{L}$  může obsahovat více členů. Je zajímavé vědět, zda obě rovnice (25.3) a (25.4) zůstanou v platnosti nebo ne. Jestliže ano, nazýváme takový problém lineárním. Abychom lépe ocenili obecnost některých výsledků, jež jsme dostali při analýze naší konkrétní rovnice, budeme se v této kapitole věnovat některým vlastnostem lineárních systémů.

Začneme studiem některých vlastností lineárních diferenciálních rovnic, když už jsme je ilustrovali na konkrétní rovnici (25.1), jíž jsme se tak podrobně zabývali. První zajímavá vlastnost je tato. Předpokládejme, že máme vyřešit diferenciální rovnici pro přechodový jev – vlastní kmity bez budící síly. Chceme tedy řešit rovnici

$$\mathcal{L}(x) = 0. \quad (25.5)$$

Předpokládejme, že nějakým způsobem jsme našli určité řešení a označme ho  $x_1$ , tj. máme  $x_1$ , pro které  $\mathcal{L}(x_1) = 0$ . Vidíme, že i  $ax_1$  je řešením této rovnice. Naše částečné řešení můžeme vynásobit jakoukoli konstantou a dostaneme nové řešení. Jinými slovy, máme-li pohyb určité „velikosti“, je dvojnásobně „velký“ pohyb opět řešením. Plyne to okamžitě z toho, že  $\mathcal{L}(ax_1) = a\mathcal{L}(x_1) = a \cdot 0 = 0$ .

Dále předpokládejme, že jsme nějak našli nejen jedno řešení  $x_1$ , ale i druhé řešení  $x_2$ . (Vzpomeňme si, že když jsme při hledání přechodových jevů dosadili  $x = e^{i\alpha t}$ , našli jsme dvě hodnoty pro  $\alpha$ , tj. dvě řešení  $x_1$  a  $x_2$ .) Nyní ukažme, že i kombinace  $(x_1 + x_2)$  je řešením rovnice. Jinými slovy, položme-li  $x = x_1 + x_2$ , je  $x$  znovu řešením rovnice. Proč? Protože je-li  $\mathcal{L}(x_1) = 0$  a  $\mathcal{L}(x_2) = 0$ , pak  $\mathcal{L}(x_1 + x_2) = \mathcal{L}(x_1) + \mathcal{L}(x_2) = 0 + 0 = 0$ . Takže, máme-li několik řešení popisujících pohyb lineární soustavy, můžeme je sčítat.

Zkombinujeme-li tyto dvě vlastnosti, vidíme, že můžeme sčítat třeba šest prvních řešení a dvě druhá řešení; je-li  $x_1$  řešení, pak i  $ax_1$  je řešení. Proto součet takovýchto dvou řešení, jako například  $(\alpha x_1 + \beta x_2)$ , je rovněž řešením. Stane-li se, že najdeme tři řešení, pak jakákoli kombinace těchto tří řešení je znovu řešením atd. Ukazuje se, že naše úloha o oscilátoru má jen dvě tzv. nezávislá řešení.<sup>33)</sup> Počet nezávislých řešení obecně závisí na tom, čemu říkáme stupně volnosti. Nebudeme to nyní podrobně rozebírat, ale máme-li diferenciální rovnici druhého řádu, existují jen dvě nezávislá řešení. My jsme je našli obě dvě, takže máme to nejobecnější řešení.

Věnujme se dalšímu tvrzení, jež se vztahuje na situaci, kdy na soustavu působí vnější síla. Předpokládejme, že příslušná nehomogenní rovnice má tvar

$$\mathcal{L}(x) = F(t), \quad (25.6)$$

a předpokládejme, že jsme našli její partikulární řešení. Petrovo řešení nechť je  $x_p$  a platí  $\mathcal{L}(x_p) = F(t)$ . Předpokládejme, že chceme najít ještě jiné řešení, a že k Petrovu řešení přidáme

<sup>33)</sup> Nezávislými se nazývají ta řešení, jež nelze navzájem vyjádřit jako lineární kombinace.

jedno z řešení homogenní rovnice pro vlastní kmity (25.5) (tj. s nulou na pravé straně), řekněme  $x_1$ . Pak podle (25.3) vidíme, že

$$\mathcal{L}(x_p + x_1) = \mathcal{L}(x_p) + \mathcal{L}(x_1) = F(t) + 0 = F(t). \quad (25.7)$$

Proto když „vynucenému“ řešení nehomogenní rovnice přidáme jakékoli „volné“ řešení homogenní rovnice, opět dostaneme řešení, jež vyhovuje nehomogenní rovnici. Volné řešení pro vlastní kmity se nazývá i přechodovým řešením.

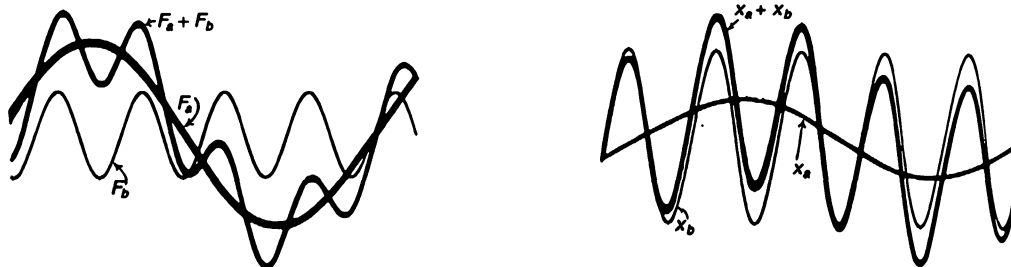
Nepůsobí-li na soustavu síla, a najednou začne působit, nedostaneme ihned ustálené řešení ve tvaru sinusové vlny, ale na nějaký čas se projeví přechodový jev, jenž se dříve nebo později utlumí. Vynucené řešení se neutlumí, neboť je udržováno v chodu vnější silou. Nakonec za dlouhou dobu zůstane jen jedno řešení, ale zpočátku se za různých okolností projeví různé pohyby v závislosti na počátečních podmínkách.

## 25.2 SUPERPOZICE ŘEŠENÍ

Dostáváme se k dalšímu zajímavému tvrzení. Předpokládejme, že máme nějakou budící sílu  $F_a$  (řekněme, že osciluje s  $\omega = \omega_a$ , ale naše závěry budou platit pro jakoukoli funkci  $F_a$ ), a že jsme našli její odpovídající vynucené řešení (nezáleží na tom, zda s přechodovými řešeními nebo bez nich). Předpokládejme dále, že máme nějakou sílu  $F_b$  a znovu vyřešíme celou úlohu pro tuto novou sílu. Někdo pak může přijít a říci: „Mám pro vás novou úlohu k řešení. Já mám sílu  $F_a + F_b$ .“ Známe řešení? Samozřejmě, že známe, neboť řešení je dáno součtem dvou řešení  $x_a$  a  $x_b$ , když síly působily každá zvlášť. To je skutečně pozoruhodná věc. Na základě (25.3) máme

$$\mathcal{L}(x_a + x_b) = \mathcal{L}(x_a) + \mathcal{L}(x_b) = F_a(t) + F_b(t). \quad (25.8)$$

To je příklad tzv. *principu superpozice* pro lineární soustavy a je velmi důležitý. Znamená, že máme-li složitou sílu, kterou lze vhodně rozložit na součet jednotlivých částí, z nichž každá je jednoduchá v tom smyslu, že pro každou z nich, umíme vyřešit pohybovou rovnici, známe řešení pro celou sílu, neboť můžeme prostě složit jednotlivá řešení stejným způsobem, jakým se celková síla skládá z jednotlivých složek (obr. 25.1).



Obr. 25.1 Příklad principu superpozice pro lineární soustavy

Uvedme další příklad na princip superpozice. V kap. 12 jsme uvedli, že jedním významným faktem zákonů elektřiny je, že máme-li nějaké rozdělení nábojů  $q_a$  a vypočítáme intenzitu

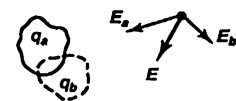


elektrického pole  $E_a$  v bodě  $P$  a na druhé straně máme jinou soustavu nábojů  $q_b$ , a vypočítáme pole  $E_b$  v témž bodě, pak jsou-li obě soustavy nábojů přítomny současně, intenzita pole  $E$  v bodě  $P$  je rovna součtu  $E_a$  od jedné soustavy nábojů plus  $E_b$  od druhé soustavy nábojů. Jinak řečeno, známe-li pole vyvolané jedním nábojem, je pole vyvolané mnoha náboji rovno vektorovému součtu polí od jednotlivých nábojů. To je přesná analogie tvrzení, že známe-li výsledek pro dvě dané síly samostatně, je řešení pro sílu rovnou součtu těchto dvou sil rovno součtu jednotlivých řešení.

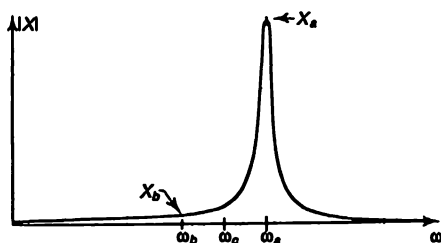
Důvod, proč to platí v elektřině, je ten, že základní zákony elektřiny – Maxwellovy rovnice – určující elektrické pole, jsou diferenciálními rovnicemi, jež jsou lineární, tj. mají vlastnost (25.3). Síle odpovídají náboje vytvářející elektrické pole a rovnice pro výpočet pole z náboje je lineární.

Jako další příklad si položíme otázku, jak je možné v rádiu naladit stanici, když současně vysílá mnoho jiných stanic. Radiovysílač v podstatě vysílá oscilující elektrické pole velmi vysoké frekvence, které působí na anténu našeho rádia. Je pravda, že amplituda oscilace pole se mění, je modulována hlasovým signálem, ale tyto změny jsou velmi pomalé a nebudeme se jimi znepokojovat. Když slyšíme: „Tato stanice vysílá na frekvenci 780 kilocyklů“, znamená to, že frekvence oscilací elektrického pole vysílačí antény je 780 000 oscilací za sekundu a toto pole vyvolává kmity elektronů v naší anténě s touto frekvencí. Ve stejném okamžiku může ve stejném městě vysílat jiná radiostanice frekvencí, řekněme, 550 kilocyklů za sekundu a elektrony v naší anténě budou kmitat i touto frekvencí. Je otázka, jak lze oddělit signály dopadající na jedno rádio s frekvencí 780 kilocyklů od signálů s frekvencí 550 kilocyklů? Určitě neslyšíme obě stanice současně.

Podle principu superpozice vznikne v rádiu, jehož první část tvoří lineární obvod, pod vlivem elektrického pole  $F_a + F_b$  proud  $x_a + x_b$ . Zdálo by se, že jednotlivá řešení nikdy nerozlišíme. Právě podle principu superpozice se zdá, že se nikdy nevyhneme tomu, aby byla přítomna obě současně. Ale vzpomeňme si, že pro rezonanční obvod má křivka závislosti  $x$  (připadajícího na jednotku  $F$ ) na frekvenci tvar jako na obr. 25.3. Má-li vstupní obvod velmi vysoké  $Q$ , bude mít křivka ostré maximum. Předpokládejme, že obě stanice jsou srovnatelně silné; obě síly mají stejnou amplitudu. Výsledný signál je roven součtu  $x_a$  a  $x_b$ . Ale  $x_a$  na obr. 25.3 je obrovské, zatímco  $x_b$  je malé. Takže navzdory tomu, že oba signály mají zpočátku stejnou intenzitu, po průchodu kvalitním rezonančním obvodem v rádiu naladěném na  $\omega_a$  (tj. frekvenci jedné ze stanic) je signál této stanice mnohem silnější než druhý signál. Při působení obou vysílačů se proto výsledný signál skládá téměř výlučně z  $\omega_a$  – vyladili jsme požadovanou stanici.



Obr. 25.2 Princip superpozice v elektrostatice



Obr. 25.3 Ostře vyladěná rezonanční křivka

Jak se vlastně stanice naladí? Ladí se tak, že změnou  $L$  nebo  $C$  v obvodu měníme  $\omega_0$ , jež závisí na  $L$  a  $C$ . Většina rádií je zkonstruována tak, že se mění kapacita. Když přeladíme rádio, bude ukazatel stanic v nové poloze. Tím dosáhneme toho, že rezonanční frekvence obvodu se posune například do  $\omega_c$ . V tom případě neslyšíme ani jednu stanicí: je ticho, samozřejmě za předpokladu, že žádná jiná stanice nevysílá na frekvenci  $\omega_c$ . Měníme-li dále kapacitu, až se rezonanční křivka dostane do  $\omega_b$ , uslyšíme druhou stanicí. Toto je princip ladění rádia – využívá se přitom princip superpozice.<sup>34)</sup>

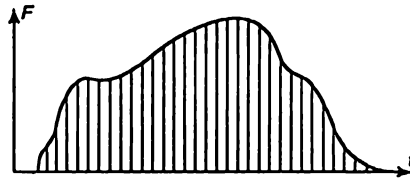
Na závěr popíšeme kvalitativně, co se stane, je-li budicí síla velmi komplikovaná. Z množství možných způsobů existují dva, zvláště užitečné, obecné způsoby řešení takového problému. Jeden je tento: Předpokládejme, že problém umíme vyřešit pro určité známé síly, jako jsou například síly s funkcí sinus ideálním průběhem různých frekvencí. Víme, že najít řešení pro sinové vlny je „dětská hračka“. Máme tedy tzv. „dětské“ případy. Otázkou je, zda by nebylo možné naši komplikovanou sílu vyjádřit jako součet dvou nebo více takových „dětských“ sil. Na obr. 25.1 jsme měli již dost komplikovanou křivku a mohli bychom ji udělat ještě složitější, kdybychom přidali další sinové vlny. Takže zcela určitě lze takto získat velmi komplikované křivky. Stejně platí i opačné tvrzení: Prakticky každou křivku lze získat složením nekonečného počtu sinových vln rozličných délek (nebo frekvencí), přičemž pro každou z nich známe řešení. Potřebujeme vědět jen to, kolik musíme vzít z každé sinové vlny, abychom dostali dané  $F$ , takže pak se řešení skládá ze součtu sinových vln, přičemž každá je vynásobena příslušným efektivním poměrem  $\times k F$ . Tato metoda řešení se nazývá metodou *Fourierových transformací* nebo *Fourierova analýza*. Tuto analýzu teď nebudeme provádět, chtěli jsme jen naznačit její princip.

Druhý, velmi zajímavý způsob, jak lze řešit náš problém, je následující. Předpokládejme, že po těžké duševní námaze by se nám podařilo vyřešit náš případ pro speciální sílu ve tvaru krátkého impulsu – síla se rychle zapne a zase vypne, a to je všechno. Stačí najít řešení jen pro impuls nějaké jednotkové velikosti a pro všechny jiné impulsy ho dostaneme, když ho vynásobíme příslušným faktorem. Víme, že řešením  $x$  pro nějaký impuls jsou tlumené kmity. Co umíme říci o řešení pro nějakou sílu, jaká je například na obr. 25.4?

Takovou sílu lze přirovnat k celé řadě úderů klavírem. Nejdříve síla není, pak najednou působí stálá síla – impuls, impuls, impuls, impuls, ... a pak přestane. Spojitou sílu si tedy představíme jako sérii impulsů následujících těsně za sebou. Výsledek pro jeden impuls známe, takže pro celou sérii impulsů dostaneme výsledek jako celou sérii tlumených oscilací. Bude to křivka odpovídající prvnímu impulsu, pak (o něco později) k ní přičteme křivku druhého impulsu, pak třetího atd. Tak umíme matematicky vyjádřit úplné řešení pro libovolné funkce, známe-li řešení pro nějaký impuls. Řešení pro libovolnou sílu dostaneme prostě integrací. Je to tzv. metoda Greenových funkcí. Greenova funkce je řešením pro impuls a metoda analýzy pomocí skládání řešení pro impulsy se nazývá *metodou Greenových funkcí*.

Fyzikální principy obsažené v obou těchto schématech jsou jednoduché – jde jen o lineární rovnice – lze je snadno pochopit. Ale matematické problémy s tím spojené (komplikované integrace apod.) jsou pro nás zatím dost obtížné, abychom se jim nyní věnovali. Vraťte se k nim nejpravděpodobněji poté, co budete lépe ovládat matematiku. Ale podstata je tu skutečně velmi jednoduchá.

<sup>34)</sup> V moderních superheterodynových přijímačích je ladění složitější. Všechny stupně jsou naladěny na konstantní frekvenci (tzv. mezifrekvenci MF) a vstupní signál se směšuje v nelineárním obvodu s frekvencí laditelného oscilátoru, čímž vzniká nová frekvence (rozdíl frekvencí vstupního signálu a laditelného oscilátoru), jež je rovna mezifrekvenci, a ta se pak zesiluje. Budeme se tím zabývat v kap. 50.



Obr. 25.4 Na složitou sílu se lze dívat jako na sled ostrých pulzů

Nakonec ještě několik poznámek o tom, proč jsou lineární systémy tak důležité. Odpověď je jednoduchá: Protože je umíme řešit! Proto většinou řešíme lineární problémy. Jak se ukazuje, je druhý a nejdůležitější důvod ten, že základní fyzikální zákony jsou často lineární. Například Maxwellovy rovnice zákonů elektřiny jsou lineární. Velké zákony kvantové mechaniky, jak se zatím ukazuje, jsou vyjádřeny rovněž lineárními rovnicemi. Proto jsme věnovali tolik času lineárním rovnicím. Rozumíme-li lineárním rovnicím, můžeme v zásadě pochopit mnoho věcí.

Zmíníme se ještě o jedné situaci, kdy se rovněž setkáváme s lineárními rovnicemi. Při malých výchylkách lze mnohé funkce lineárně aproximovat. Například, přesná pohybová rovnice obyčejného kyvadla je

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = - \left( \frac{g}{L} \right) \sin \vartheta. \quad (25.9)$$

Tuto rovnici lze řešit pomocí eliptických funkcí, ale nejsnadněji ji vyřešíme numericky, jak jsme to uvedli v kap. 9 u Newtonových zákonů pohybu. Nelineární rovnici nelze obvykle řešit jinak, než numericky. Pro malé  $\vartheta$  je  $\sin \vartheta$  prakticky rovno  $\vartheta$ , takže pak máme lineární rovnici. Ukazuje se, že malé efekty jsou často lineární – například pohyb kyvadla při malých úhlech. Jako další příklad vzpomeňme pružinu. Jestliže ji mírně natahujeme, je síla úměrná jejímu prodloužení. Zatáhneme-li za ni silně, přetrhne se a síla je zcela jinou funkcí vzdálenosti! Lineární rovnice jsou důležité. Ve skutečnosti jsou tak důležité, že snad padesát procent času ve fyzice a v technice věnujeme řešení lineárních rovnic.

## 25.3 OSCILACE V LINEÁRNÍCH SYSTÉMECH

Nyní shrňme to, o čem jsme hovořili v několika posledních kapitolách. Fyziku kmitavých pohybů lze velmi snadno zastínit matematikou. Je to velmi jednoduchá fyzika, a zapomeneme-li na chvíli na matematiku, uvidíme, že dokážeme pochopit téměř všechno, co se děje v kmitavých soustavách. Za prvé, máme-li pružinu se závažím, velmi snadno lze pochopit, proč systém kmitá – je to následek setrvačnosti. My stáhneme závaží dolů a pružina ho vytáhne zpět nahoru; když prochází nulou, svou rovnovážnou polohou, nemůže se najednou zastavit; protože má určitou hybnost, pokračuje v pohybu až se vychýlí na druhou stranu, a tak se pohybuje sem a tam, takže kdyby neexistovalo tření, mohli bychom očekávat kmitavý pohyb, jenž skutečně také nastává. Existuje-li však sebestačné tření, nebude výchylka na zpáteční dráze tak velká, jako na začátku.

Co se děje v cyklech následujících za sebou? Zavisí to na druhu tření a na velikosti tření. Předpokládejme, že vymyslíme takové tření, jež se při změně amplitudy mění ve stejném poměru k ostatním silám, setrvačné síle a síle pružiny. Jinak řečeno, pro malé kmity by mělo být tření slabší než pro velké kmity. Obyčejné tření nemá tuto vlastnost, takže by muselo jít o nějaký nový

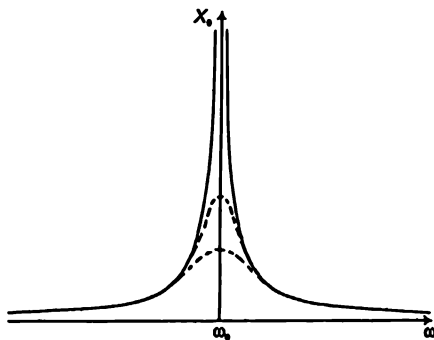
druh tření, které by bylo úměrné výchylce, proto pro velké kmity by bylo silnější a pro malé kmity slabší. Kdybychom měli tření takového druhu, nacházel by se systém po každém následujícím cyklu ve stejném stavu, jako byl na začátku, jenže o něco menším. Všechny síly se zmenšily ve stejném poměru: síla pružiny je slabší, vliv setrvačnosti je menší, neboť zrychlení jsou menší a tření je samozřejmě rovněž menší. Zjistíme, že při takovém druhu tření je každý kmit přesně stejný jako byl první kmit, jenomže má menší amplitudu. Jestliže za dobu prvního cyklu klesla amplituda, řekněme, na 90% toho, jaká byla na začátku, pak za dobu dalšího cyklu klesne na 90% z 90% atd. – *velikosti kmitů se po každém cyklu zmenší ve stejném poměru*. Tomuto průběhu vyhovuje exponenciála. Za stejný časový interval se změní ve stejném poměru. Znamená to, že je-li poměr amplitudy k amplitudě v předcházejícím cyklu  $a$ , bude následující amplituda dána poměrem  $a^2$ , ještě delší  $a^3$ . Takže amplituda je rovna nějaké konstantě umocněné na počet prošlých cyklů:

$$A = A_0 a^n. \quad (25.10)$$

Ale samozřejmě, že  $n$  je úměrné  $t$ , takže je zcela jasné, že obecným řešením budou nějaké oscilace (sinus nebo kosinus  $\omega t$ ) krát amplituda, která se mění více méně jako  $b^t$ , ale blže napsat jako  $e^{-c}$  pro  $b$  kladné a menší než 1. Takže to je důvod, proč má řešení tvar  $e^{-ct} \cos \omega t$ . Je to velmi prosté.

Co se stane, když tření nebude tak umělé; například obyčejné tření o stůl, takže tření je konstantní a nezávislé na velikosti oscilací, jež mění svůj směr po každém polocyklu? V tom případě už rovnice není lineární, těžko ji lze řešit, a proto je třeba ji řešit numerickou metodou uvedenou v kap. 2 nebo zvlášť pro každý polocyklus. Numerická metoda je nejučinnější ze všech. Umožňuje vyřešit jakoukoli rovnici. Matematickou analýzu můžeme použít jen u jednoduchých problémů.

Matematická analýza není tak ohromný nástroj, jak se často říká; řeší jen nejjednodušší možné rovnice. Jakmile se rovnice stávají jen o trochu komplikovanějšími, nelze je řešit analyticky. Numerická metoda, s níž jsme se seznámili na začátku přednášek, dokáže vyřešit jakoukoli fyzikálně zajímavou rovnici.



Obr. 25.5 Rezonanční křivky za přítomnosti různých velikostí tření

Co lze říci o rezonanční křivce? Proč existuje rezonance? Představme si na okamžik, že není tření, a že máme nějaké kyvadlo, jež může kývat samo od sebe. Ťukneme-li do kyvadla vždy v pravou chvíli, můžeme ho dostat do prudkých oscilací. Co se však stane, zavřeme-li oči a budeme do něho ťukat v libovolných pravidelných intervalech? Stane se, že někdy do něho

útkneme právě tehdy, kdy jde špatným směrem. Když se nám podaří najít správný rytmus, každé útknutí se uskuteční v pravý okamžik a kmity budou větší a větší. Takže za nepřítomnosti tření dostaneme závislost na frekvenci, která je podobná plné čáře na obr. 25.5. Kvalitativně jsme pochopili rezonanční křivku; abychom dostali její přesný tvar, je třeba si pomoci matematikou. Křivka stoupá do nekonečna pro  $\omega \rightarrow \omega_0$ , kde  $\omega_0$  je vlastní frekvence oscilátoru.

Nyní předpokládejme, že na oscilátor působí slabé tření. Při malých výchylkách se jeho vliv příliš neprojeví. Rezananční křivka je stejná, vyjma oblasti blízko rezonance. Místo toho, aby v blízkosti rezonance stoupala do nekonečna, stoupne tak, že práce, kterou vykonáme při každém útknutí, kompenzuje ztráty v důsledku tření při každém cyklu. Vrchol křivky je proto zaoblený – nejde donekonečna. Při větším tření se vrchol křivky zaoblí ještě více. Někdo může říci: „Myslel jsem si, že šířky křivek závisí na velikosti tření.“ Je to proto, že obvykle se tyto křivky kreslí tak, že se bere jako jednotková jejich výška. Jejich matematické vyjádření lze snadněji pochopit, jestliže se všechny nakreslí ve stejném měřítku – jediné, co tření způsobí je, že se sníží jejich maxima. Je-li tření menší, vrcholek se poněkud zvedne a křivka se stane užší.

Nakonec si vezmeme případ, kdy je tření velmi velké. Je-li tření příliš velké, systém vůbec neosciluje. Energie pružiny sotva stačí k překonání tření, takže systém se pomalu vrátí do rovnovážné polohy.

## 25.4 ANALOGIE VE FYZICE

V tomto přehledu chceme ještě poukázat na to, že závaží a pružiny nejsou jedinými lineárními systémy, ale že existují i jiné lineární systémy. Tak například existují určité elektrické systémy, tzv. lineární obvody, které tvoří úplnou analogii mechanických systémů. Zatím jsme přesně nevysvětlili, proč se jednotlivé prvky v elektrickém obvodu chovají tak, jak se chovají – v tuto chvíli nás to nezajímá. Že se chovají tak, jak jsme uvedli, je experimentálně ověřitelný fakt.

Vezměme nejjednodušší možný příklad. Mějme kousek drátu, což je vlastně nějaký odpor, a připojme ho na nějaký rozdíl potenciálů  $U$ . Smysl  $U$  je tento: přeneseme-li náboj  $q$  z jednoho konce drátu na druhý konec, je vykonaná práce rovna  $qU$ . Čím je vyšší napětí, tím větší práce se vykonala při přechodu nábojů z konce drátu s vysokým potenciálem na konec s nízkým potenciálem. Takže náboje při přechodu z jednoho konce na druhý uvolňují energii. Náboje však prostě neproběhnou z jednoho konce drátu na druhý; atomy v drátu představují pro proud určitý odpor, přičemž téměř pro všechny běžné látky platí zákon: proud  $I$ , tj. určité množství nábojů, jež projde vodičem za jednotku času, je úměrné tomu, jaká síla na ně působí – jinými slovy, je úměrné velikosti přiloženého napětí

$$U = IR = R \frac{dq}{dt} \quad (25.11)$$

Koeficient  $R$  se nazývá odpor a uvedená rovnice Ohmův zákon. Jednotkou odporu je jeden ohm; je roven jednomu voltu na ampér. V mechanice lze takovou sílu tření úměrnou rychlosti těžko realizovat; ale v elektrických obvodech je to velmi snadné a pro většinu kovů platí Ohmův zákon mimořádně přesně.

Často potřebujeme znát práci vykonanou za sekundu, neboli výkon, nebo energii uvolněnou náboji postupujícím podél drátu. Přenesením náboje  $q$  napětím  $U$  se vykoná práce  $qU$ , takže práce vykonaná za sekundu pak bude  $U dq/dt$ , což je totéž jako  $U \cdot I$  neboli  $IR \cdot I = I^2 R$ . To je

tzv. tepelný výkon – množství tepla, jež se podle zákona zachování energie uvolnilo v odporu za sekundu. Je to například teplo, které způsobuje žhavení vlákna v obyčejné žárovce.

Mechanické systémy mají i jiné zajímavé vlastnosti, například setrvačnou hmotnost, a ukazuje se, že existuje i její elektrická analogie. Lze vyrobit takovou elektrickou součástku, tzv. indukční cívku, jejíž významná vlastnost se nazývá indukčnost. Když v ní vznikne proud, nechce se zastavit. K jeho změně je třeba napětí! Je-li proud stálý, na cívce napětí nevzniká, a proto pro stejnosměrný proud indukčnost jakoby neexistuje. Začíná se projevovat jen při změnách proudu. Platí pro ni rovnice

$$U = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2} \quad (25.12)$$

a jednotka indukčnosti je jeden henry. Tato jednotka je definována tak, že napětí jednoho voltu způsobí v cívce s indukčností jednoho henry změnu proudu jednoho ampéru za sekundu. Rovnici (25.12) můžeme považovat za analogii Newtonova zákona pro elektřinu;  $U$  odpovídá  $F$ ,  $L$  odpovídá  $m$  a  $I$  odpovídá rychlosti  $V$  obou systémech, v mechanickém i v elektrickém, se stejně odvodí všechny další rovnice, neboť jedny z druhých můžeme dostat jednoduchou záměnou odpovídajících symbolů. Vše, co odvodíme v jednom systému, bude platit pro oba systémy.

Co z elektřiny odpovídá mechanické pružině, pro niž se síla zvětšovala úměrně prodloužení? Vyjdeme-li z rovnice  $F = kx$  a zaměníme  $F \rightarrow U$  a  $x \rightarrow q$ , dostaneme  $U = \alpha q$ . Taková součástka existuje a je jediná ze tří prvků elektrického obvodu, kterou umíme skutečně pochopit, neboť soustavu dvou paralelních desek jsme již studovali. Zjistili jsme, že jestliže na deskách byly stejné náboje opačných znamének, byla intenzita elektrického pole mezi nimi úměrná velikosti nábojů, Práce vykonaná přenesením jednotkového náboje z jedné desky na druhou je přesně úměrná náboji na deskách. Tato práce je definicí rozdílu potenciálů a je rovna dráhovému integrálu intenzity elektrického pole z jedné desky na druhou. Konstanta úměrnosti se z historických důvodů neoznačuje  $C$ , ale  $1/C$ . Bylo by dobré ji označit  $C$ , ale nestalo se tak. Takže máme

$$U = \frac{q}{C}. \quad (25.13)$$

Jednotkou kapacity  $C$  je farad. Náboj velikosti jednoho coulombu na každé z desek jednofaradového kondenzátoru vyvolá napětí jednoho voltu.

To jsou naše analogie a rovnicí odpovídající rezonančnímu obvodu dostaneme přímo dosazením  $L$  za  $m$ ,  $q$  za  $x$  atd.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma m \frac{dx}{dt} + kx = F, \quad (25.14)$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U. \quad (25.15)$$

Vše, co jsme zjistili o (25.14), lze přetransformovat a aplikovat na (25.15). Každý následek je stejný do té míry, že můžeme provést jednu skvělou věc.

Předpokládejme, že máme dost komplikovaný mechanický systém, ne jen závaží na pružině, ale několik závaží na několika pružinách, vše vzájemně propojeno. Co uděláme? Budeme řešit rovnice? Lze postupovat i tak, ale můžeme sestavit elektrický obvod, pro který budou platit

stejně rovnice jako pro mechanický systém! Chceme-li například analyzovat pohyb závaží na pružině, proč bychom nesestrojili takový elektrický obvod, v němž použijeme indukčnost úměrnou hmotností závaží, odpor úměrný  $m\gamma$  a  $1/C$  úměrné  $k$ , vše ve stejném poměru? Takový elektrický obvod bude přesnou analogií mechanického kmitavého systému v tom smyslu, že přesně tak, jak se mění  $q$  v závislosti na  $U$  (přičemž  $U$  je zvoleno tak, aby mělo stejný průběh jako má mechanická síla), bude se měnit  $x$  v závislosti na síle! Proto máme-li komplikovaný systém s množstvím vzájemně spojených součástí, můžeme ho imitovat použitím množství vzájemně spojených odporů, indukčních cívek a kondenzátorů. Jakou to má výhodu? Jeden problém je přesně tak obtížný (nebo snadný) jako druhý, neboť jsou zcela ekvivalentní. Výhodou není to, že by *matematické rovnice* pro elektrický obvod bylo možné řešit snadněji, ale to, že elektrický obvod lze snadněji sestavit a snadněji v něm lze něco změnit.

Předpokládejme, že jsme zkonstruovali automobil a chceme zjistit, jak se bude chvět při jízdě po nějaké hrbolaté cestě. Sestavíme elektrický obvod s indukčnostmi představujícími setrvačnost kol, tuhost pružin nahradíme kapacitami představujícími odpružení kol, odpory budou představovat tlumiče. Ještě potřebujeme hrbolitou cestu. Tu nahradí generátor, jehož napětí bude tvarováno tak, aby odpovídalo některým hrbolům na cestě, a pak můžeme sledovat, jak nadskakuje levé kolo, tím, že měříme náboj na příslušném kondenzátoru. Dejme tomu, že měřením (jež je velmi jednoduché) zjistíme, že kolo příliš kmitá. Potřebujeme silnější nebo slabší tlumiče? Rozmontujeme takovou komplikovanou věc jako je auto, vyměníme v něm tlumiče a zkusíme to znovu? Ne! Prostě otočíme knoflíkem a nastavíme na stupnici jinou hodnotu odporu; číslo 10 na stupnici odpovídá tlumiči č. 3, a tak zvětšíme tlumení. Kmitání se zhoršilo – v pořádku, zkusíme tlumení zmenšovat. Kmitání je ještě horší; změníme tuhost pružiny (nastavením čísla 17) a takto elektricky nastavíme všechny parametry obyčejným otáčením knoflíků.

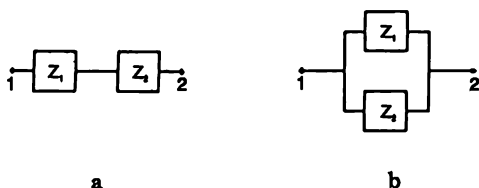
Tomu se říká analogový počítač. Je to zařízení, s jehož pomocí se systém, který chceme zkoumat, modeluje jiným systémem popsaným stejnými rovnicemi. Takovéto zařízení lze snadněji postavit, měřit, přizpůsobovat a zlikvidovat!

## 25.5 SÉRIOVÉ A PARALELNÍ IMPEDANCE

Nakonec tu máme ještě jeden důležitý bod, který tak úplně nepatří k tématu tohoto přehledu. Týká se elektrických obvodů s více než jedním prvkem. Vidíme například, že v obvodu obsahujícím indukční cívku, odpor a kondenzátor (např. na *obr. 24.2*) prochází náboj všemi třemi prvky, takže proud v takto jedinečně propojené soustavě je stejný ve všech bodech obvodu. Protože proud je v každém prvku stejný, napětí na  $R$  je  $IR$ , napětí na  $L$  je  $L dI/dt$  atd., takže celkový úbytek napětí je roven součtu jednotlivých napětí, což vede k rovnici (25.15). Metodou komplexních čísel jsme našli ustálené řešení pro pohyb vybuzený sinusoidální silou. Tak jsme zjistili, že  $\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}$ , kde  $\hat{Z}$  je impedance tohoto obvodu. Znamená to, že při zapojení sinusoidálního napětí  $\hat{U}$  dostaneme proud  $\hat{I}$ .

Nyní předpokládejme, že máme složitější obvod, skládající se ze dvou částí, jež samy mají nějaké impedance  $\hat{Z}_1$  a  $\hat{Z}_2$ . Zapojme je do série a zapneme napětí  $\hat{U}$  (*obr. 25.6a*). Co se stane? Nyní je to o něco složitější, ale jestliže proud procházející  $\hat{Z}_1$  je  $\hat{I}$ , bude napětí na  $\hat{Z}_1$  rovno  $\hat{U}_1 = \hat{I}\hat{Z}_1$ , a podobně, napětí na  $\hat{Z}_2$  bude  $\hat{U}_2 = \hat{I}\hat{Z}_2$ . *Oběma částmi teče stejný proud.* Celkové napětí je pak rovno součtu napětí na jednotlivých částech a máme  $\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 = (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)\hat{I}$ .

## SÉRIOVÉ A PARALELNÍ IMPEDANCE



Obr. 25.6 Sériové a paralelní zapojení dvou impedancí

To znamená, že celkové napětí na obvodu lze napsat jako  $\hat{U} = \hat{I} \hat{Z}_s$ , kde  $\hat{Z}_s$  je celková impedance sériového obvodu a je rovna součtu impedancí jednotlivých částí:

$$\hat{Z}_s = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2. \quad (25.16)$$

To není jediný způsob, jak lze zapojovat součástky. Můžeme je zapojit i paralelně (obr. 25.6b). Vidíme, že jsou-li spojovací vodiče dokonale vodivé, je na obě impedance připojeno stejné napětí, což nezávisle způsobí proud v každé z nich. Proto proud tekoucí  $\hat{Z}_1$  je roven  $\hat{I}_1 = \hat{U} / \hat{Z}_1$ . Proud tekoucí  $\hat{Z}_2$  je  $\hat{I}_2 = \hat{U} / \hat{Z}_2$ . *Napětí je stejné.* Celkový napájecí proud je roven součtu proudů v jednotlivých částech:  $\hat{I} = \hat{U} / \hat{Z}_1 + \hat{U} / \hat{Z}_2$ , což lze napsat jako

$$\hat{U} = \frac{\hat{I}}{\frac{\hat{I}}{\hat{Z}_1} + \frac{\hat{I}}{\hat{Z}_2}} = \hat{I} \hat{Z}_p,$$

takže

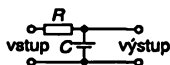
$$\frac{1}{\hat{Z}_p} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}. \quad (25.17)$$

Složitější obvody lze někdy zjednodušit tím, že se rozdělí na jednotlivé části, najdou se jejich impedance, jež se pak postupně kombinují podle uvedených pravidel. Pro obvody s mnoha impedancemi navzájem různě pospojovanými a obsahujícími zdroje ve formě malých generátorů bez impedancí (při průchodu náboje generátorem mu generátor dodá energii  $qU$ ) platí tato pravidla: 1. V každém uzlu je součet proudů roven nule (tj. všechny přitékající proudy musí i odtékat). 2. Při přenesení náboje podél kterékoli uzavřené smyčky je vykonaná práce rovna nule. Toto jsou tzv. *Kirchhoffovy zákony* pro elektrické obvody. Jejich systematickou aplikací lze často zjednodušit analýzu složitých obvodů. Uvádíme je ve spojení s rovnicemi (25.16) a (25.17) pro případ, že byste potřebovali analyzovat složitější obvody v laboratorních cvičeních. Podrobněji se jimi budeme zabývat příští rok.

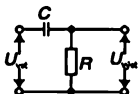


## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 25.1 ■ K potlačení střídavých složek napětí snímaného z usměrňovače se používá filtr. V nejjednodušším případě se skládá z rezistoru ( $R = 10^3 \Omega$ ) spojeného s kondenzátorem ( $C = 10 \mu\text{F}$ ) tak, jak je ukázáno na obrázku. Najděte napětí na výstupu kondenzátoru, má-li vstupní napětí konstantní složku  $U_0$  a proměnnou složku s frekvencí  $120 \text{ s}^{-1}$  a amplitudou  $U_2$ .



- 25.2 ■ V mnoha případech je žádoucí mít k dispozici elektrický obvod, který derivuje funkci popisující průběh vstupního napětí podle času. Takový jednoduchý obvod je na obrázku. Ukažte, že při zanedbání proudu protékajícího na výstupu bude výstupní napětí takového obvodu za podmínky  $|U_{\text{výst}}| \ll |U_{\text{vst}}|$  rovno  $U_{\text{výst}}(t) = RC \frac{dU_{\text{vst}}}{dt}$ .



- 25.3 ■ Najděte  $U_{\text{výst}}$  obvodu na předchozím obrázku pro případ, kdy  $U_{\text{vst}} = U_0 \cos \omega t$  a znovu ověřte správnost výsledku úlohy 25.2.

- 25.4 ■ Navrhněte jednoduchý obvod, jenž by integroval vstupní napětí a posuďte jeho vlastnosti.

- 25.5 ■ Těleso o hmotnosti  $m$  upevněné dvěma stejnými vodorovnými pružinkami tuhostí  $k/2$  klouže na desce stolu. Předpokládá se, že koeficient tření je konstantní. Těleso posuneme stranou o vzdálenost  $A$  vpravo od střední polohy a uvolníme.

a) Sestavte pohybovou diferenciální rovnici tělesa a řešte ji v časovém intervalu

$$0 < t < \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

b) Jaká musí být vzdálenost  $A$ , aby rozkmit tělesa zůstal větší než vzdálenost  $B$  od středu po průchodu bodem  $x = 0$   $n$ -krát, kde  $n$  je celé číslo?



# O ptika: Princip nejkratšího času

---

## 26.1 SVĚTLO

## 26.2 ODRAZ A LOM

## 26.3 FERMATŮV PRINCIP NEJKRATŠÍHO ČASU

## 26.4 POUŽITÍ FERMATOVA PRINCIPU

## 26.5 PŘESNĚJŠÍ FORMULACE FERMATOVA PRINCIPU

## 26.6 JAK TOMU ROZUMĚT

### 26.1 SVĚTLO

Začínáme první z několika kapitol na téma *elektromagnetické záření*. Světlo, pomocí něhož vidíme, je jen jednou nepatrnou součástí rozsáhlého spektra jevů stejného druhu. Různé části tohoto spektra se liší různými hodnotami určité proměnné veličiny. Tuto veličinu můžeme nazvat vlnová délka. Podle její změny ve viditelném spektru mění světlo svou barvu od červené po fialovou. Zkoumáme-li spektrum systematicky směrem od dlouhých vlnových délek ke kratším, začneme tím, čemu obvykle říkáme rádiové vlny. Rádiové vlny jsou technicky dostupné v širokém rozsahu vlnových délek a některé jsou dokonce delší než ty, jež se používají při běžném vysílání; běžné vysílače používají vlnovou délku kolem 500 metrů. Dále existují krátké vlny, radarové vlny, pak milimetrové vlny atd. Skutečné hranice mezi jedním rozsahem vlnových délek a druhým rozsahem neexistují, protože příroda nás neobdaňuje ostrými rozhraními. Číselné údaje přiřazené jednotlivým názvům vln jsou jenom přibližné a to samozřejmě platí i o názvech, které dáváme různým vlnovým rozsahům.

Daleko pod milimetrovými vlnami nacházíme *infračervené* vlny a potom viditelné spektrum. Ještě dál se dostaneme do oblasti, jíž říkáme *ultrafialová*. Tam, kde tato oblast končí, začínají rentgenové paprsky, ale kde to přesně je, nemůžeme definovat; je to asi při  $10^{-8}$  m neboli  $10^{-2}$   $\mu$ m. To jsou měkké rentgenové paprsky; dále jsou tam normální rentgenové paprsky a velmi tvrdé rentgenové paprsky; dále paprsky gama, a tak můžeme postupovat ke stále menším a menším hodnotám veličiny nazvané vlnová délka.

V tomto obrovském rozsahu vlnových délek se nacházejí tři nebo i více oblastí aproximací, jež jsou zvláště zajímavé. V jedné z nich platí podmínka, že příslušné vlnové délky jsou velmi malé ve srovnání s rozměry zařízení, jež se používají pro jejich studium; dále, že energie fotonů, použijeme-li kvantovou teorii, jsou malé ve srovnání s energetickou citlivostí zařízení. Za těchto podmínek můžeme udělat první aproximaci pomocí *geometrické optiky*. Na druhé straně, jsou-li vlnové délky srovnatelné s rozměry zařízení (čehož lze obtížně dosáhnout s viditelným světlem, ale lépe s radiovlnami) a jsou-li energie fotonů stále zanedbatelně malé, lze použít velmi užitečnou aproximaci *vlnové optiky*, bez přihlídnutí ke kvantové mechanice. Tato metoda se zakládá na klasické teorii elektromagnetického záření, kterou si probereme v některé další kapitole. Přejdeme-li k velmi krátkým vlnám, kde si nemůžeme všimnout vlnových vlastností a kde fotony mají velkou energii ve srovnání s citlivostí zařízení, celá věc se opět zjednoduší. To je jednoduchá *fotonová představa*, kterou si popíšeme jen přibližně. Celkový obraz, který všechno spojuje do jednoho modelu, nebudeme mít ještě dlouho k dispozici.

V této kapitole se omezíme na oblast geometrické optiky, v níž zapomeneme na vlnovou délku a na fotonový charakter světla, jímž se budeme zabývat později. Nedáme si dokonce ani tu námahu, abychom řekli, co to je světlo, pouze zjistíme, jak se chová v oblastech mnohem větších než je vlnová délka. Toto všechno je třeba říct, abychom zdůraznili skutečnost, že to, o čem budeme mluvit, je jen hrubá aproximace; je to jedna z kapitol, kterou se budeme muset zase „odnaučit“. Uděláme to však velmi rychle, neboť téměř ihned přejdeme k metodě, jež je přesnější.

I když geometrická optika je jen aproximací, je důležitá pro techniku a historicky je velmi zajímavá. Proto ji budeme prezentovat více historicky, než jiné předměty, abychom si udělali představu o rozvoji fyzikální teorie, fyzikálního názoru.

Světlo je, samozřejmě, každému známé, a tak to bylo od nepaměti. Jedna otázka zní, jak vlastně světlo vidíme. O této problematice existovalo mnoho teorií, které se nakonec shodly na jednom, že totiž existuje něco, co vchází do oka – a vytváří v něm obraz předmětů. Toto vysvětlení jsme slyšeli tak dávno, že ho přijímáme a téměř si nemůžeme představit, že skutečně inteligentní lidé mohli předložit opačné teorie – např. že něco vychází z oka, co „ohmatává“ předměty. Z některých dalších důležitých pozorování vyplývá, že jak světlo letí z místa na místo, pohybuje se přímočaře (pokud mu nic nestojí v cestě) a že světelné paprsky navzájem neinterferují. To znamená, že světlo v místnosti prochází všemi směry, ale světlo, které křížuje směr našeho vidění, neovlivní to světlo, které k nám přichází od nějakého předmětu. To byl kdysi nejsilnější argument proti korpuskulární teorii světla, jež použil Huygens. Kdyby bylo světlo množstvím souběžně letících šípů, jak by jiné šípů mohly jím tak hladce proniknout? Takové filozofické argumenty však nemají velkou váhu. Můžeme stejně tak tvrdit, že světlo se skládá z šípů, jež se mohou vzájemně pronikat!

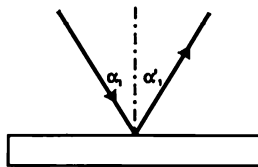
## 26.2 ODRAZ A LOM

Předcházející diskuze nám dala základní představu o geometrické optice: nyní musíme jít trochu dále ke kvantitativním vlastnostem. Dosud máme jen světlo letící po přímkách mezi dvěma body. Nyní studujme vlastnosti světla, když naráží na různé materiály. Nejjednodušším objektem je zrcadlo. Platí pro něj zákon, že naráží-li světlo na zrcadlo, nepokračuje dále po přímce, ale odráží se od zrcadla ve směru jiné přímky, která se mění, měníme-li sklon zrcadla. Otázkou pro lidi ve starověku bylo, jaký je vztah mezi dvěma úhly, jež charakterizují takový odraz.

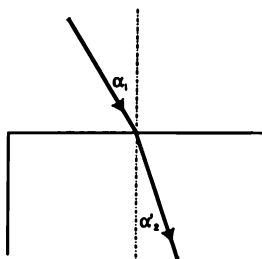
Je to velmi jednoduchý vztah, jenž byl objeven dávno. Světlo dopadající na zrcadlo se odráží takovým způsobem, že oba úhly mezi každým paprskem a zrcadlem jsou stejné. Z nějakých důvodů je zvykem měřit úhly od kolmice k povrchu zrcadla. Vztah nazývaný zákon odrazu má tvar

$$\alpha_1 = \alpha'_1 \quad (26.1)$$

To je dostatečně jednoduchá poučka. S větším problémem se však setkáváme při přechodu světla z jednoho prostředí do druhého, například při přechodu ze vzduchu do vody; zde také vidíme, že světlo nepokračuje v pohybu po téže přímce. Ve vodě je paprsek odkloněn od směru své dráhy, kterou měl ve vzduchu. Změníme-li úhel  $\alpha_1$  tak, že paprsek dopadá téměř kolmo, úhel lomu není tak velký, ale když paprsek dopadá pod velkým úhlem, úhel odklonu je velmi velký. Otázkou je, jaký vztah platí mezi těmito úhly? To také dlouho znepokojovalo lidi ve starověku a nikdy na to nenašli odpověď! Klaudios Ptolemaios však sestavil seznam úhlů ve vodě pro různé úhly ve vzduchu. Je to jedno z mála míst z celé řecké fyziky, kde lze najít nějaké experimentální výsledky. V tabulce 26.1 jsou uvedeny úhly pro vzduch (ve stupních) a jim odpovídající úhly naměřené pro vodu. (Říká se, že řečtí vědci nikdy neprováděli žádné experimenty, ale získat takovou tabulku hodnot bez znalosti správného zákona je možné pouze experimentálně. Je však třeba si všimnout, že tyto hodnoty nepředstavují výsledky nezávislých pozorných měření pro každý úhel, ale jen čísla získaná interpolací z několika měření, neboť všechny leží přesně na parabole.)



Obr. 26.1 Úhel dopadu je roven úhlu odrazu



Obr. 26.2 Světelný paprsek se láme při přechodu z jednoho prostředí do druhého

To je tedy jeden z důležitých stupňů ve vývoji fyzikálního zákona: Nejdříve pozorujeme nějaký jev, dále ho měříme a sestavíme si tabulku a potom se pokoušíme najít pravidlo, pomocí něhož lze spojit jeden poznatek s druhým. Tabulka 26.1 byla sestavena v roce 140 n. l., avšak až r. 1621 bylo nalezeno pravidlo spojující tyto dva úhly. Toto pravidlo, objevené holandským matematikem Willebrordem Snellesem, zní: Je-li úhel ve vzduchu  $\alpha_1$  a úhel ve vodě  $\alpha_2$ , sinus  $\alpha_1$  je roven nějakému konstantnímu násobku sinu  $\alpha_2$

$$\sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2 \quad (26.2)$$

Číslo  $n$  je pro vodu přibližně 1,33. Rovnice (26.2) se nazývá *Snellův zákon*. Dovoluje nám předpovědět, jak se světlo láme při přechodu ze vzduchu do vody. *Tabulka 26.2* uvádí úhly ve vzduchu a ve vodě podle Snellova zákona. Všimněte si pozoruhodné shody s Ptolemaiovými hodnotami.

Tabulka 26.1

Úhel ve vzduchu	Úhel ve vodě
10°	8°
20°	15,5°
30°	22,5°
40°	29°
50°	35°
60°	40,5°
70°	45,5°
80°	50°

Tabulka 26.2

Úhel ve vzduchu	Úhel ve vodě
10°	7,5°
20°	15°
30°	22°
40°	29°
50°	35°
60°	40,5°
70°	45°
80°	48°

### 26.3 FERMATŮV PRINCIP NEJKRATŠÍHO ČASU

Při dalším rozvíjení vědy chceme víc než jen matematickou formuli. Nejdříve máme pozorování, pak čísla, jež jsme naměřili, potom máme zákon, jenž sumarizuje všechna tato čísla. Velkou předností vědy je však to, že jsme schopni najít takový způsob uvažování, kdy se zákon stává zřejmým.

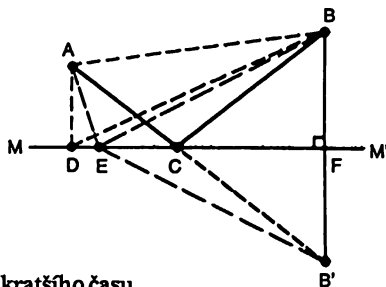
První způsob uvažování, ze kterého zákon šíření světla vyplynul jako zřejmý, objevil Fermat kolem r. 1650 a nazývá se princip nejkratšího času nebo *Fermatův princip*. Spočívá v tom, že ze všech možných drah, kterými se lze dostat z jednoho bodu do druhého, si světlo vybírá takovou, která vyžaduje nejkratší čas.

Nejprve si ukážeme platnost principu pro zrcadlo. Zjistíme, že tento jednoduchý princip obsahuje oboje – zákon přímocarého šíření i zákon pro zrcadlo. (Naše chápání se prohlubuje!) Pokusme se najít řešení následujícího problému. Na *obrázku 26.3* jsou znázorněny body  $A$  a  $B$  a rovinné zrcadlo  $MM'$ . Jakou cestou je možné se dostat z  $A$  do  $B$  za nejkratší čas? Odpověď: přímo z  $A$  do  $B$ ! Když ale přidáme další podmínku, že světlo se musí odrazit od zrcadla a vrátit se zpět za co nejkratší dobu, odpověď není tak snadná. Jeden způsob by byl, co nejdříve dorazit k zrcadlu a pak do bodu  $B$  – po dráze  $ADB$ . Potom máme samozřejmě dráhu  $DB$  dlouhou. Přesuneme-li se o málo doprava do bodu  $E$ , zvětšíme si o něco první vzdálenost, ale druhou si velmi zkrátíme, takže celková délka dráhy, a tedy i čas potřebný k jejímu překonání jsou kratší. Jak lze najít bod  $C$ , pro nějž je čas nejkratší? Velmi jednoduše ho můžeme najít pomocí geometrického triku.

Na druhé straně roviny  $MM'$  sestrojíme pomocný bod  $B'$ , jenž se nachází stejně daleko pod rovinou  $MM'$  jako bod  $B$  nad touto rovinou a nakreslíme úsečku  $EB'$ . Protože úhel  $BFM$  je pravý a  $BF = FB'$ , i  $EB$  je rovno  $EB'$ . Součet vzdáleností  $AE + EB$ , úměrný času, který vyžaduje světlo pohybující se konstantní rychlostí, bude roven součtu vzdáleností  $AE + EB'$ . Otázkou tedy je, kdy je součet těchto dvou vzdáleností nejmenší. Odpověď je jednoduchá: Tehdy, když čára prochází bodem  $C$  jako přímka z  $A$  do  $B'$ ! Jinými slovy, je třeba najít bod, přes nějž se dostaneme do pomocného bodu  $B'$ , a to bude ten správný bod. Je-li  $ACB'$  přímka, pak úhel  $BCF$  je roven úhlu

## FERMATŮV PRINCIP NEJKRATŠÍHO ČASU

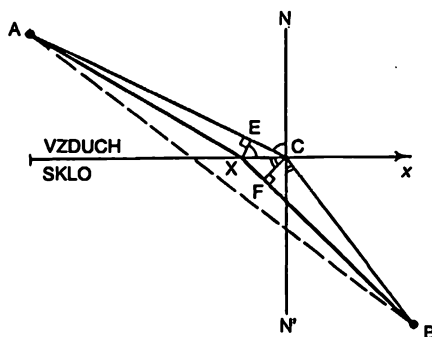
$BCF$  a tedy i úhlu  $ACM$ . Výrok, že úhel dopadu je roven úhlu odrazu, je tedy ekvivalentní výroku, že světlo dopadá na zrcadlo tak, že do bodu  $B$  se vrací za *nejkratší možný čas*. Autorem původního výroku, že světlo se šíří tak, že k zrcadlu a pak k jinému bodu jde po nejkratší možné dráze, je Heron Alexandrijský, není to tedy moderní teorie. Inspirovala však Fermata k myšlence, že i lom světla probíhá na téměř základě. Ale při lomu světla je jasné, že světlo nejde po nejkratší vzdálenosti, proto Fermat přišel na myšlenku, že to bude za nejkratší čas.



Obr. 26.3 Znáornění principu nejkratšího času

Dříve, než se pustíme do analýzy lomu světla, měli bychom udělat ještě jednu poznámku o zrcadle. Máme-li v bodě  $B$  zdroj, jenž vysílá světlo směrem k zrcadlu, vidíme, že světlo, přichází z bodu  $B$  do bodu  $A$  přesně tak, jakoby vycházelo z bodu  $B'$  a neměli bychom žádné zrcadlo. Samozřejmě, oko registruje jen to světlo, které do něho vnikne, takže, máme-li nějaký předmět v bodě  $B$  a zrcadlo, jež způsobuje, že světlo nám vnikne do oka přesně stejně, jako by vnikalo do oka, kdyby byl předmět v bodě  $B'$ , systém oko – mozek to interpretuje tak (za předpokladu, že o tom mnoho neví), že předmět je v bodě  $B'$ . Dojem, že předmět se nachází za zrcadlem, vzniká jenom proto, že světlo, jež vniká do oka, vniká do něho fyzikálně přesně stejně, jako by vnikalo z předmětu umístěného za zrcadlem (odhlédneme-li od nečistoty na zrcadle, od toho, že víme o existenci zrcadla atd., což se v mozku koriguje).

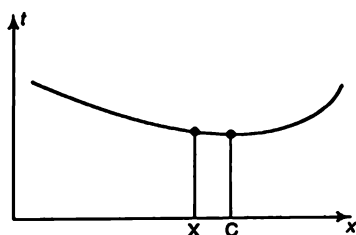
Nyní ukažme, že z principu nejkratšího času vyplývá Snellův zákon lomu. Musíme však formulovat předpoklad o rychlosti světla ve vodě. Budeme předpokládat, že rychlost světla ve vodě je  $n$ -krát menší než rychlost světla ve vzduchu.



Obr. 26.4 Znáornění Fermatova principu pro lom světla

Na obrázku 26.4 máme opět problém, jak se dostat z  $A$  do  $B$  za nejkratší čas. Abychom ukázali, že nejlepší, co lze udělat, není postupovat po přímce, představme si, že v bodě  $B$  vypadlo z člunu do vody pěkné děvče a volá o pomoc. Čára označená jako  $x$  je břeh. My se nacházíme v bodě  $A$

na zemi, vidíme, co se stalo a umíme běhat i plavat, ale běhat umíme rychleji než plavat. Co uděláme? Půjdeme přímo? (Ano, bez pochybi) Avšak, při troše větší inteligence, bychom si uvědomili, že by bylo výhodné projít o něco více po zemi, abychom si zkrátili vzdálenost po vodě, neboť pohyb ve vodě je mnohem pomalejší. Podle tohoto způsobu uvažování bychom řekli, že nejsprávnější by bylo napřed přesně vypočítat, jak máme běžet. V každém případě se pokusme ukázat, že konečným řešením problému je dráha  $ACB$ , jíž odpovídá nejkratší možný čas. Z toho, že je to nejkratší čas, vyplývá, že zvolíme-li si jakoukoliv jinou dráhu, čas na její absolvování bude delší. Kdybychom si tedy graficky znázornili potřebný čas v závislosti na poloze bodu  $X$ , dostali bychom křivku podobnou křivce na obr. 26.5, kde bod  $C$  odpovídá nejkratšímu ze všech možných časů. Vidíme, že když posuneme bod  $X$  k bodům ležícím blízko  $C$ , čas se v první aproximaci příliš nezmění, neboť křivka má dole nulový sklon.



Obr. 26.5 Nejkratší čas odpovídá bodu  $C$ , ale přilehlé body odpovídají přibližně stejnému času

Náš způsob, jak najít hledaný zákon, bude takový, že budeme uvažovat velmi malou změnu polohy a budeme požadovat, aby se čas v podstatě neměnil. (Samozřejmě infinitezimální změna druhého řádu tam bude; měli bychom mít kladný přírůstek času pro posunutí v obou směrech od  $C$ .) Vezmeme si tedy blízký bod  $X$  a vypočítáme, jak dlouhý čas bude potřebný na cestu z  $A$  do  $B$  po obou drahách a porovnáme novou dráhu se starou. To lze provést velmi snadno. Chceme, samozřejmě, aby rozdíl byl téměř nulový, když vzdálenost  $XC$  je krátká. Podívejme se nejprve na dráhu, která vede po zemi. Nakreslíme-li si kolmici  $XE$ , vidíme, že tato dráha je kratší o délku  $EC$ . Řekněme, že tím získáváme, neboť nemusíme běžet tuto vzdálenost. Na druhé straně, nakreslíme-li si odpovídající kolmici  $CF$ , vidíme, že ve vodě musíme překonat vzdálenost  $XF$ , a to je to, co ztrácíme. Nebo, co se týká času, získáme čas potřebný k překonání vzdálenosti  $EC$ , ale ztratíme čas, jenž byl potřebný na překonání vzdálenosti  $XF$ . Tyto dva časy si musí být rovny, neboť v prvním přiblížení se čas nesmí měnit. Za předpokladu, že rychlost ve vodě je  $\frac{1}{n}$ -krát tak velká jako rychlost ve vzduchu, musíme mít

$$EC = n \cdot XF. \quad (26.3)$$

Vidíme, že máme-li správný bod, pak

$$XC \sin EXC = n \cdot XC \sin XCF.$$

Dělíme-li obě strany společnou délkou přepony  $XC$  a všimneme-li si, že

$$EXC = ECN = \alpha_1 \text{ a } XCF = BCN = \alpha_2,$$

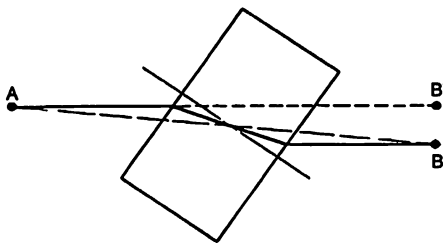
máme

$$\sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2. \quad (26.4)$$

Zjistili jsme, že k tomu, aby bylo možné se dostat z jednoho bodu do druhého za nejkratší dobu, musí světlo dopadat pod takovým úhlem, aby poměr sinů úhlů  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  byl roven poměru rychlostí v obou prostředích rovnému  $n$ .

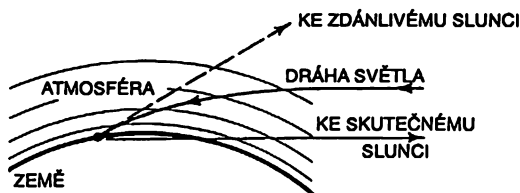
## 26.4 POUŽITÍ FERMATOVA PRINCIPU

Nyní uvažujme o některých zajímavých důsledcích principu nejkratšího času. Prvním z nich je *princip reciprocity* (princip obrácení světelného paprsku). Když jsme pro přechod z  $A$  do  $B$  našli dráhu s nejmenším časem, pak pro přechod v opačném směru (za předpokladu, že se světlo šíří stejnou rychlostí v každém směru) bude nejmenšímu času odpovídat táž dráha. Proto, když lze světlo vyslat po jedné dráze jedním směrem, lze je po ní poslat i opačným směrem.



Obr. 26.6 Posunutí světelného paprsku při průchodu průhlednou destičkou

Zajímavým příkladem je skleněný kvádr s rovinnými rovnoběžnými stěnami, postavený do cesty světelnému paprsku pod nějakým úhlem. Světlo při průchodu kvádrem z bodu  $A$  do bodu  $B$  (obr. 26.6) neprochází po přímce, ale zkracuje čas potřebný k průchodu kvádrem tím, že si zmenšuje úhel náklonu v kvádru, i když tím něco ztrácí ve vzduchu. Paprsek se prostě paralelně posune, neboť úhly, pod kterými světlo vniká dovnitř a zase vychází ven, jsou stejné.



Obr. 26.7 U obzoru se Slunce zdá být o  $1/2$  stupně výš než skutečně je

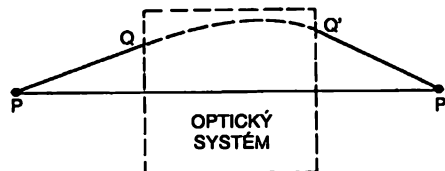
Třetím zajímavým jevem je skutečnost, že když vidíme Slunce zapadat, je vlastně už pod obzorem! Není to tak, že by se zdálo být pod obzorem, ale skutečně pod ním je (obr. 26.7). Zemská atmosféra je nahoře řídká a dole hustá. Sluneční světlo letí vzduchem pomaleji než ve vakuu, a proto se může do bodu  $S$  za obzorem dostat rychleji, když se místo toho, aby letělo po přímce, vyhne hustým oblastem, a pak je proletí pod strmějším úhlem. Když se zdá, že Slunce teprve zapadá pod obzor, ve skutečnosti je už dost hluboko pod ním. Jiným příkladem tohoto jevu je zrcadlení, které lze často vidět při pohybu na sluncem rozpálených silnicích. Na silnici je vidět „voda“, ale když se k tomu místu dostaneme, silnice je suchá jako poušť! Tento jev nastává takto: To, co ve skutečnosti vidíme, je obloha „zrcadlící“ se na silnici – světlo z oblohy



dopadající na silnici může skončit v našem oku, jak je to znázorněno na *obr. 26.8*. Proč? Vzduch těsně nad silnicí je velmi horký, ale výš je chladnější. Horký vzduch se více rozpíná než studený, je řídkší a rychlost světla je v něm méně zpomalena. Lze říci, že světlo se šíří rychleji v teplých oblastech než ve studených. Proto světlo místo toho, aby se rozhodlo proletět po přímé dráze, volí dráhu s nejkratším časem. Po ní se pohybuje po určitou dobu v řídkším vzduchu rychleji, aby ušetřilo čas. Může tedy letět po křivočaré dráze.



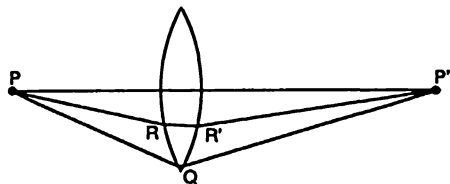
Obr. 26.8 Fata morgána



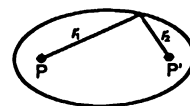
Obr. 26.9 Optická „černá skříňka“

Jako další důležitý příklad principu nejkratšího času předpokládejme, že chceme připravit situaci, aby se všechno světlo, jež vychází z jednoho bodu  $P$ , znovu soustředilo v bodě  $P'$  (*obr. 26.9*). To samozřejmě znamená, že světlo může jít z  $P$  do  $P'$  po přímce. Dobře, to je v pořádku. Ale jak můžeme zabezpečit, aby nejen světlo, které jde po přímce, ale i světlo vycházející z  $P$  směrem do  $Q$  také skončilo v  $P'$ ? Chceme soustředit všechno světlo v bodě, který nazýváme *ohniskem*. Jak? Jde-li světlo vždy po dráze s nejkratším časem, určitě nebude chtít jít po všech ostatních dráhách. Jediný způsob, jak se může světlo dokonale uspokojit s tím, že půjde po více sousedních dráhách, je, že jejich časy si budou rovnat! Jinak si vybere tu s nejkratším časem. Proto problém sestavit takové soustřeďující zařízení spočívá pouze v tom, jak zařídit, aby časy pro všechny různé dráhy byly stejné!

To lze snadno provést. Předpokládejme, že máme kus skla, jímž světlo prochází pomaleji než vzduchem (*obr. 26.10*). Nyní si vezmeme paprsek, jenž letí vzduchem po dráze  $PQP'$ . Je to delší dráha než z  $P$  přímo do  $P'$  a bezpochyby jí náleží delší čas. Kdybychom ale paprsku vložili do cesty kousek skla potřebné tloušťky (později si ukážeme jaké), může se tak přesně vykompenzovat zbývající čas, o který se na své cestě zpozdí světlo letící pod nějakým úhlem! Tak můžeme zařídit, aby čas potřebný pro světlo letící po přímce byl stejný jako čas potřebný pro světlo letící po dráze  $PQP'$ . Podobně, dráha paprsku  $PRR'P'$ , jenž je částečně odkloněn, není sice tak dlouhá jako  $PQP'$  a nepotřebujeme kompenzovat tolik času jako pro paprsek letící po přímce, ale přece je třeba něco vykompenzovat. Nakonec skončíme s kouskem skla, jež má tvar jako na *obr. 26.10*. Při takovém tvaru všechno světlo, jež vychází z  $P$  dojde do  $P'$ ! Samozřejmě, to dobře známe a takové zařízení nazýváme *spojnou čočkou*. V další kapitole si vypočítáme, jaký tvar musí mít čočka, aby dokonale soustřeďovala paprsky.



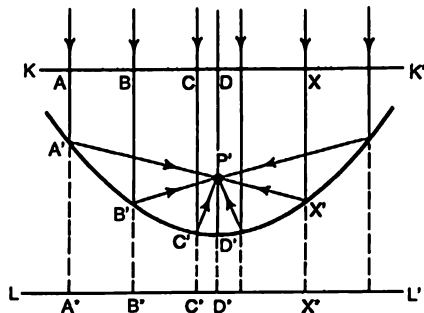
Obr. 26.10 Zaostřující optická soustava



Obr. 26.11 Eliptické zrcadlo

Vezmeme si další příklad: předpokládejme, že chceme sestavit zrcadla tak, aby světlo z bodu  $P$  šlo vždy do bodu  $P'$  (obr. 26.11). Kdyby světlo letělo z bodu  $P$  k zrcadlu a odrazilo se do bodu  $P'$  po jakékoliv dráze, všechny časy, odpovídající různým dráhám, musí být stejné. Světlo tady vždy prochází vzduchem, takže čas a vzdálenost jsou si úměrné. Proto výrok, že všechny časy jsou stejné, znamená totéž jako výrok, že celková vzdálenost je stejná. Součet dvou vzdáleností  $r_1$  a  $r_2$  musí být tedy konstantní. *Elipsa* je křivka, která má tu vlastnost, že součet vzdáleností každého jejího bodu od dvou daných bodů je konstantní, takže si můžeme být jisti, že se světlo z jednoho ohniska dostane do druhého.

Stejný princip se uplatňuje při zachycování světla hvězdy. Velký pětimetrový teleskop v observatoři na Mt. Palomar je založen na tomto principu: Představme si hvězdu vzdálenou miliardy kilometrů. Chceme způsobit, aby se všechno světlo, které z ní přichází, soustředilo do jednoho bodu. Samozřejmě, že si nemůžeme nakreslit dráhy paprsků až po hvězdu, ale přece se chceme přesvědčit, zda jsou časy stejné. Samozřejmě víme, že když různé paprsky přiletěly na nějakou rovinu  $KK'$ , na ně kolmo, jsou v této rovině všechny časy stejné (obr. 26.12). Proto musí paprsky letět dále k zrcadlu a pokračovat v cestě do  $P'$  za stejný čas, tj. musíme najít takovou křivku, pro niž součet vzdáleností  $XX' + X'P'$  je konstanta, bez ohledu na to, kde zvolíme  $X$ . Snadný způsob, jak to lze najít, spočívá v prodloužení čáry  $XX'$  po rovinu  $LL'$ . Sestrojíme-li nyní takovou křivku, že  $A'A' = A'P'$ ,  $B'B' = B'P'$ ,  $C'C' = C'P'$  atd., bude to hledaná křivka. Samozřejmě platí, že  $AA' + A'P' = AA' + A'A'$ , a to bude konstanta. Naše křivka je tedy množinou všech bodů ekvidistantních od dané přímky a daného bodu. Takovou křivku nazýváme *parabola*; zrcadlo má tvar paraboly.



Obr. 26.12 Parabolické zrcadlo

Uvedené příklady slouží pro ilustraci principu, podle něhož lze projektovat optická zařízení. Přesné křivky lze vypočítat pomocí principu, že k vytvoření dokonalého ohniska musí být časy potřebné k průletu dráhy rovny pro všechny paprsky, a musí být zároveň kratší než časy pro jakoukoliv jinou blízkou dráhu.

Tato ohnisková optická zařízení budeme probírat v následující kapitole; nyní si provedme diskuzi dalšího rozvoje teorie. Rozpracuje-li se nový teoretický princip, jako je princip nejkratšího času, může nás to zpočátku svádět k tomu, abychom řekli: „Dobře, to je velmi pěkné, je to úžasné, ale otázkou je, zda nám to vůbec pomohlo v našem chápání fyziky.“ Někdo nám může říct: „Ano, podívejte se, kolik věcí umíme nyní pochopit!“ Jiný může namítnout: „Ale já také rozumím principu zrcadla. Potřebuji takovou křivku, aby každá tečná rovina vytvářela s dvěma paprsky stejné úhly. Umím si také vypočítat čočku, neboť každý paprsek, jenž jí prochází, se odklání o úhel daný Snellovým zákonem.“ Je jasné, že výrok o nejkratším čase a výrok, že úhly

jsou si při odrazu rovny a siny úhlů při lomu jsou si úměrné, jsou rovnocenné výroky. Je to tedy jen pouhá filozofická otázka nebo otázka krásy? Argumenty mohou potvrdit obojí.

Avšak důležitost účinného principu spočívá v tom, že *předpovídá nové věci*.

Snadno lze ukázat, že existuje řada věcí, na něž můžeme usuzovat z Fermatova principu. Nejprve předpokládejme, že máme tři prostředí – sklo, vodu a vzduch; provádíme experiment s lomem světla a měříme index  $n$  pro přechod z jednoho média do druhého. Index lomu na rozhraní mezi vzduchem (1) a vodou (2) označíme  $n_{12}$ ; index lomu na rozhraní mezi vzduchem (1) a sklem (3) označíme  $n_{13}$ . Kdybychom měřili index lomu mezi vodou a sklem, našli bychom další index lomu, který označíme  $n_{23}$ . A priori však není žádný důvod, proč by mezi  $n_{12}$ ,  $n_{13}$  a  $n_{23}$  měla být jakákoliv souvislost. Na druhé straně podle myšlenky nejkratšího času existuje mezi nimi určitý vztah. Index  $n_{12}$  je roven poměru dvou veličin – rychlosti světla ve vzduchu a rychlosti světla ve vodě;  $n_{13}$  je roven poměru rychlostí ve vzduchu a ve skle;  $n_{23}$  je roven poměru rychlostí ve vodě a skle. Proto rozšíříme zlomek rychlostí ve vzduchu  $v_1$  a dostaneme

$$n_{23} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{\frac{v_1}{n_{12}}}{\frac{v_1}{n_{13}}} = \frac{n_{13}}{n_{12}}. \quad (26.5)$$

Jinými slovy, předpovíáme, že index pro nový pár materiálů lze získat z indexů pro jednotlivé materiály vzhledem ke vzduchu nebo k vakuu. Takže, změříme-li rychlost světla ve všech materiálech, jmenovitě jejich indexy vzhledem k vakuu, označené jako  $n_i$  ( $n_i$  je poměr rychlosti ve vzduchu a ve vakuu atd.), dostaneme jednoduchý vzorec. Index lomu pro jakékoliv dva materiály  $i$  a  $j$  je

$$n_{ij} = \frac{v_i}{v_j} = \frac{n_j}{n_i}. \quad (26.6)$$

Předpověď takového druhu bychom nebyli schopni udělat, kdybychom vycházeli jen ze Snellova zákona.<sup>35)</sup> Ale tato předpověď je pravdivá.

Vztah (26.5) byl znám velmi dávno a byl silným argumentem pro princip nejkratšího času.

Dalším argumentem pro princip nejkratšího času a další předpověď je, že změříme-li rychlost světla ve vodě, bude menší než ve vzduchu. Toto je předpověď zcela jiného typu. Je přímo skvělá, neboť dosud jsme měřili pouze *úhly*. Máme zde teoretickou předpověď, která se velmi liší od pozorování, z nichž Fermat vydedukoval myšlenku nejkratšího času. Ukazuje se, že rychlost ve vodě je skutečně menší než rychlost ve vzduchu právě o tolik, kolik je potřebné k tomu, abychom dostali správný index lomu!

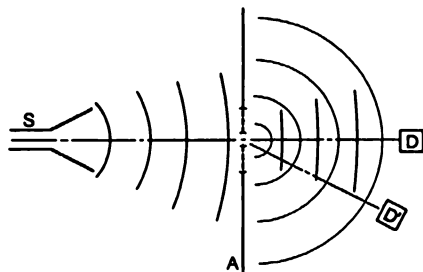
## 26.5 PŘESNĚJŠÍ FORMULACE FERMATOVA PRINCIPU

Princip nejkratšího času musíme formulovat o něco přesněji než jsme zatím uvedli. Dosud jsme ho formulovali nesprávně. Nesprávně se mu říká princip nejkratšího času, i my jsme ho tak

<sup>35)</sup> Takovou předpověď lze provést pomocí Snellova zákona, uděláme-li dodatečný předpoklad, že položením vrstvy jedné látky na povrch druhé látky se úhel lomu v druhé látce nezmění.

nazývali pro pohodlnost, ale nyní si musíme uvést jeho přesné znění. Předpokládejme, že máme zrcadlo, jaké je na *obr. 26.3*. Co způsobí, že světlo „ví“, že má jít k zrcadlu? Dráha nejkratšího času je *AB*, to je jasné. Někdo by mohl říct: „někdy je to nejdelší čas.“ Nejdelší čas to určitě není, neboť zakřivené dráze náleží ještě delší čas! Správné tvrzení je takové: Paprsek jdoucí po určité dráze má tu vlastnost, že uděláme-li malou změnu (např. posunutí o jedno procento) paprsku jakýmkoliv způsobem, řekněme v místě, v němž dopadá na zrcadlo, nebo v tvaru křivky nebo jakoukoli jinou, v prvním přiblížení se čas nezmění; čas se změní jen v přiblížení druhého řádu. Jinými slovy, princip spočívá v tom, že světlo jde po dráze tak, že v blízkosti je mnoho jiných drah, po nichž mu cesta trvá téměř stejnou dobu.

Další problém s principem nejkratšího času neumí nikdy strávit lidé, kteří nemají rádi takový druh teorie. Pomocí Snellovy teorie umíme světlo „chápat“. Světlo se šíří, vidí povrch, změní směr, neboť se s ním na povrchu něco stane. Myšlenku přičinnosti, postup od bodu k bodu, lze snadno pochopit, ale princip nejkratšího času je zcela jiný filozofický princip o tom, jak pracuje příroda. Místo toho, aby říkal, že je to kauzální záležitost, že když něco uděláme, něco dalšího se stane atd., říká toto: my aranžujeme situaci a světlo se rozhoduje, který čas je nejkratší nebo extrémní a podle toho si vybere dráhu. Ale jak to dělá, jak jí najde? Cožpak „cítí“ blízké dráhy a vzájemně je porovnává?



Obr. 26.13 Průchod rádiových vln úzkou štěrbinou

Odpověď zní v jistém smyslu ano. Je to vlastnost světla, která není známá v geometrické optice a která spočívá v myšlence *vlnové délky*; vlnová délka nám přibližně řekne, jak daleko musí světlo „očichat“ dráhu, aby si ji zkontrolovalo. Při velkých rozměrech zařízení lze tento efekt velmi obtížně ukázat pomocí světla, neboť jeho vlnové délky jsou hrozně krátké, ale u rádiových vln, řekněme 3centimetrových, jsou vzdálenosti, jež rádiové vlny kontrolují, větší. Máme-li zdroj rádiových vln, detektor a štěrbinu, jako na *obr. 26.13*, je samozřejmé, že paprsky jdou z *S* do *D*, neboť to je přímka a přivřeme-li štěrbinu – ještě stále skrz ní procházejí, což je v pořádku. Přemístíme-li však nyní detektor na stranu do *D'*, vlny nepůjdou z *S* do *D'* širokou štěrbinou, neboť si zkontrolují několik přilehlých drah a řeknou si: „Ne, příteli, ty všechny odpovídají různým časům.“ Když ale *znemožníme* záření kontrolovat dráhy tím, že štěrbinu přivřeme až na úplně úzkou mezeru, zůstane volná pouze jedna dráha a záření ji použije! U úzké štěrbině dopadne na *D'* víc záření než u široké!

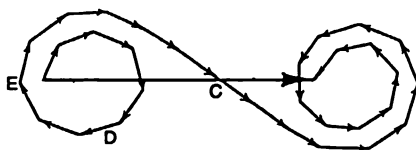
Totéž lze provést i se světlem, ale obtížně to lze ukázat u velkých rozměrů. Tento efekt lze pozorovat za velmi jednoduchých podmínek: Najděte ostré světlo, řekněme velmi vzdálenou pouliční lampu s čírou žárovkou nebo odraz slunce na zaobleném nárazníku auta. Pak si dejte dva prsty před jedno oko tak, abyste viděli štěrbinou mezi nimi a štěrbinu pomalu opatrně zmenšujete. Uvidíte, že obraz lampy, který byl předtím malou tečkou, se začne prodlužovat a dokonce se roztáhne do dlouhé čáry. Důvodem je, že prsty jsou velmi blízko sebe a světlo, jež

by mělo přicházet po přímce, se rozšíří na celý úhel, takže vchází do oka z různých směrů. Pokud jste velmi pozorní, uvidíte možná vedlejší maxima a množství proužků při okrajích. Navíc, celý obraz je zbarvený. To vše si časem vysvětlíme, ale nyní je to ukázka toho, že světlo se ne vždy šíří přímočaře, a přitom snadno proveditelná.

## 26.6 JAK TOMU ROZUMĚT?

Nakonec uvedeme velmi hrubý pohled na to, co se skutečně děje, jak celá věc probíhá podle toho, o čem dnes věříme, že je správné, kvantově-dynamicky přesné hledisko, ale samozřejmě, popsané jen kvalitativně. Sledujeme-li světlo z  $A$  do  $B$  na obr. 26.3, zjistíme, že se nezdá, že by mělo podobu vln. Spíš se zdá, že se paprsky skládají z fotonů a ty skutečně způsobují cvaknutí ve fotočítači, pokud ho použijeme. Jasnost světla je úměrná průměrnému množství fotonů přicházejících za sekundu a to, co počítáme, je pravděpodobnost, že se foton dostane z bodu  $A$  do bodu  $B$  řekněme tím, že narazí na zrcadlo. Zákon pro takovou pravděpodobnost je následující a velmi podivný. Vezmi si kteroukoliv dráhu a zjisti k ní náležící čas. Pak utvoř komplexní číslo nebo nakresli vektor  $\rho e^{i\theta}$ , kde úhel  $\theta$  je úměrný zjištěnému času. Počet obrátok za sekundu je frekvence světla. Nyní vezmi jinou dráhu, jíž náleží jiný čas, takže její vektor se otáčí s jiným úhlem, jenž je stále úměrný času. Vezmi si všechny možné dráhy a sčítej jejich všechny malé vektory. Odpověď zní: Pravděpodobnost příchodu fotonu je úměrná druhé mocnině délky výsledného vektoru od začátku do konce!

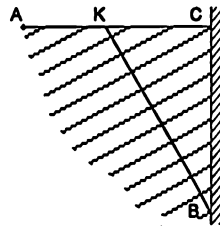
Ukažme si, jak z toho vyplývá princip nejkratšího času pro zrcadlo. Uvažujme všechny paprsky, všechny možné dráhy  $ADB$ ,  $AEB$ ,  $ACB$  atd. zobrazené na obr. 26.3. Dráha  $ADB$  vytvoří určitý příspěvek, ale další dráhy  $AEB$  přísluší zcela jiný čas, takže úhel  $\theta$  je zcela jiný. Řekněme, že bodu  $C$  odpovídá minimální čas, a změníme-li malinko dráhu, čas se nezmění. Chvilí se tedy časy mění a pak, když se blížíme k bodu  $C$ , se začínají časy měnit méně a méně (obr. 26.14). Takže šipky, jež máme sčítat, mají v okolí  $C$  téměř stejný úhel a pak se čas začne znovu postupně zvětšovat a fáze se začnou točit na druhou stranu. Nakonec máme docela hustý uzel. Celková pravděpodobnost je rovna druhé mocnině celkové vzdálenosti od jednoho konce do druhého. *Téměř všechna nahromaděná pravděpodobnost se nachází v oblasti, kde mají všechny šipky stejný směr (nebo stejnou fázi).* Všechny příspěvky od drah, jež mají velmi odlišné časy při změně dráhy, se navzájem ruší, neboť příslušné vektory mají různé směry. To je důvod, proč zrcadlo odráží téměř stejně, zakryjeme-li jeho vzdálené části, neboť všechno, co jsme tím udělali, je, že jsme odstranili části diagramu uvnitř spirálových konců a to způsobí jen velmi malou změnu světla. To je tedy vztah mezi fotonovým obrazem s pravděpodobností dopadu závislého na nahromaděním šipek a mezi principem nejkratšího času.



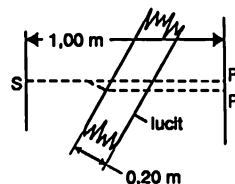
Obr. 26.14 Sčítání amplitud pravděpodobností pro mnoho sousedních drah

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

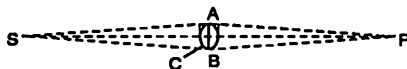
- 26.1 ■ Chodec se pohybuje po chodníku rychlostí 1,5 m/s a po zoraném poli rychlostí 0,9 m/s. Vyšel po chodníku mířícím kolmo ke zdi podél okraje pole z bodu  $A$  vzdáleného 42 m od zdi a má dojít do bodu  $B$  nacházejícího se u zdi ve vzdálenosti 36 m od okraje pole. Po jaké cestě  $AKB$  má jít, aby došel k cíli za nejkratší dobu? (Je vhodné předpokládat, že k řešení této úlohy lze použít zákon lomu. Můžete se však pokusit vyřešit úlohu bez tohoto předpokladu a pak ověřit správnost výsledku pomocí zákona lomu.)



- 26.2 ■ Světlo ze zdroje  $S$  ve vzdálenosti 1 m od stínítka vytváří úzký svazek kolmý ke stínítku a dopadá na stínítko v bodě  $P$ . Na dráze paprsku umístíme destičku tloušťky 0,2 m z lucitu o indexu lomu 1,5 tak, aby směr paprsku uvnitř destičky svíral úhel  $30^\circ$  s původním směrem.
- a) Najděte boční posun paprsku  $PP'$ .
- b) Najděte v procentech vzrůst doby průchodu paprsku ve srovnání s dobou před vložením destičky.



- 26.3 ■ Budíž  $S$  zdroj světla a  $P$  jeho zobrazení čočkou  $ACB$ , kde  $SC = CP = 1$  m,  $AC = BC = 0,1$  m. Čočka  $ACB$  má na okrajích tloušťku 3 mm. Prochází-li paprsek dráhu  $SCP$  za tutéž dobu jako vzdálenosti  $SAP$  a  $SBP$ , jaká musí být tloušťka čočky uprostřed v bodě  $C$ ? Index lomu skla je 1,60.



- 26.4 ■ V obyčejném rovinném zrcadle je náš obraz stranově převrácen, tj. zobrazení pravé ruky vypadá jako levá ruka. Proč zrcadlo nepřevrací obraz také nohama vzhůru? Co se vlastně při zobrazení rovinným zrcadlem převrací?
- 26.5 ■ Dvě rovinná zrcadla jsou rozmístěna tak, že jejich roviny svírají pravý úhel a jejich průsečnice je svíslá. Vysvětlíte, proč se v takovém zrcadle vidíme tak, jak nás vidí jiní lidé.
- 26.6 ■ Tři vzájemně kolmá neomezená rovinná zrcadla jsou rozmístěna tak, že tvoří pravouhloúhelník. Na jedno ze zrcadel dopadá paprsek světla, odráží se od něho a dopadá na druhé zrcadlo a po druhém odrazu třeba i na třetí. Ukažte, že po všech odrazech paprsek vychází směrem přesně opačným, než jakým dopadl, ale je trochu posunut. Znáte nějaké praktické použití takového „koutového odražeče“?
- 26.7 ■ Je známo, že když světlo prochází z jednoho průzračného prostředí do druhého, ne všechny paprsky se lámou. Některé se odrážejí a malá část z nich (pokud vůbec nějaká) se pohlcuje nebo rozptyluje. Co se děje, dopadá-li svazek světla na rozhraní dvou prostředí pod velkým úhlem k normále z prostředí opticky hustšího (s větším indexem lomu) do prostředí opticky řidšího?

# 27

# Geometrická optika

---

## 27.1 ÚVOD

## 27.2 OHNISKOVÁ VZDÁLENOST KULOVÉ PLOCHY

## 27.3 OHNISKOVÁ VZDÁLENOST ČOČKY

## 27.4 ZVĚTŠENÍ

## 27.5 SLOŽENÉ ČOČKY

## 27.6 ABERACE

## 27.7 ROZLIŠOVACÍ SCHOPNOST

### 27.1 ÚVOD

V této kapitole prodiskutujeme některé jednoduché aplikace myšlenek z předchozí kapitoly na několika praktických přístrojích a použijeme aproximaci nazvanou *geometrická optika*. Je to nejužitečnější aproximace pro praktickou konstrukci mnoha optických systémů a přístrojů. Geometrická optika je buď velmi jednoduchá nebo velmi komplikovaná. Tím myslíme, že ji můžeme studovat velmi povrchně a tak, abychom byli schopni zhruba navrhnout přístroje s použitím pravidel, která jsou tak jednoduchá, že se jimi zde vůbec nemusíme zabývat (prakticky odpovídají středoškolské úrovni) nebo, chceme-li poznat drobné chyby čoček a podobné detaily, stává se tak složitou, že diskutovat o tom zde je příliš předčasně! Stojí-li někdo před konkrétním problémem podrobného návrhu čočky, včetně analýzy aberace, doporučíme mu, aby si o tomto problému něco přečetl nebo aby si jednoduše prozkoumal dráhy paprsků procházejících různými plochami (návod, jak to udělat, nám poskytne tato kniha) s použitím zákona lomu, z jednoho prostředí do druhého a zjistil si, kde paprsky vycházejí ven a zda tvoří uspokojivý obraz. Lidé říkali, že je to příliš zdlouhavé, avšak dnes, kdy jsou k dispozici počítače, je to správný postup; lze zformulovat problém a velmi snadno provést výpočet pro paprsky jeden po druhém. Nakonec je to docela jednoduché a neobsahuje to žádné nové principy. Navíc se ukazuje, že pravidla, ať už elementární nebo složitější optiky, jsou zřídka charakteristická pro

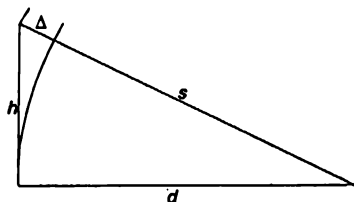
jiné oblasti, takže není zvláštního důvodu, abychom se tímto předmětem hlouběji zabývali, kromě jedné důležité výjimky.

Nejpokročilejší a nejabstraktnější teorii geometrické optiky vypracoval Hamilton a ukazuje se, že ta má velmi významné aplikace v mechanice. Pro mechaniku je dokonce důležitější než pro optiku, a proto si studium Hamiltonovy teorie necháme pro pokročilejší kurz analytické mechaniky ve vyšším ročníku. S vědomím, že příspěvek geometrické optiky je sám o sobě velmi malý, věnujeme se problému elementárních vlastností jednoduchých optických systémů na základě principů načrtnutých v předcházející kapitole.

Abychom mohli pokračovat, potřebujeme jeden geometrický vztah a to: Máme-li trojúhelník s malou výškou  $h$  a velkou základnou  $d$ , pak přepona  $s$  (budeme ji potřebovat k určení časového rozdílu mezi dvěma odlišnými dráhami) je delší než základna (obr. 27.1). O kolik? Rozdíl  $\Delta = s - d$  lze najít několika způsoby. Jeden způsob je tento: Vidíme, že  $s^2 - d^2 = h^2$  nebo  $(s - d)(s + d) = h^2$ . Ale  $s - d = \Delta$  a  $s + d \approx 2s$ . Tedy

$$\Delta \approx \frac{h^2}{2s}. \quad (27.1)$$

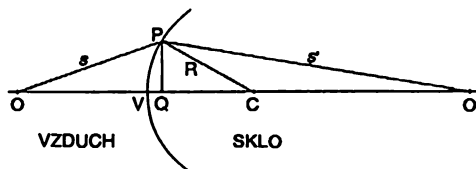
To je celá geometrie, kterou potřebujeme znát, abychom mohli diskutovat vznik obrazů pomocí zakřivených ploch!



Obr. 27.1

## 27.2 OHNISKOVÁ VZDÁLENOST KULOVÉ PLOCHY

První a nejjednodušší situace pro diskusi je jediná plocha oddělující dvě prostředí s různými indexy lomu (obr. 27.2). Příklad libovolných indexů lomu necháváme studentům, neboť důležitější jsou vždy ideje, než určité konkrétní situace, a tento příklad je dost jednoduchý, aby ho bylo možné vyřešit v kterémkoliv případě. Budeme předpokládat, že nalevo od plochy je rychlost světla rovna 1 a napravo  $1/n$ , kde  $n$  je index lomu. Ve skle se světlo šíří  $n$ -krát pomaleji.



Obr. 27.2 Zaostření jedinou lámavou plochou



Nyní předpokládejme, že ve vzdálenosti  $s$  od nějakého bodu na povrchu skla máme bod  $O$  a ve vzdálenosti  $s'$  máme jiný bod  $O'$  uvnitř skla a že zakřivený povrch skla chceme upravit tak, aby každý paprsek vycházející z  $O$ , jenž dopadne na povrch skla v kterémkoli bodě  $P$ , se lomil tak, že bude pokračovat do bodu  $O'$ . Proto musíme dát povrchu takový tvar, aby se doba, za niž projde paprsek z bodu  $O$  do bodu  $P$ , tj. vzdálenost  $OP$  dělená rychlostí světla (zde je jeho rychlost rovna jedné) plus  $n$ -krát  $O'P$ , což je doba, za niž projde z  $P$  do  $O'$ , rovnala konstantě nezávislé na poloze  $P$ . Z této podmínky dostaneme rovnici k určení tvaru povrchu. Výsledek je takový, že povrch je dán velmi komplikovanou křivkou čtvrtého stupně a student se může bavit pokusem vypočítat ji pomocí analytické geometrie. Jednodušší je pokusit se ji vypočítat pro zvláštní případ, kdy  $s \rightarrow \infty$ , neboť tehdy je to křivka druhého stupně a lze ji snadněji poznat. Zajímavé je porovnání této křivky s parabolou, kterou jsme našli pro zrcadlo soustřeďující paprsky přicházející z nekonečna do jednoho bodu.

Takže přiměřený povrch nelze snadno připravit – soustředit světlo vycházející z jednoho bodu v jiném bodě vyžaduje dost komplikovanou plochu. V praxi se obvykle nesnažíme vytvořit tak komplikované povrchy, ale děláme kompromis. Místo toho, abychom se snažili dostat do ohniska všechny paprsky, provádíme to tak, že do ohniska jdou pouze paprsky dost blízké k ose  $OO'$ . Vzdálenější paprsky se mohou odchylovat, chtějí-li, neboť ideální povrch je složitý a místo něj používáme kulovou plochu se správným poloměrem křivosti na ose. Výroba kulové plochy je mnohem snadnější než výroba jiných povrchů, proto je pro nás užitečné, abychom zjistili, co se stane s paprsky dopadajícími na kulový povrch za předpokladu, že pouze paprsky dostatečně blízké k ose budou přesně soustředěny do ohniska. Paprsky blízké ose se někdy nazývají *paraxiální paprsky* a to, co analyzujeme, jsou podmínky k soustředění paraxiálních paprsků do ohniska. Diskuzi o chybách, jež vznikají proto, že ne všechny paprsky jsou vždy blízko osy, provedeme později.

Za předpokladu, že  $P$  se nachází blízko osy, spustíme kolmici  $PQ$  tak, aby byla výška  $PQ$  rovna  $h$ . Na okamžik si představme, že povrch skla tvoří rovinu procházející bodem  $P$ . V takovém případě by čas potřebný na cestu z bodu  $O$  do  $P$  byl delší než čas z  $O$  do  $Q$ , a také čas z  $P$  do  $O'$  by byl delší než čas z  $Q$  do  $O'$ . Ale to je právě důvod, proč musí být povrch skla zakřiven, neboť celkový nadbytečný čas se musí vykompenzovat zpožděním světla při cestě z  $V$  do  $Q$ ! Nadbytečný čas po dráze  $OP$  je roven  $h^2/2s$  a nadbytečný čas po další části dráhy je roven  $h^2/2s'$ . Tento nadbytečný čas, jenž se musí přizpůsobit zpožděním podél dráhy  $VQ$ , se liší od času, jenž by platil pro vakuum, neboť je zde jiné optické prostředí. Jinými slovy, čas, který světlo potřebuje na cestu z  $V$  do  $Q$ , je jiný v tomto prostředí než ve vzduchu, světlo je pomalejší o faktor  $n$ , takže zpoždění na této vzdálenosti je pak  $(n-1)VQ$ . Otázkou je, jak velké je  $VQ$ . Je-li střed koule v bodě  $C$  a její poloměr je  $R$ , vidíme, na základě téhož vzorce, že vzdálenost  $VQ$  je rovna  $h^2/2R$ . Tak jsme objevili zákon dávající do souvislosti vzdálenosti  $s$  a  $s'$ , jenž určuje hledaný poloměr křivosti  $R$ . Tento zákon je

$$\frac{h^2}{2s} + n \frac{h^2}{2s'} = (n-1) \frac{h^2}{2R} \quad (27.2)$$

neboli

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n-1}{R}. \quad (27.3)$$

Je-li dána poloha bodu  $O$  a druhého bodu  $O'$  a chceme světlo z  $O$  soustředit do  $O'$ , můžeme si požadovaný poloměr křivosti povrchu pomocí tohoto vzorce vypočítat.

Z toho vidíme také zajímavý fakt, že stejná čočka se stejným poloměrem křivosti  $R$  bude soustřeďovat paprsky i pro jiné vzdálenosti, konkrétně, pro jakýkoliv pár vzdáleností, pro něž platí, že součet jejich převrácených hodnot, z nichž jedna je vynásobena  $n$ , je rovna konstantě. Takže daná čočka (omezíme-li se na paraxiální paprsky) bude soustřeďovat paprsky nejen z bodu  $O$  do  $O'$ , ale pro nekonečně mnoho jiných párů bodů, platí-li pro tyto páry vztah, že  $\frac{1}{s} + \frac{n}{s'}$  je rovno konstantě charakteristické pro danou čočku.

Zvláštní zajímavý případ je pro  $s \rightarrow \infty$ . Ze vztahu je vidět, že když se jedno  $s$  zvětšuje, druhé se zmenšuje. Jinak řečeno, vzdaluje-li se bod  $O$  do nekonečna, bod  $O'$  se pohybuje uvnitř materiálu, dokud nedosáhne určité vzdálenosti, nazvané *ohnisková vzdálenost*  $f'$ . Přicházející rovnoběžné paprsky protnou osu ve vzdálenosti  $f'$ . Podobný proces si můžeme představit i z druhé strany. (Pamatujme na pravidlo reciprocit: Půjde-li světlo z bodu  $O$  do  $O'$ , půjde také z  $O'$  do  $O$ .) Kdyby byl zdroj světla uvnitř skla, mohli bychom se ptát, kde bude ohnisko. Ve zvláštním případě, bude-li zdroj světla ve skle nekonečně daleko (týž problém), kde by se na venkovní straně světlo soustředilo? Tato vzdálenost se nazývá  $f$ . Samozřejmě můžeme se na věc dívat i opačně. Kdyby byl zdroj světla ve vzdálenosti  $f$  a světlo by proniklo povrchem skla, šířilo by se dál jako rovnoběžný svazek. Hodnoty  $f$  a  $f'$  můžeme snadno najít:

$$\frac{n}{f'} = \frac{(n-1)}{R} \text{ neboli } f' = \frac{Rn}{n-1}, \quad (27.4)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1)}{R} \text{ neboli } f = \frac{R}{n-1}. \quad (27.5)$$

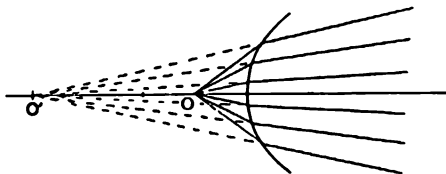
Vidíme zajímavou věc: Vydělíme-li každou ohniskovou vzdálenost příslušným indexem lomu, dostaneme stejný výsledek! Tento teorém je skutečně obecný. Platí pro jakýkoliv systém čoček, bez ohledu na to, jak je komplikovaný, takže stojí za to si jej zapamatovat. Zde jsme nedokázali jeho obecnost – jen jsme si všimli, že platí pro jediný povrch. Ukazuje se však, že obecně platí, že dvě ohniskové vzdálenosti nějakého systému takto navzájem souvisí. Rovnice (27.3) se někdy píše ve tvaru

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (27.6)$$

To je užitečnější vztah než vztah (27.3), neboť  $f$  můžeme změřit mnohem snadněji než poloměr křivosti a index lomu čočky. Nezajímáme-li se o to, jak zkonstruovat čočku, nebo o to, jak byla zkonstruována, ale prostě ji sundáme z poličky a použijeme, pak je pro nás zajímavé pouze  $f$  a nikoli  $n$ ,  $l$  nebo  $R$ !

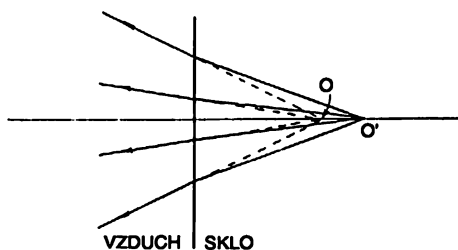
Zajímavá situace nastane, je-li  $s$  menší než  $f$ . Co se stane? Když  $s < f$ ,  $1/s > 1/f$ , a proto  $s'$  je záporné. Vzorec nám říká, že světlo se soustředí jen v bodě se zápornou hodnotou  $s'$ , ať už to znamená cokoliv. Znamená to něco velmi zajímavého a velmi užitečného. Jinak řečeno, je to užitečný vzorec dokonce i tehdy, když čísla v něm jsou záporná. Situace je znázorněna na obr. 27.3. Nakreslíme-li si paprsky rozcházející se z bodu  $O$ , budou se na povrchu lámat a nesoustředí se už do jednoho bodu, neboť  $O$  je tak blízko, že už jsou „za rovnoběžností“. Rozcházejí se však, jakoby vycházely z bodu  $O'$  mimo sklo. To je *zdánlivý obraz*, někdy nazývaný virtuální obraz. Obraz  $O'$  na obr. 27.2 se nazývá *skutečný obraz*. Přichází-li světlo opravdu do nějakého bodu, jde o skutečný obraz, ale zdá-li se, že světlo vychází z nějakého bodu, odlišného od původního bodu,

je to zdánlivý obraz. Takže vychází-li  $s'$  záporné, znamená to, že  $O'$  se nachází na opačné straně povrchu a vše je v pořádku.



Obr. 27.3 Zdánlivý obraz

Vezměme si zajímavý případ, kdy  $R$  je rovno nekonečnu. Pak máme  $1/s + n/s' = 0$ . Jinými slovy  $s' = -ns$ . To znamená, že díváme-li se z hustého prostředí do řídkého a vidíme v něm nějaký bod, zdá se být hlouběji o násobek  $n$ . Podobně můžeme použít tutéž rovnici obráceně. Díváme-li se rovinným povrchem na předmět, jenž se v hustém prostředí nachází v určité vzdálenosti, bude se zdát, jakoby světlo nepřicházelo až z takové dálky (obr. 27.4). Díváme-li se zhora na dno bazénu, nezdá se nám tak hluboký, jaký skutečně je. Zdá se, že má jen  $3/4$  skutečné hloubky, přičemž  $3/4$  je převrácená hodnota indexu lomu vody.



Obr. 27.4 Zdánlivý posun zdroje z bodu  $O'$  do  $O$  při rovinném povrchu

Samozřejmě bychom mohli pokračovat a prodiskutovat problematiku kulového zrcadla. Kdo však chápe ideje, o něž tady jde, měl by být schopen udělat to sám. Proto odvození rovnice pro kulové zrcadlo ponecháváme na čtenáři, ale zmíníme se, že je užitečné přijmout určité konvence, týkající se vzdáleností:

1. Předmětová vzdálenost  $s$  je kladná, nachází-li se bod  $O$  vlevo od povrchu.
2. Obrazová vzdálenost  $s'$  je kladná, nachází-li se bod  $O'$  vpravo od povrchu.
3. Poloměr křivosti povrchu je kladný, nachází-li se střed křivosti vpravo od povrchu.

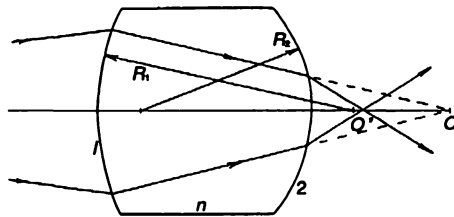
Na obrázku 27.2 jsou například  $s$ ,  $s'$  a  $R$  kladné; na obr. 27.3 jsou  $s$  a  $R$  kladné, ale  $s'$  je záporné. Kdybychom použili konkávní povrch, vzorec (27.3) by stále platil, pouze  $R$  by byla záporná veličina.

Při odvozování příslušného vzorce pro zrcadlo (s použitím uvedených konvencí) zjistíte, že správný vzorec pro zrcadlo dostanete tak, že v rovnici (27.3) položíte  $n = -1$  (jakoby index lomu materiálu za zrcadlem byl  $-1$ )!

I když odvození rovnice (27.3) s použitím principu nejkratšího času je snadné a elegantní, tutéž rovnici lze samozřejmě odvodit pomocí Snellova zákona, máme-li na paměti, že úhly jsou tak malé, že jejich siny lze nahradit příslušnými úhly.

## 27.3 OHNISKOVÁ VZDÁLENOST ČOČKY

Nyní uvažujme o jiné situaci, a to situaci velmi praktické. Většina čoček, které používáme, má dva povrchy, nikoli pouze jeden. Jak se to projeví? Předpokládejme, že máme dva povrchy s různými poloměry křivosti a prostor mezi nimi je vyplněn sklem (obr. 27.5). Chceme studovat problém soustředění paprsků z bodu  $O$  do bodu  $O'$ . Jak to lze provést? Odpověď zní: Nejdříve použijeme vztah (27.3) pro první povrch a zapomeneme na ten druhý. Zjistíme, že světlo, které vycházelo z  $O$ , se bude sbíhat nebo rozbíhat (podle znaménka) z nějakého jiného bodu, řekněme  $O''$ . Nyní přejdeme k novému problému. Mezi sklem a vzduchem máme nový povrch, na nějž dopadají paprsky směřující do nějakého bodu  $O'$ . Kde se budou skutečně sbíhat? Znovu použijeme též vztah! Zjistíme, že paprsky se sbíhají do bodu  $O'$ . Takto, je-li třeba, můžeme projít 75 povrchů s použitím jednoho vztahu a přecházet od jednoho povrchu k druhému!



Obr. 27.5 Vznik obrazu pomocí dvou povrchové čočky

Existují některé prvotřídní vzorce, které by nám v životě několikrát ušetřily značnou námahu vynaloženou na sledování cesty světla skrz pět povrchů. Když se však setkáme s takovým problémem, je jednodušší sledovat jeho cestu skrz pět povrchů, než se učit z paměti množství vzorců, které možná nikdy nebudeme potřebovat.

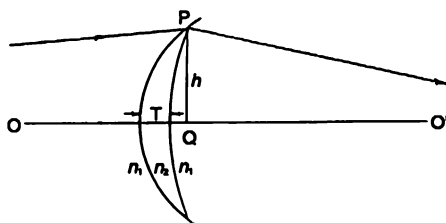
V každém případě je princip takový, že projdeme-li jedním povrchem, najdeme polohu nového ohniska, a tu vezmeme jako výchozí pro další povrch atd. Abychom to mohli skutečně provést, potřebujeme zobecnit vztah (27.3) pro případ dvou různých indexů  $n_1$ ,  $n_2$  a nejen pro jedno  $n$ . U druhého povrchu totiž přecházíme od  $n$  k 1 místo od 1 k  $n$  a navíc u mnoha systémů je více druhů skla s indexy  $n_1$ ,  $n_2$  ... atd. Není těžké dokázat, že obecný tvar vztahu (27.3) je

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (27.7)$$

Obzvláště jednoduchý je speciální případ, kdy jsou dva povrchy velmi blízko sebe – tak blízko, že můžeme zanedbat malé chyby související s tloušťkou čočky. Nakreslíme-li si čočku, jaká je na obr. 27.6, můžeme si položit otázku: Jak musí být čočka zkonstruována, aby soustřeďovala světlo z bodu  $O$  do bodu  $O'$ ? Předpokládejme, že světlo dopadá přesně na kraj čočky do bodu  $P$ . Pak zpoždění z bodu  $O$  do  $O'$  ve srovnání s přímoou cestou (zanedbáme-li zatím tloušťku čočky  $T$  s indexem lomu  $n_2$ ) je

$$\frac{n_1 h^2}{2s} + \frac{n_1 h^2}{2s'}.$$

## GEOMETRICKÁ OPTIKA



Obr. 27.6 Tenká čočka se dvěma kladnými poloměry

Aby byl čas pro přímou dráhu roven času pro dráhu  $OPO'$ , musíme použít kousek skla, jehož tloušťka  $T$  ve středu je taková, že zpoždění, jehož dosáhne při průchodu touto tloušťkou, bude rovno zpoždění na dráze  $OPO'$ . Proto tloušťka čočky v jejím středu musí být dána vztahem

$$\frac{n_1 h^2}{2s} + \frac{n_1 h^2}{2s'} = (n_2 - n_1) T. \quad (27.8)$$

$T$  můžeme vyjádřit i pomocí poloměrů křivosti  $R_1$  a  $R_2$  obou povrchů. Majíce na zřeteli konvenci (3), najdeme pro  $R_1 < R_2$  (konvexní čočka) vztah

$$T = \frac{h^2}{2R_1} - \frac{h^2}{2R_2}. \quad (27.9)$$

Proto nakonec dostáváme

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_1}{s'} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (27.10)$$

Opět si všimneme, že je-li jeden z bodů v nekonečnu, druhý se bude nacházet ve vzdálenosti, kterou nazveme ohnisková vzdálenost  $f$ . Ohnisková vzdálenost  $f$  je dána vztahem

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (27.11)$$

kde  $n = \frac{n_2}{n_1}$ .

Vezmeme-li si opačný případ, kde  $s$  jde do nekonečna, vidíme, že  $s'$  se nachází v ohniskové vzdálenosti  $f'$ . Tentokrát jsou si ohniskové vzdálenosti rovny. (To je další, speciální případ obecně platného pravidla, že poměr dvou ohniskových vzdáleností je roven poměru indexů lomu dvou prostředí, v nichž se paprsky sbíhají do ohnisek. U tohoto optického systému jsou počáteční a konečný index lomu stejné, takže i dvě ohniskové vzdálenosti jsou stejné.)

Představme si, že jsme si koupili někým zkonstruovanou čočku s určitými poloměry křivosti a s určitým indexem lomu a zapomeňme na chvíli vzorec pro výpočet ohniskové vzdálenosti. Ohniskovou vzdálenost bychom mohli změřit, řekněme tak, že bychom našli místo, kde se

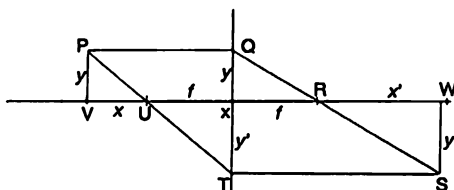
zobrazí nekonečně vzdálený bod. Kdybychom už jednou znali ohniskovou vzdálenost, bylo by pro nás lepší přepsat náš vzorec přímo pomocí ohniskové vzdálenosti. Dostane tvar

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (27.12)$$

Podívejme se, jak se tento vztah uplatňuje a co z něho vyplývá za různých okolností. Nejdříve to, že když jedna z veličin  $s$  a  $s'$  je nekonečná, druhá je rovna  $f$ . Znamená to, že rovnoběžné paprsky se soustředí ve vzdálenosti  $f$ , a to je vlastně definice  $f$ . Další zajímavostí, kterou nám říká tento vztah, je, že oba body se pohybují stejným směrem. Když se jeden pohybuje směrem doprava, druhý také. Pozoruhodné je i to, že  $s$  a  $s'$  jsou si rovny, rovnají-li se  $2f$ . Jinými slovy zjistíme, že symetrická situace nastane, budou-li oba body ve vzdálenosti  $2f$ .

## 27.4 ZVĚTŠENÍ

Dosud jsme se zabývali jen zobrazováním bodů ležících na ose. Abychom pochopili vlastnosti zvětšení, zabývejme se zobrazováním předmětů, jež neleží na ose, ale jsou blízko ní. Kdybychom použili čočku k soustředění světla z malého vlákna do „bodu“ na stínítku, všimli bychom si, že na stínítku dostáváme „obraz“ téhož vlákna, ale pouze větších nebo menších rozměrů než je skutečné vlákno. To musí znamenat, že do ohniska přichází světlo z každého bodu vlákna. Abychom to trochu lépe pochopili, analyzujme systém tenké čočky, schematicky znázorněný na obr. 27.7. Známe tato fakta:



Obr. 27.7 Geometrie zobrazování pomocí tenké čočky

1. Kterýkoliv paprsek přicházející rovnoběžně s osou z jedné strany prochází na druhé straně bodem nazvaným ohnisko ve vzdálenosti  $f$  od čočky.
2. Kterýkoliv paprsek dopadající na čočku z ohniska na jedné straně vychází na druhé straně rovnoběžně s osou.

To je všechno, co potřebujeme ke geometrickému vyjádření vztahu (27.12): Předpokládejme, že v nějaké vzdálenosti  $x$  od ohniska máme předmět výšky  $y$ . Víme, že jeden z paprsků, konkrétně  $PQ$ , se bude lámat tak, že bude procházet ohniskem  $R$  na druhé straně. Když čočka vůbec zobrazí bod  $P$ , můžeme zjistit, kde to bude, najdeme-li, kudy půjde alespoň jeden další paprsek; bude to tam, kde se tyto dva paprsky opět protnou. Abychom našli směr dalšího paprsku, stačí nám použít jen svůj důvtíp. Víme, že rovnoběžný paprsek bude procházet ohniskem – paprsek procházející ohniskem vyjde rovnoběžně s osou! Proto nakreslíme paprsek  $PT$  procházející  $U$ . (Ve skutečnosti budou paprsky tvořící zobrazení mnohem blíže k ose než ty, které jsme si nakreslili, ale ty lze hůře nakreslit, takže budeme věřit, že můžeme použít námi zobrazený

paprsek.) Protože bude vycházet rovnoběžně, nakreslíme  $TS$  rovnoběžně s  $XW$ . Průsečík  $S$  je bod, který potřebujeme. Určí nám správnou vzdálenost i správnou výšku. Výšku nazveme  $y'$  a vzdálenost od ohniska  $x'$ . Nyní můžeme odvodit rovnici čočky. Použitím podobných trojúhelníků  $PVU$  a  $TXU$  najdeme

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{x} \quad (27.13)$$

Podobně z trojúhelníků  $SWR$  a  $QXR$  dostáváme

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f} \quad (27.14)$$

Porovnáme podílů  $\frac{y'}{y}$  z každé rovnice najdeme, že

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f} = \frac{f}{x} \quad (27.15)$$

Rovnice (27.15) je známá rovnice čočky (zobrazovací rovnice). V ní je vše, co potřebujeme o čočkách vědět: Udává nám zvětšení  $y'/y$  pomocí vzdáleností a ohniskových vzdáleností. Rovněž dává do souvislosti obě vzdálenosti  $x$  a  $x'$  s  $f$

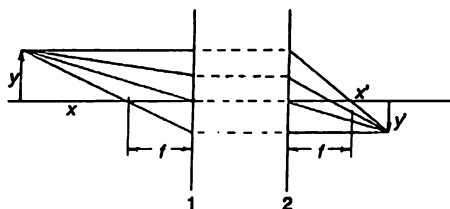
$$xx' = f^2, \quad (27.16)$$

což je vztah, s nímž se pracuje mnohem snadněji než s rovnicí (27.12). Označíme-li  $s = x + f$  a  $s' = x' + f$ , uvidíme, že rovnice (27.12) je stejná jako rovnice (27.16). Přesvědčte se o tom!

## 27.5 SLOŽENÉ ČOČKY

Bez odvozování uvedeme obecný výsledek pro řadu čoček. Jak lze analyzovat soustavu složenou z několika čoček? To je snadné. Začneme nějakým předmětem a pomocí vztahu (27.16) nebo (27.12) nebo pomocí kteréhokoliv rovnocenného vztahu nebo grafiky najdeme zobrazení první čočkou. Máme tedy nějaký obraz. Pak budeme tento obraz považovat za zdroj pro další čočku a ať už je její ohnisková vzdálenost jakákoliv, najdeme jí vytvořený obraz. Takto jednoduše projdeme celou posloupnost čoček. To je celé umění. V principu nejde o nic nového, takže to nebudeme rozebírat. Existuje však velmi zajímavý celkový výsledek působení jakékoliv řady čoček na světlo, jež vzniká i končí v tomtéž prostředí, řekněme ve vzduchu. Kterýkoliv optický přístroj – teleskop nebo mikroskop s jakýmkoliv množstvím čoček a zrcadel – má následující vlastnost: Existují dvě roviny nazývané *hlavními rovinami* soustavy (často jsou velmi blízko k prvnímu povrchu první čočky a k poslednímu povrchu poslední čočky), jež mají tyto vlastnosti:

- 1) Když světlo dopadá rovnoběžně na soustavu z první strany, bude ven vycházet tak, že se soustředí v určitém ohnisku vzdáleném od druhé hlavní roviny o ohniskovou vzdálenost právě tak, jakoby soustavu tvořila tenká čočka umístěná v této rovině.
- 2) Když rovnoběžně světlo přichází z druhé strany, soustředí se ve stejné vzdálenosti  $f$  od první hlavní roviny, opět, jakoby tam byla umístěna tenká čočka (viz obr. 27.8).



Obr. 27.8 Znárodnění hlavních rovin optické soustavy

Samozřejmě, když odměříme vzdálenost  $x$  a  $x'$ ,  $y$  a  $y'$  jako předtím, rovnice (27.16), kterou jsme napsali pro tenkou čočku, platí zcela obecně za předpokladu, že ohniskovou vzdálenost měříme od hlavních rovin a ne od středu čočky. Pro tenkou čočku vychází, že hlavní roviny jsou totožné. Vypadá to právě tak, jako kdybychom vzali tenkou čočku, rozřízli ji podélně středem, rozdělili ji a ani si nevšimli, že je rozdělená. Každý dopadající paprsek ihned vychází na vnější straně druhé roviny z téhož bodu jako dopadal na první rovinu! Hlavní roviny a ohniskovou délku lze zjistit experimentálně nebo výpočtem a tím jsou určeny všechny vlastnosti optické soustavy. Velmi zajímavé je, že když se takto vypořádáme s velkou složitou optickou soustavou, dostaneme jednoduchý výsledek.

## 27.6 ABERACE

Dříve než bychom se příliš nadchli tím, jak jsou čočky báječné, musíme si pospíšit dodat, že jsou zde vážné nedostatky, vyplývající z toho, že jsme se omezili pouze na paraxiální paprsky, tj. na paprsky blízko optické osy. U reálné čočky s konečnými rozměry se projeví *aberrace*. Například paprsek ležící na ose prochází ohniskem; paprsek, jenž je velmi blízko osy, bude ještě stále docela dobře procházet ohniskem, ale jakmile se začneme vzdalovat, paprsky se začnou odchylovat od ohniska, dejme tomu, že blíž k čočce a paprsek letící v blízkosti horního okraje čočky se odchýlí od ohniska o dost velkou vzdálenost. Takže místo toho, abychom získali bodový obraz, dostaneme jakousi skvrnu. Tento jev se nazývá *sférická aberrace*, neboť je to vlastnost sférických povrchů, jež používáme místo správného tvaru. Lze ji odstranit pro jakoukoliv určitou předmětovou vzdálenost pomocí změny tvaru povrchu čočky nebo případným použitím více čoček tak, že aberrace od jednotlivých čoček mají tendenci se navzájem vyrušit.

Čočky mají i jinou vadu: Světlo různé barvy má různou rychlost, a tedy různý index lomu ve skle, a proto ohnisková vzdálenost dané čočky je různá pro různé barvy. Zobrazíme-li bílý bod, jeho obraz bude barevný, neboť zaostříme-li na červenou, bude modrá mimo ohnisko nebo naopak. Tato vlastnost se nazývá *chromatická aberrace*.

Existují ještě další vady. Nachází-li se předmět dost daleko od optické osy, jeho obraz skutečně nelze pořádně zaostřit. Nejjednodušší způsob, jak to lze ověřit, je zaostřit obraz a pak vychýlit čočku, takže paprsky na ni budou dopadat pod velkým úhlem vzhledem k ose. Obraz, který se vytvoří, bude obvykle velmi rozmazaný a takové místo, kde by byl ostrý, nemusí existovat. Takže čočky mají více druhů vad, které se konstruktér optik snaží odstranit tím, že použije mnoho čoček, aby se jejich vady navzájem vyloučily.

Jak pečlivě se musíme snažit vyloučit aberrace? Lze vytvořit absolutně dokonalou optickou soustavu? Předpokládejme, že jsme sestrojili takovou optickou soustavu, jež by měla zaostřit světlo přesně do bodu. Můžeme nyní z hlediska principu nejkratšího času najít podmínku pro dokonalost soustavy? Soustava bude mít nějaký vstupní otvor pro světlo. Vezmeme-li paprsek

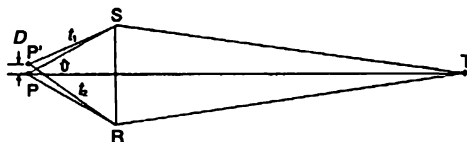


nejvzdálenější od osy, jenž může projít ohniskem, jsou časy pro všechny ostatní paprsky přesně stejné (samozřejmě, je-li soustava dokonalá). Nic však není dokonalé, takže otázkou je, nakolik špatný může být čas pro tento paprsek, aby nestálo zato ho korigovat? Záleží to na tom, jak dokonalý chceme vytvořit obraz! Předpokládejme, že obraz chceme mít tak dokonalý, jak je to jen možné. Pak máme samozřejmě dojem, že to musíme zařídít tak, aby všechny paprsky měly co nejpřesněji stejné časy. Ukazuje se však, že to tak není a že za určitou hranicí se pokoušíme udělat něco, co je příliš jemné, neboť teorie geometrické optiky tam neplatí!

Vzpomeňme si, že princip nejkratšího času, na rozdíl od principu zachování energie nebo principu zachování hybnosti, není přesně formulován. Princip nejkratšího času je jen *přibližný* a je zajímavé, jaká může být největší dovolená chyba, aby se navenek ještě neprojevila. Odpověď zní, že podařilo-li se nám dosáhnout toho, aby rozdíl časů mezi maximálním paprskem (paprskem, jenž je nejhorší, nejvzdálenější) a centrálním paprskem byl menší než je perioda kmitů světla, nemá smysl se pokoušet o další zdokonalování soustavy. Světlo jsou kmity s danou frekvencí, která souvisí s vlnovou délkou a když jsme dosáhli toho, že rozdíl časů pro různé paprsky je menší než je přibližně jedna perioda, je další námaha zbytečná.

## 27.7 ROZLIŠOVACÍ SCHOPNOST

Další zajímavou otázkou, týkající se všech optických přístrojů, je jejich *rozlišovací schopnost*. Tato problematika je zajímavá hlavně z technického hlediska. Když konstruujeme mikroskop, chceme jím vidět sledované objekty. Znamená to, že když sledujeme bakterii s tečkami na obou koncích, po zvětšení chceme tyto tečky vidět. Někdo by si mýsl, že stačí dosáhnout dostatečného zvětšení. Vždycky můžeme přidat další čočku a zvětšovat dál a dál. Šikovností konstruktérů lze vzájemně kompenzovat všechny sférické a chromatické aberace, takže není důvodu, proč bychom obraz nemohli stále zvětšovat. Omezení mikroskopu nespočívají v nemožnosti sestavit čočky zvětšující více než 2000krát. Mohli bychom sestavit soustavu čoček, která zvětšuje 10 000krát, ale stále bychom neviděli dva blízké body kvůli omezení danému geometrickou optikou, proto, že nejkratší čas není přesné kritérium.



Obr. 27.9 Rozlišovací schopnost optické soustavy

Pravidlo určující, jak daleko od sebe musí být dva body, aby se jejich obrazy jevíly odděleně, lze velmi krásně formulovat způsobem souvisejícím s časy potřebnými pro různé paprsky. Předpokládejme, že nyní aberace nebereme v úvahu a představme si, že pro určitý bod  $P$  (obr. 27.9) projdou všechny paprsky od předmětu po jeho obraz  $T$  za stejný čas. (To není pravda, neboť soustava není dokonalá, ale to je jiný problém.) Nyní si vezměme jiný blízký bod  $P'$  a položme si otázku, zda jeho obraz bude odlišný od  $T$ . Jinými slovy, zda je můžeme rozlišit. Samozřejmě, podle geometrické optiky by měly existovat dva bodové obrazy, ale to, co skutečně uvidíme, může být dost rozmazané a nemusíme být schopni usoudit, že jsou tam dva body. Podmínkou k tomu, aby druhý bod byl zaostřen na odlišitelném jiném místě než první, je, že časy pro okrajové paprsky  $P'ST$  a  $P'RT$  na stranách čoček si pro oba body nesmí být rovny, a to po

drahách od obou možných předmětových bodů po daný obrazový bod. Proč? Protože, kdyby si byly tyto časy rovny, je samozřejmé, že oba body by se zobrazily v témž místě. Takže časy si nebudou rovny. O kolik se však musí lišit, abychom mohli říct, že se nezobrazí v společném bodě a že jejich obrazy můžeme odlišit? Obecné pravidlo pro rozlišení, platné pro jakoukoli optickou soustavu, je takové: Dva rozdílné bodové zdroje lze rozlišit jen tehdy, když jeden zdroj se zobrazí do takového bodu, že časy potřebné pro okrajové paprsky vycházející z druhého zdroje do toho bodu se v porovnání s jeho skutečným obrazovým bodem liší o víc než o jednu periodu. Je třeba, aby časový rozdíl mezi horním a spodním paprskem do nepravého bodu obrazu byl větší než určitá hodnota, konkrétně, aby byla přibližně rovna periodě kmitů světla

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{\nu}, \quad (27.17)$$

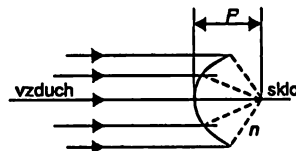
kde  $\nu$  je frekvence světla (počet kmitů za sekundu; též rychlost dělená vlnovou délkou). Je-li vzdálenost mezi body rovna  $D$  a je-li úhel rozevření čočky  $\theta$ , lze dokázat, že podmínka (27.17) je zcela rovnocenná výroku, že  $D$  musí být větší než  $\lambda \sin \theta / n$ , kde  $n$  je index v bodě  $P$  a  $\lambda$  je vlnová délka. Nejmenší věci, které tedy můžeme vidět, mají přibližně velikost vlnové délky světla. Podobný vztah platí pro teleskopy; říká nám, jaký je nejmenší úhel mezi dvěma hvězdami, které lze ještě rozlišit.<sup>36)</sup>

---

<sup>36)</sup> Tento úhel je přibližně roven  $\lambda/D$ , kde  $D$  je průměr čočky. Uměli byste říct proč?

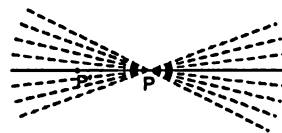
## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 27.1 ■ Rovnoběžný svazek světla šířící se ve vzduchu se soustřeďuje v ohnisku lámavé plochy, jež ohraničuje prostředí o indexu lomu  $n$ . Najděte tvar této plochy.



- 27.2 ■ Vnější průměr skleněné kapiláry je roven  $D$ , index lomu skla  $n$ . Díváme-li se na trubičku ze strany, zdá se nám, že vnitřní malý průměr kapiláry je  $d$ . Čemu je roven vnitřní průměr  $d'$  ve skutečnosti?

- 27.3 ■ Svazek světelných paprsků se sbíhá v určitém bodě  $P$ . V daném bodě  $Q$  na ose chceme umístit takovou odrazivou plochu, aby se svazek sbíhal v jiném bodě  $P'$ . Najděte tvar takové plochy.



- 27.4 ■ Čočka s ohniskovou vzdáleností  $F$  vytváří skutečný obraz vzdáleného předmětu, který pozorujeme zvětšovací sklem o ohniskové vzdálenosti  $f$ . Čemu bude rovno zvětšení soustavy, jsou-li čočky rozmístěny tak, že přední ohnisko okuláru splývá se zadním ohniskem objektivu?

- 27.5 ■ Normální lidské oko se může zaostřit na předmět, jenž leží ve vzdálenosti 25 cm a dále. Nechť je přímo proti oku umístěna obyčejná tenká spojná čočka s ohniskovou vzdáleností 5 cm. Jaké budou krajní polohy pozorovaného předmětu, abychom ho viděli ostře? Určete zvětšení soustavy pro každou z těchto poloh.

- 27.6 ■ Teleobjektiv se skládá ze spojně čočky s ohniskovou vzdáleností  $f_1 = 30$  cm a rozptylky s ohniskovou vzdáleností  $f_2 = -10$  cm. Vzdálenost mezi oběma čočkami je 27,5 cm. Kde musí být umístěna fotografická deska, na kterou chceme vyfotografovat předmět nacházející se před první čočkou ve vzdálenosti 10 m? Pozorně vysledujte chod paprsku.



- 27.7 ■ 200palcový Haleův teleskop má ohniskovou vzdálenost 160 m. Jaký je rozdíl v poloze obrazu při pozorování vzdálených hvězd a a) Měsíce, b) umělé družice Země nacházející se ve vzdálenosti 320 km?

- 27.8 ■ Dvě tenké čočky  $L$  a  $L'$  s ohniskovými vzdálenostmi  $f$  a  $f'$  se nacházejí ve vzájemné vzdálenosti  $D$ . Najděte ekvivalentní ohniskovou vzdálenost  $F$  takového uspořádání a vzdálenosti  $\Delta$  a  $\Delta'$  od hlavních rovin k oběma čočkám.

# Elektromagnetické záření

---

## 28.1 ELEKTROMAGNETIZMUS

### 28.2 ZÁŘENÍ

### 28.3 DIPÓLOVÝ ZÁŘIČ

### 28.4 INTERFERENCE

#### **28.1 ELEKTROMAGNETIZMUS**

Nejdramatičtější okamžiky rozvoje fyziky jsou ty, v nichž dochází k velkým syntézám, kdy se přijde na to, že jevy, které se předtím zdály být rozdílné, jsou jen různými stránkami stejné věci. Historie fyziky je historií takových syntéz a základ úspěchu fyzikální vědy spočívá v tom, že jsme schopni dělat syntézy.

Snad nejdramatičtější okamžik v rozvoji fyziky v 19. století zažil J. C. Maxwell jednoho dne v roce 1860, když zkombinoval zákony elektřiny a magnetizmu se zákony chování světla. Jako důsledek se podařilo zčásti rozuzlit vlastnosti světla – dávne a jemné substance, tak důležité a tajemné, že při psaní knihy Genesis jí byl vyhrazen zvláštní akt stvoření. Když Maxwell dokončil svůj objev, mohl říci: „Budiž elektřina a magnetizmus, a je světlo!“

Tento kulminační okamžik se dlouho připravoval v postupném objevování a odhalování zákonů elektřiny a magnetizmu. Podrobné studium tohoto příběhu si necháme na příští rok. Stručně to bylo asi takto: Postupným objevováním vlastností elektřiny a magnetizmu, elektrických přitažlivých a odpudivých sil a magnetických sil se ukázalo, že ačkoliv jsou všechny tyto síly dost složité, všechny se zmenšují jako převrácená hodnota druhé mocniny vzdálenosti. Příkladem může být známý Coulombův zákon elektrostatických sil mezi nehybnými náboji. V důsledku toho při dostatečně velkých vzdálenostech jeden systém nábojů jen velmi málo ovlivní druhý systém nábojů. Když se Maxwell pokoušel shrnout všechny rovnice nebo zákony, jež byly do té doby objeveny, všiml si, že jsou vzájemně nekonzistentní a k tomu, aby se celý systém stal konzistentním, musel ke svým rovnicím přidat další člen. S tímto novým členem dostal překvapující předpověď, že část elektrického a magnetického pole by se měla zmenšovat mnohem pomaleji v závislosti na vzdálenosti než převrácená hodnota její druhé mocniny, a to jako převrácená hodnota první mocniny vzdálenosti! Tak si uvědomil, že elektrické proudy na jednom

místě mohou ovlivnit jiné velmi vzdálené náboje a předpověděl nám dnes dobře známé základní jevy – přenos rádiových vln, radar apod.

Zdá se, že je to zázrak, když někoho, kdo mluví v Evropě, můžeme slyšet jen pomocí pouhých elektrických vlivů tisíce kilometrů daleko v Los Angeles. Jak je to možné? Je to tím, že pole se nemění s převrácenou hodnotou druhé mocniny, ale jen s převrácenou hodnotou první mocniny vzdálenosti. Nakonec se zjistilo, že samotné světlo jsou elektrické a magnetické vlivy šířící se na ohromné vzdálenosti, vytvořené téměř neuvěřitelně rychlými oscilacemi elektronů v atomech. Všechny tyto jevy zahrnujeme pod název *záření*, přesněji *elektromagnetické záření*, neboť existuje ještě jeden nebo dva další druhy záření. Slovo záření téměř vždy znamená elektromagnetické záření.

A tak je celý vesmír propojen. Atomové pohyby ve vzdálených hvězdách mají na tak velkou vzdálenost dostatečný vliv na to, aby uvedly do pohybu elektrony v našem oku – a tak víme o tom, že jsou hvězdy. Kdyby tento zákon neplatil, byli bychom, pokud jde o vnější svět, v naprosté temnotě! Elektrické vlnobití v galaxii vzdálené pět miliard světelných let – což je zatím nejvzdálenější objekt, který jsme našli – může ještě významně a pozorovatelně ovlivnit proudy ve velkém „talíři“ před naším radioteleskopem. Proto vidíme hvězdy a galaxie.

Tento pozoruhodný jev bude předmětem naší diskuze v této kapitole. Na začátku tohoto kurzu fyziky jsme si načrtli hrubý obraz světa, ale nyní jsme lépe připraveni na to, abychom pochopili některé jeho stránky. A tak si projdeme některé jeho části podrobněji. Začneme popisem postavení fyziky na konci 19. století. Vše, co bylo tehdy známo o fyzikálních zákonech, lze shrnout takto:

Byly zde nejprve zákony sil; jedním z nich byl gravitační zákon, který jsme si napsali několikrát. Síla působící na objekt o hmotnosti  $m$ , způsobená jiným objektem  $M$ , je dána vztahem

$$F = \kappa \frac{mM}{r^2} r_0, \quad (28.1)$$

kde  $r_0$  je jednotkový vektor ve směru od  $m$  k  $M$  a  $r$  je vzdálenost mezi nimi.

Dále tady byly zákony elektřiny a magnetizmu, jak byly známy na konci 19. století. Jsou to tyto zákony: Elektrické síly působící na náboj  $q$  lze popsat pomocí dvou polí označených jako  $E$  a  $B$  a rychlosti  $v$  náboje  $q$  podle rovnice

$$F = q(E + v \times B). \quad (28.2)$$

Pro úplnost musíme dodat, jak jsou vyjádřena  $E$  a  $B$  za daných okolností. Za přítomnosti více nábojů jsou  $E$  a  $B$  rovny součtu příspěvků od jednotlivých nábojů. Takže, umíme-li najít  $E$  a  $B$  způsobené jedním nábojem, potřebujeme k určení celkového  $E$  a  $B$  pouze sečíst účinky všech nábojů ve vesmíru! To je princip superpozice.

Jaký je vztah pro elektrické a magnetické pole vytvořené jedním nábojem? Ukazuje se, že je to velmi komplikovaný vztah a k jeho pochopení je třeba hodně studovat a přemýšlet. O to tu ale nejde. Nyní si uvedeme tento zákon, jen tak, abychom na čtenáře zapůsobili krásou přírody, tj. abychom ukázali, že je *možné* shrnout všechny základní poznatky na jednu stranu textu a to pomocí notace, s níž je už teď obeznámen. Zákon určující pole jednotlivého náboje je, pokud víme, úplný a přesný (kromě kvantové mechaniky), vypadá však dost komplikovaně. Nebudeme studovat jeho jednotlivé části, jen si ho napíšeme, abychom ukázali, že jej lze napsat a abychom už napřed viděli, jak vypadá. Vlastně, nejlepší způsob zápisu zákonů elektrického a magnetického

kého pole není ten, který nyní použijeme, ale zahrnuje tzv. *rovnice pole*, jimiž se budeme zabývat asi za rok. Matematická symbolika těchto rovnic je odlišná a nová. Proto si tento zákon zapíšeme ve formě, jež sice není vhodná pro výpočty, ale pomocí symboliky, kterou známe.

Intenzita elektrického pole  $E$  je dána vztahem

$$E = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r'_0}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{r'_0}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} r'_0 \right]. \quad (28.3)$$

Co nám říkají jednotlivé členy? Vezměme si první výraz

$$E = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r'_0}{r'^2}$$

což je, samozřejmě, Coulombův zákon, který už známe. Zde  $q$  je náboj vytvářející pole,  $r'_0$  je jednotkový vektor ve směru od bodu  $P$ , v němž měříme pole,  $r'$  je vzdálenost z  $P$  do  $q$ . Coulombův zákon však není správný. Objevy 19. století ukázaly, že působení se nemohou šířit rychleji, než je určitá základní rychlost  $c$ , kterou nyní nazýváme rychlost světla. Není správné tvrdit, že první člen je Coulombův zákon a nejen proto, že nemůžeme vědět, kde se nyní náboj nachází a jak je vzdálený, ale také proto, že jedině, co může ovlivnit pole na daném místě v daném okamžiku je chování nábojů *v minulosti*. V jaké minulosti? Toto zpoždění času (*retardace času*) je rovno času potřebnému k překonání vzdálenosti od náboje do bodu  $P$  rychlostí  $c$ . Zpoždění je rovno  $r'/c$ .

Abychom vzali v úvahu zpoždění času, přidáváme k  $r$  malou čárku, což označuje vzdálenost, jež existovala mezi  $P$  a  $q$  v čase, kdy informace, jež právě dorazila k  $P$ , opustila  $q$ . Na chvíli předpokládejme, že náboj svítil a že toto světlo mohlo dojít k  $P$  pouze rychlostí  $c$ . Pak bychom při pohledu na  $q$  neviděli, kde se nyní nachází, ale kde byl před nějakou dobou. Veličina, jež v našem vzorci vystupuje, je zdánlivý směr  $\hat{r}'$ , – směr, kde byl náboj předtím – tj. retardovaný směr a  $r'$  je retardovaná vzdálenost. To by již bylo možné pochopit, ale ani to není správné. Celá věc je mnohem komplikovanější.

Ve vzorci je více členů. Další člen jakoby svědčil o tom, že příroda bere v úvahu retardační efekt, velmi hrubě řečeno. Ukazuje na to, že bychom měli vypočítat zpožděné coulombovské pole a přičíst k němu opravu rovnou rychlosti změny pole násobené zpožděním času. Zdá se, že příroda se pokouší odhadnout, čemu se v současnosti bude pole rovnat, a to pomocí rychlosti změny vynásobené časovým zpožděním. Stále však nejsme na konci. Je zde ještě třetí člen – druhá derivace podle  $t$  jednotkového vektoru ve směru náboje. Vzorec je nyní hotov, a to je vše, co se týká intenzity elektrického pole libovolně se pohybujícího náboje.<sup>37)</sup>

Magnetické pole je dáno vztahem

$$B = -r'_0 \times \frac{E}{c}. \quad (28.4)$$

Tyto vzorce jsme si uvedli proto, abychom ukázali krásu přírody nebo určitým způsobem, sílu matematiky. Nečiníme si nárok na pochopení, proč je možné tak mnoho napsat na tak malém prostoru, ale vztahy (28.3) a (28.4) obsahují podstatu elektrických generátorů, světla a všech jevů elektřiny a magnetizmu. Samozřejmě, aby věc byla úplná, musíme také něco vědět o chování materiálů – o vlastnostech hmoty, jež nejsou pomocí (28.3) přiměřeně popsány.

<sup>37)</sup> Nerelativistickými rychlostmi. (Pozn. red.)

Abychom dokončili náš popis světa 19. století, musíme se zmínit ještě o jedné velké syntéze, k níž v tomto století došlo a jež se také týkala do značné míry Maxwella, a to syntézy tepelných jevů a mechaniky. Tento předmět budeme brzy studovat.

Ve 20. století bylo dále zjištěno, že všechny Newtonovy dynamické zákony jsou chybné a k jejich opravě bylo třeba zavést kvantovou mechaniku. Newtony zákony platí přibližně pro jevy a věci, jež mají dostatečně velké rozměry. Zákony kvantové mechaniky byly zkombinovány se zákony elektřiny teprve nedávno a tak vznikla řada zákonů nazvaných *kvantová elektrodynamika*. Navíc bylo objeveno mnoho nových jevů, prvním byla radioaktivita, objevená Becquerelem r. 1898 těsně na konci 19. století. Studium radioaktivity přineslo poznatky o jádrech a o nových druzích sil, jež nejsou ani gravitační ani elektrické, ale působí mezi novými částicemi s různými interakcemi, a tyto jevy nebyly ještě dostatečně prozkoumány.

Pro ty puntičkáře, kteří toho vědí víc (profesorům, kteří snad budou číst tento text), bychom měli dodat, že označujeme-li (28.3) za úplné vyjádření poznatků elektrodynamiky, nejsme zcela přesní. Existoval problém, jež nebyl koncem 19. století zcela vyřešen. Pokusíme-li se vypočítat pole působící na náboj od všech nábojů, včetně náboje samotného, dostaneme se do těžkostí například při určování vzdálenosti náboje od sebe samého a při dělení touto veličinou rovnou nule. Dodnes není vyřešen problém zacházení s tou částí pole, jež je vytvořena samotným nábojem, na nějž chceme, aby pole působilo. Takže to necháme stranou; neznáme ještě úplné řešení této hádanky, proto se jí budeme vyhýbat, jak jen to bude možné.

## 28.2 ZÁŘENÍ

Udělalí jsme souhrn obrazu světa. Nyní ho použijeme při probírání jevu nazvaného záření. Abychom mohli tento jev zkoumat, musíme vybrat z rovnice (28.3) tu část, která se mění nepřímou úměrně vzdálenosti a ne druhé mocnině vzdálenosti. Ukázalo se, že tato část rovnice má tak jednoduchý tvar, že jsme oprávněni studovat optiku a elektrodynamiku elementárním způsobem na základě tohoto „zákona“ pro elektrické pole vytvořené pohybující se vzdáleným elektrickým nábojem. Dočasně si ho vezmeme jako daný zákon a podrobně se o něm budeme učit příští rok.

První z členů, jež vystupují v (28.3), závisí celkem jasně na převrácené hodnotě druhé mocniny vzdálenosti a druhý je jen korekcí zpoždění, takže lze snadno ukázat, že oba se mění s převrácenou hodnotou druhé mocniny vzdálenosti. Všechny jevy, o něž se zajímáme, pocházejí z třetího členu, který není konečnou příliš komplikovaný. Říká toto: Podívej se směrem k náboji a všimni si směru jednotkového vektoru (jeho konec můžeme promítnout na povrch jednotkové koule). Při pohybu náboje jednotkový vektor mění směr a zrychlení tohoto *jednotkového vektoru je to, co hledáme*. To je vše. Takže:

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{r}'_0}{dt^2} \quad (28.5)$$

vyjadřuje zákon záření, neboť když se dostatečně vzdálíme, je to jediný důležitý člen, který se mění nepřímou úměrně vzdálenosti. (Ty části, jež závisí na druhé mocnině vzdálenosti, se natolik zmenšily, že se o ně nezajímáme.)

Nyní můžeme vztah (28.5) studovat trochu podrobněji, abychom zjistili, co znamená. Předpokládejme, že náboj se nějakým způsobem pohybuje a my ho pozorujeme z určité vzdále-

nosti. Na chvíli si představme, že náboj „svítí“ (přestože je to právě světlo, co chceme vysvětlit). Představme si ho jako malou bílou tečku, takže uvidíme, jak se tato tečka pohybuje kolem dokola. Nevidíme však *přesně*, jak se pohybuje právě *teď*, a to pro zpoždění, o němž jsme mluvili, *Záleží* na tom, jak se pohybovala *dříve*. Jednotkový vektor  $r'_0$  míří směrem zdánlivé polohy náboje. Pohybuje-li se  $r'_0$  po mírné křivce, jeho zrychlení má dvě složky. Jednou z nich je příčná složka, neboť konec  $r'_0$  se pohybuje nahoru a dolů a druhou je podélná složka, neboť konec  $r'_0$  zůstává na kulové ploše. Snadno lze ukázat, že druhá složka je mnohem menší a že se mění převráceně s druhou mocninou  $r$ , je-li  $r$  velmi velké. Snadno si to uvědomíme, když si představíme, že daný zdroj vzdalujeme více a více. Potom se chvění  $r'_0$  zdá být stále menší a menší úměrně převrácené hodnotě vzdálenosti, ale podélná složka zrychlení se mění mnohem rychleji než převrácená hodnota vzdálenosti. Pro praktické účely nám stačí udělat projekci pohybu na rovinu v jednotkové vzdálenosti. Nalézáme toto pravidlo: Představme si, že se díváme na pohybující se náboj a vše, co vidíme je zpožděné – jako malíř, který se pokouší malovat scénu na plátno v jednotkové vzdálenosti. Samozřejmě, že skutečný malíř nebere v úvahu, že se světlo šíří určitou rychlostí, ale maluje svět, jak ho vidí. Chceme vidět, jak vypadá jeho obraz. Vidíme tečku, znázorňující náboj, pohybující se po obraze. Zrychlení tohoto bodu je úměrné intenzitě elektrického pole. To je vše, co potřebujeme.

Rovnice (28.5) je tedy úplným a správným vztahem pro záření; dokonce obsahuje všechny relativistické efekty. Často ji však chceme aplikovat na ještě jednodušší situaci, v níž se pohybují náboje pouze na krátké vzdálenosti poměrně malou rychlostí. Pohybují-li se pomalu, nedostanou se příliš daleko, takže časové zpoždění je prakticky konstantní. Náš zákon je potom ještě jednodušší, neboť zpoždění je fixováno. Představujeme si proto, že náboj koná velmi malý pohyb v efektivně neměnné vzdálenosti. Zpoždění při vzdálenosti  $r$  je  $r/c$ . Pravidlo je pak takové: vykonává-li nabitý předmět malý pohyb do strany na vzdálenost  $x(t)$ , potom úhel, o nějž se posune jednotkový vektor  $r'_0$ , je roven  $x/r$ , a protože  $r$  je prakticky konstantní, je  $x$ -ová složka  $d^2 r'_0 / dt^2$  rovna prostě zrychlení  $x$  v nějakém dřívějším čase, takže nakonec dostáváme zákon, který jsme chtěli

$$E_x(t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} a_x \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (28.6)$$

Důležitá je jen složka  $a_x$  kolmá na směr pohledu. Podívejme se, proč tomu tak je. Je jasné, že když se náboj pohybuje ve směru k nám sem a tam, jednotkový vektor ve směru náboje se vůbec nemění a nezrychluje. Takže důležitý je pouze příčný pohyb, pouze zrychlení, které vidíme promítnuté na stínítko.

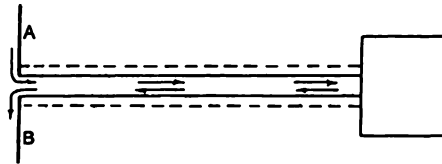
### 28.3 DIPÓLOVÝ ZÁŘIČ

Za náš základní „zákon“ pro elektromagnetické záření budeme považovat vztah (28.6), o němž budeme předpokládat, že je přesný, tj. že elektrické pole vytvořené zrychleným nerelativistickým pohybem náboje lze popsat na velmi velkých vzdálenostech  $r$  tímto vztahem. Elektrické pole se mění nepřímo úměrně  $r$  a je úměrné zrychlení náboje promítnutému do „roviny pohledu“, přičemž toto zrychlení není dnešním zrychlením, ale zrychlením, jímž se náboj pohyboval v dřívějším čase a čas zpoždění je roven  $r/c$ . Ve zbývajících částech této kapitoly si prodiskutujeme tento zákon, abychom mu lépe fyzikálně rozuměli, neboť ho chceme použít při výkladu všech jevů týkajících se šíření světla a rádiových vln jako jsou odraz, lom, interference, ohyb



a rozptyl. Je to ústřední zákon a je to vše, co potřebujeme. Celý zbytek rovnice (28.3) jsme si uvedli jen pro celkový rámeček, abychom pochopili, kam (28.6) zapadá a odkud pochází.

O vztahu (28.3) budeme diskutovat dále až ve vyšším ročníku. Zatím ho přijmeme za správný a to nejen teoreticky. K ilustraci tohoto zákona bychom mohli navrhnout řadu experimentů. Potřebujeme k tomu zrychlující se náboj. Měl by to být jeden náboj, ale pokud můžeme dosáhnout současného pohybu velkého množství nábojů, nic se nestane, neboť víme, že pole bude dáno součtem účinků jednotlivých nábojů – prostě je sečteme. Jako příklad si vezmeme dva kusy drátu spojené s generátorem, jak je znázorněno na obr. 28.1. Generátor vytváří rozdíl potenciálů nebo pole, které v jednom okamžiku odtahuje elektrony pryč z kousku *A* a odvádí je do kousku *B* a potom o infinitesimálně čas později se změní jeho účinek a elektrony se pohybují zpět do *A*! V těchto drátech jsou v jednom okamžiku náboje urychlovány, dejme tomu směrem nahoru a v dalším okamžiku jsou v drátech *A* i *B* urychlovány směrem dolů. Skutečnost, že potřebujeme dva dráty a generátor, souvisí s tím, že tak se to provádí v praxi. Konečný výsledek je takový, že náboj se urychluje nahoru a dolů, jakoby *A* a *B* tvořily jediný drát. Drát, který je velmi krátký v porovnání se vzdáleností, kterou světlo projde za jednu periodu, se nazývá *elektrický dipólový oscilátor*. Tím jsou tedy splněny podmínky, abychom mohli použít náš zákon, který říká, že takový náboj vytváří elektrické pole. Ještě potřebujeme přístroj na detekci tohoto elektrického pole. Přístroj, který k tomu použijeme, je stejný – je to pár drátů jako *A* a *B*! Působí-li na takové zařízení elektrické pole, vyvolá sílu, jež bude v obou drátech pohybovat elektrony nahoru nebo dolů. Takový signál lze detekovat pomocí usměrňovače zapojeného mezi *A* a *B* a pomocí drátku se tato informace přenáší na zesilovač, kde se natolik zesílí, že můžeme slyšet tón o zvukové frekvenci, jímž je radiofrekvence modulována. Pocít-li tento snímač elektrické pole, začne z reproduktoru znít silný zvuk a není-li zde elektrické pole, zvuk nevznikne.

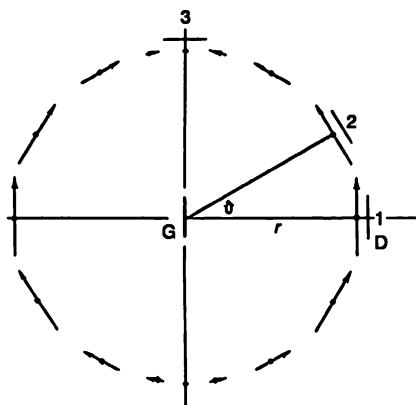


Obr. 28.1 Generátor vysokofrekvenčního signálu pohybuje náboji ve dvou drátech nahoru a dolů

Protože v místnosti, kde měříme vlny, jsou umístěny i jiné objekty, naše elektrické pole rozkmitá elektrony i v těchto objektech. Elektrické pole způsobí, že tyto další náboje budou kmitat a tím budou také působit na náš snímač. Proto, aby experiment byl úspěšný, musí obě zařízení být blízko sebe, aby vlivy od stěn a nás samotných – odražené vlny – byly relativně malé. Proto se ukáže, že zkoumaný jev není v přesném dokonalém souladu s rovnicí (28.6), ale soulad bude dostatečně dobrý, abychom mohli ocenit platnost tohoto zákona.

Při zapnutí generátoru *G* slyšíme zvukový signál. Je-li detektor *D* rovnoběžný s *G*, v bodě 1 zaznamená silné elektrické pole (obr. 28.2). Pod jakýmkoliv azimutálním úhlem vzhledem k ose *G* zjistíme stejné pole, neboť *G* nemá směrové účinky. Na druhé straně, pro detektor v poloze 3 je pole nulové. To je zcela v pořádku, neboť náš vztah říká, že pole bude úměrné průmětu zrychlení náboje kolmému ke směru pohledu. Proto, když se díváme dolů na *G*, náboj se pohybuje dopředu a dozadu od *D*, takže nevzniká žádný efekt. Tím je ověřeno první pravidlo: Když se náboj pohybuje ve směru přímo k nám, nevyvolává žádný účinek. Za druhé, náš vztah říká, že elektrické pole má být v rovině, v níž leží *G* a *r*, kolmé na *r*, takže, umístíme-li *D* do bodu 1, ale otočíme ho o 90°, nedostaneme žádný signál. Tak zjišťujeme, že elektrické pole je

skutečně vertikální a ne horizontální. Přemístíme-li  $D$  do nějaké střední polohy 2, zjistíme, že nejsilnější signál je tehdy, když  $D$  je orientováno jako na obr. 28.2. I když  $G$  je vertikální, nevyvolává pole, které by s ním bylo prostě rovnoběžné – to, co se projevuje, je kolmý průmět zrychlení do směru pohledu. Právě proto je v bodě 2 signál slabší než v bodě 1.



Obr. 28.2 Okamžité elektrické pole na kulové ploše, která má ve středu lineárně oscilující náboj

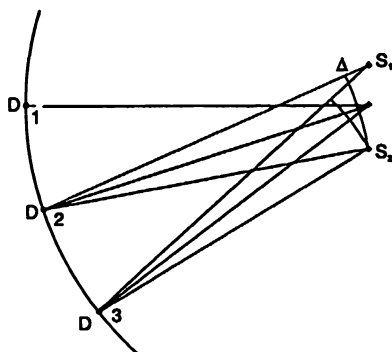
## 28.4 INTERFERENCE

Dále si můžeme ověřit, co se stane, máme-li vedle sebe dva zdroje vzdálené několik centimetrů (obr. 28.3). Zákon říká, že účinky dvou zdrojů se mají sčítat v bodě 1, jsou-li oba zdroje napájeny ze stejného generátoru a jsou-li pohyby nábojů nahoru a dolů v obou současně, takže celkové elektrické pole je rovno součtu obou polí a je dvakrát silnější než předtím.

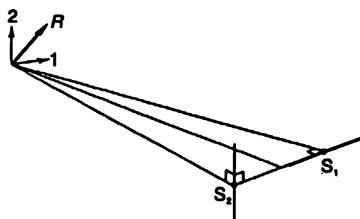
Nyní vzniká zajímavá možnost. Předpokládejme, že náboje v  $S_1$  a  $S_2$  se zrychlují směrem nahoru a dolů, ale že  $S_2$  se zpožďuje za  $S_1$ , takže jsou fázově posunuty o  $180^\circ$ . Pole vytvořené zdrojem  $S_1$  pak bude mít jeden směr a pole vytvořené zdrojem  $S_2$  opačný směr, a proto bychom v bodě 1 neměli naměřit žádné účinky. Fázi oscilací lze snadno měnit pomocí přívodu, jenž přivádí signál na  $S_2$ . Změnou délky tohoto přívodu změníme dobu, kterou potřebuje signál, aby se dostal na  $S_2$  a tím změníme fázi oscilací. Nastavením této délky můžeme skutečně najít takové místo, kde přesto, že  $S_1$  a  $S_2$  pracují, není žádný signál. To, že oba zdroje pracují, lze snadno zjistit, neboť, když odpojíme jeden z nich, druhý můžeme slyšet. Takže oba zdroje mohou mít nulové účinky, je-li všechno správně nastaveno.

Velmi zajímavé je ukázat, že skládání dvou polí je skutečně vektorovým součtem. Přesvědčili jsme se o tom již při pohybu vertikálním, ale ověřme si dva nerovnoběžné směry. Nejdříve vrátíme  $S_1$  a  $S_2$  do původní situace, tj. aby byly ve fázi, takže oba systémy se pohybují současně. Nyní ale otočíme  $S_1$  o  $90^\circ$ , jak je znázorněno na obr. 28.4. V bodě 1 bychom měli mít součet dvou účinků, z nichž jeden je vertikální a druhý horizontální. Elektrické pole je vektorovým součtem těchto dvou signálů, jež jsou ve fázi – oba jsou současně silné a současně nulové. Celkové pole by mělo tvořit signál  $R$  pod úhlem  $45^\circ$ . Pootočme-li  $D$  tak, abychom dostali maximální signál, mělo by to být v úhlu kolem  $45^\circ$ , a ne vertikálně. Pootočme-li  $D$  do pravých úhlů s tímto směrem, měli bychom dostat nulový signál, což lze snadno změřit. Skutečně, právě takové chování zjistíme!

## ELEKTROMAGNETICKÉ ZÁŘENÍ



Obr. 28.3 Znáornění interference zdrojů



Obr. 28.4 Znáornění vektorového skládání polí

Jak se nyní projeví retardace? Jak můžeme ukázat, že signál je retardovaný? Pomocí složitěho zařízení bychom mohli měřit čas, za který přijde signál, ale existuje ještě jiný velmi jednoduchý způsob. Vraťme se k obr. 28.3 a předpokládejme, že  $S_1$  a  $S_2$  jsou ve fázi. Oba zdroje kmitají současně a v bodě 1 vytvářejí stejné elektrické pole. Předpokládejme však, že přejdeme do určitého bodu 2, který je blíže k  $S_2$  a dále od  $S_1$ . Pak podle principu, že zrychlení mají být retardována o čas  $r/c$ , pokud nejsou tato zpoždění stejná, signály už nebudou ve fázi. Proto by mělo být možné najít takovou polohu, pro niž se vzdálenosti  $D$  od  $S_1$  a od  $S_2$  liší o nějakou hodnotu  $\Delta$  takovou, že výsledný signál je nulový. Vzdálenost  $\Delta$  má být tedy rovna vzdálenosti, kterou světlo proletí za poloviční periodu oscilace generátoru. Můžeme se posunout ještě dále a najít bod, v němž tento rozdíl odpovídá celé periodě, tj. signál z první antény dosáhne bodu 3 s časovým zpožděním, jež je větší než časové zpoždění od druhé antény, a to právě o dobu, za niž proběhne jeden kmit elektrického proudu. Proto jsou obě elektrická pole vytvořena v bodě 3 znovu ve fázi a signál je opět silný.

Tím končí naše diskuze o experimentálním ověření některých důležitých stránek rovnice (28.6). Samozřejmě, neověřili jsme si závislost  $1/r$  intenzity elektrického pole nebo skutečnost, že společně s elektrickým polem se šíří i magnetické pole. To by si vyžadovalo použití dost komplikovaných zařízení a v tomto bodě by nám to sotva pomohlo k lepšímu pochopení věci. Ale ověřili jsme si ty vlastnosti, jež jsou nejdůležitější pro naše další aplikace a ke studiu dalších vlastností elektromagnetických vln se vrátíme za rok.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

28.1 ■ Podejte geometrickou interpretaci a najděte absolutní hodnoty následujících komplexních veličin:

a)  $re^{i\varphi/2} + re^{-i\varphi/2}$ ,

b)  $\sum_{n=0}^{N-1} re^{in\varphi}$ .

# 29

# Interference

## 29.1 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

## 29.2 ENERGIE ZÁŘENÍ

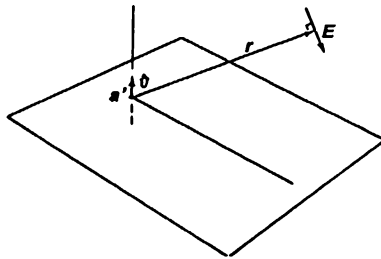
## 29.3 SINUSOIDÁLNÍ VLNY

## 29.4 DVA DIPÓLOVÉ ZÁŘIČE

## 29.5 MATEMATIKA INTERFERENCE

### 29.1 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

V této kapitole si probereme matematicky důkladněji problematiku předcházející kapitoly. Pomocí kvalitativních argumentů jsme si ukázali, že v radiačním poli dvou zdrojů jsou maxima a minima. Nyní stojíme před problémem nejen kvalitativního, ale i detailnějšího matematického popisu pole.



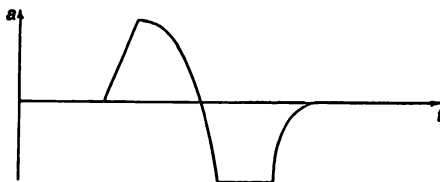
Obr. 29.1 Intenzita elektrického pole  $E$  vyvolaného kladným nábojem, jehož retardované zrychlení je  $a'$

Již jsme provedli dosti uspokojivou fyzikální analýzu vztahu (28.6), ale zůstává zde několik bodů týkajících se matematiky. V první řadě, pohybuje-li se náboj zrychleně podél přímky nahoru a dolů s velmi malou amplitudou, intenzita pole v nějakém bodě ve směru svírajícím s osou pohybu úhel  $\vartheta$  bude kolmá ke směru pohledu a leží v rovině, v níž leží i zrychlení, i směr pohledu (obr. 29.1). Označíme-li vzdálenost  $r$ , bude mít intenzita elektrického pole v čase  $t$  velikost

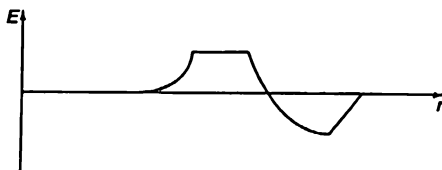
$$E(t) = -\frac{qa\left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad (29.1)$$

kde  $a\left(t - \frac{r}{c}\right)$  je zrychlení v čase  $\left(t - \frac{r}{c}\right)$ , tedy retardované zrychlení.

Bylo by zajímavé nakreslit obraz pole v různých situacích. Zajímavý je faktor  $a(t - r/c)$ . Abychom ho pochopili, vezměme si nejjednodušší případ, kdy  $\vartheta = 90^\circ$  a pole znázorníme graficky. Předtím jsme uvažovali, že se nacházíme na jednom místě a ptáme se, jak se v něm mění pole v závislosti na čase. Místo toho se nyní podíváme, jak pole vypadá v různých místech prostoru v daném okamžiku. To, co chceme, je tedy „momentka“ znázorňující, jaké pole je na různých místech. Samozřejmě, že to záleží na zrychlení náboje. Nejdříve předpokládejme, že se náboj pohyboval určitým způsobem: zpočátku byl v klidu a najednou se začal nějak zrychlovat, jak je ukázáno na obr. 29.2 a pak se zastavil. Potom, o něco později, změníme intenzitu pole na různých místech. Můžeme tvrdit, že pole bude mít tvar znázorněný na obr. 29.3. V každém bodě je pole určeno zrychlením náboje v nějakém předcházejícím čase, přičemž zpoždění je rovno  $r/c$ . Pole ve vzdálenějších bodech je určeno zrychlením v dřívějším a dřívějším čase. Takže křivka na obr. 29.3 je v jistém smyslu „obráceným“ průběhem zrychlení jako funkce času. Vzdálenost souvisí s časem prostřednictvím konstantního škálovacího faktoru  $c$ , který často uvažujeme rovný jedné. Snadno to můžeme zjistit, podíváme-li se na matematické vlastnosti zrychlení  $a(t - r/c)$ . Když přidáme k  $t$  malý čas  $\Delta t$ , pro  $a(t - r/c)$  dostaneme stejnou hodnotu, jako kdybychom od  $r$  odečtali malou vzdálenost:  $\Delta r = -c \Delta t$ .



Obr. 29.2 Zrychlení náboje jako funkce času



Obr. 29.3 Elektrické pole v pozdějším čase jako funkce polohy (změna  $1/r$  je zanedbána)

Vyjádřeno jinými slovy: Když přidáme malý čas  $\Delta t$ , původní hodnotu  $a(t - r/c)$  můžeme získat tak, že vzdálenost zvětšíme o  $\Delta r = c \Delta t$ . To znamená, že s rostoucím časem se pole pohybuje od zdroje jako vlna. To je důvod, proč někdy říkáme, že světlo se šíří jako vlny. Je to ekvivalentní tomu, že pole se zpožďuje nebo tomu, že elektrické pole se s rostoucím časem šíří směrem ven do prostoru.

Zajímavým případem je, když se náboj  $q$  pohybuje nahoru a dolů jako oscilátor. Situace, kterou jsme experimentálně studovali v předcházející kapitole byla taková, že posunutí  $x$  v kterémkoli okamžiku bylo rovno určité konstantě  $x_0$  (amplitudě oscilací) násobené  $\cos \omega t$ . Zrychlení je pak

$$a = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = a_0 \cos \omega t, \quad (29.2)$$

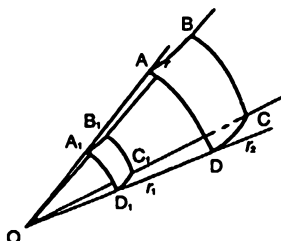
kde  $a_0$  je maximální zrychlení,  $-\omega^2 x_0$ . Dosazením do vztahu (29.1) najdeme

$$E = -q \sin \vartheta \frac{a_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}{4 \pi \epsilon_0 r c^2}. \quad (29.3)$$

Ponechme stranou úhel  $\vartheta$  i konstantní členy a podívejme se, jaká je funkce polohy a času.

## 29.2 ENERGIE ZÁŘENÍ

Nejdříve si uvědomme, že v kterémkoliv čase nebo na kterémkoliv místě se pole mění jako převrácená hodnota vzdálenosti  $r$ , jak jsme se zmínili již dříve. Nyní musíme upozornit, že energetický obsah vlny nebo energetické účinky, jež může mít takové elektrické pole, jsou úměrné druhé mocnině intenzity pole. Máme-li například nějaký náboj nebo oscilátor v elektrickém poli a na tento oscilátor necháme působit pole, náboj se začne pohybovat. Je-li to lineární oscilátor, zrychlení, rychlost a posunutí vyvolané působením elektrického pole na tento náboj, budou všechny úměrné intenzitě pole. Proto kinetická energie, kterou získá náboj, je úměrná druhé mocnině pole. Takže akceptujeme, že energie, kterou může pole dodat nějakému systému, je nějak úměrná druhé mocnině intenzity pole.



Obr. 29.4 Energie proudící v jehlanu  $OABCD$  nezávisí na vzdálenosti  $r$

To znamená, že energie, kterou může zdroj dodat, se bude při vzdalování stále zmenšovat. Skutečně, mění se nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti; ale to lze velmi snadno vysvětlit. Kdybychom chtěli zachytit všechnu energii vlny v nějakém kuželi ve vzdálenosti  $r_1$  (obr. 29.4) a totéž bychom udělali ve vzdálenosti  $r_2$ , zjistili bychom, že množství energie připadající na jednotkovou plochu v jakémkoliv místě závisí nepřímo úměrně na druhé mocnině  $r$ , ale velikost plochy protínající kužel závisí přímo úměrně na druhé mocnině  $r$ . Takže energie, kterou můžeme získat z vlny v nějakém daném prostorovém úhlu, je stále stejná, bez ohledu na to, jak jsme daleko! Konkrétně, celková energie, již bychom mohli získat z celé vlny tím, že bychom dokola umístili absorbující oscilátory, představuje určitou neměnnou hodnotu. Proto skutečnost, že amplituda  $E$  se mění jako  $1/r$ , představuje totéž, jako kdybychom řekli, že existuje tok energie, jenž se neztrácí, stále proudí a rozšiřuje se na stále větší a větší oblast. Tím, že náboj osciloval, ztratil určitou energii, již nemůže nikdy znova nabýt, energie se neustále šíří dál a dál, aniž by se nějak zmenšovala. Tedy, jsme-li dostatečně vzdáleni tak, aby naše základní aproximace byla dostatečně dobrá, náboj nemůže získat zpět energii, jež byla vyzářena. Samozřejmě, tato energie stále někde existuje a lze ji zachytit pomocí jiných systémů. Tuto „ztrátu“ energie budeme studovat dále ve 32. kapitole.

Nyní se pojdme podrobněji zabývat tím, jak se mění vlna (29.3) jako funkce času v daném místě a jako funkce polohy v daném čase. Opět zanedbáme závislost na  $1/r$  a konstantě.

## 29.3 SINUSOIDÁLNÍ VLNY

Nejdříve zafixujeme polohu  $r$  a sledujeme pole jako funkci času. Pole osciluje s úhlovou frekvencí  $\omega$ . Úhlovou frekvenci  $\omega$  lze definovat jako rychlost změny fáze s časem (radiány za sekundu). Něco takového jsme již studovali, proto by nám měla být problematika dost známá. Vypočítali jsme, čemu je rovna perioda – to je doba potřebná k jedné oscilaci, jednomu úplnému cyklu. Je rovna  $2\pi/\omega$ , neboť  $\omega$  násobené periodou je rovna jednomu cyklu funkce kosinus.

Nyní si zavedeme novou veličinu, která se ve fyzice často používá. Souvisí s opačnou situací, kdy  $t$  zafixujeme a na vlnu se díváme jako na funkci vzdálenosti  $r$ . Vidíme, že vlna jako funkce  $r$  (29.3) také osciluje. Odhlédneme-li od závislosti  $1/r$ , vidíme, že  $E$  osciluje se změnou polohy. Takže analogicky s  $\omega$  můžeme definovat veličinu nazvanou vlnové číslo a označenou jako  $k$ . Je definována jako rychlost změny fáze se vzdáleností (radiány na metr). Fáze se tedy mění, pohybujeme-li se v prostoru, při neměnném čase.

Existuje další veličina, jež odpovídá periodě a již bychom mohli nazvat periodou v prostoru, ale obvykle se nazývá vlnová délka a označuje se  $\lambda$ . Vlnová délka představuje vzdálenost, na níž se rozprostírá jeden úplný cyklus. Pak lze snadno vidět, že vlnová délka je rovna  $2\pi/k$ , protože  $k$  násobené vlnovou délkou je rovna počtu radiánů, o něž se změnila fáze (když je to součin změny radiánů na metr a počtu metrů) a pro jeden cyklus musí být rovna  $2\pi$ . Takže  $k\lambda = 2\pi$  je analogií vztahu  $\omega T = 2\pi$ .

Pro naši konkrétní vlnu platil mezi frekvencí a vlnovou délkou určitý vztah, ale uvedené definice  $k$  a  $\omega$  platí zcela obecně a za jiných fyzikálních podmínek mezi vlnovou délkou a frekvencí může být jiná souvislost. Avšak v našem případě lze snadno určit rychlost změny fáze se vzdáleností, neboť, když označíme fázi  $\varphi = \omega(t - r/c)$  a vyjádříme její parciální derivaci podle  $r$ , pro rychlost změny  $\partial\varphi/\partial r$  platí

$$\left| \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right| = k = \frac{\omega}{c}. \quad (29.4)$$

Existuje více způsobů, jak vyjádřit tento vztah. Například

$$\lambda = cT \quad (29.5)$$

$$\omega = ck \quad (29.6)$$

$$\lambda f = c \quad (29.7)$$

$$\omega\lambda = 2\pi c. \quad (29.8)$$

Proč je vlnová délka rovna součinu  $c$  a periody? To je velmi snadné – protože, když sedíme nehybně a čekáme, až kolem nás proběhne jedna perioda, přesunou se vlny šířící se rychlostí  $c$  o vzdálenost  $cT$  a samozřejmě projdou právě jednu vlnovou délku.

Za jiné fyzikální situace odlišné od případu světla nemusí  $k$  tak jednoduše souviset s  $\omega$ . Označíme-li vzdálenost podél osy  $x$ , vztah pro kosinovou vlnu s vlnovým číslem  $k$  a úhlovou frekvencí  $\omega$  šířící se ve směru  $x$  se zapíše obecně jako  $\cos(\omega t - kx)$ .

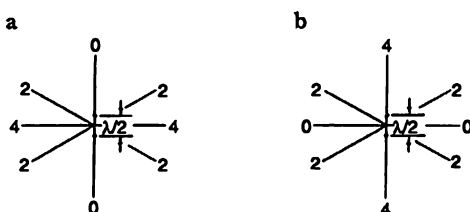
Když jsme si určili pojem vlnové délky, můžeme si říct něco o podmínkách, za kterých platí (29.1). Vzpomínáme si, že pole se skládá z více složek; jedna z nich se mění jako  $1/r$ , druhá jako



$1/r^2$  a jiné dokonce rychleji. Stálo by za to zjistit, za jakých okolností je složka pole  $1/r$  nejdůležitější a ostatní poměrně malé. Přirozenou odpovědí je: Jdeme-li dostatečně daleko, neboť členy, jež se mění nepřímo úměrně druhé mocnině, se nevyhnutně stávají zanedbatelnými v porovnání s členem  $1/r$ . Jak daleko je „dostatečně daleko“? Kvalitativně řečeno je to tak daleko, že ostatní členy jsou řádově o  $\lambda/r$  menší než člen  $1/r$ . Jakmile jsme dále než je vzdálenost několika vlnových délek, je (29.1) pro pole vynikající aproximací. Někdy se oblast za vzdáleností několika vlnových délek nazývá „vlnová zóna“.

## 29.4 DVA DIPÓLOVÉ ZÁŘIČE

Dále se věnujme matematice, která se týká skládání účinků od dvou oscilátorů při hledání výsledného pole v daném bodě. V několika případech, o nichž jsme již uvažovali v předcházející kapitole, je to velmi snadné. Nejdříve provedeme kvalitativní a později více kvantitativní popis. Vezměme si jednoduchý případ, kdy jsou středy oscilátorů umístěny ve stejné horizontální rovině jako detektor a směr vibrací je vertikální.



Obr. 29.5 Intenzita pole v různých směrech od dvou dipólových oscilátorů vzdálených od sebe o polovinu vlnové délky. Vlevo: ve fázi, když  $\alpha = 0$ . Vpravo: v protifázi, když  $\alpha = \pi$

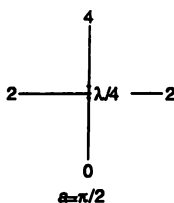
Na obr. 29.5a je pohled shora na takové dva oscilátory a v tomto konkrétním případě jsou od sebe vzdáleny o polovinu vlnové délky ve směru sever – jih. Oscilují současně se stejnou fází, již nazveme nulovou. Rádi bychom našli intenzitu záření v různých směrech. Intenzitou záření rozumíme množství energie nesené polem za sekundu, úměrné druhé mocnině časové střední hodnoty intenzity elektrického pole. Takže to, co máme hledat, chceme-li vědět, jak je světlo jasné, je druhá mocnina intenzity elektrického pole, nikoli samotná intenzita pole. Intenzita elektrického pole nám udává velikost síly působící na stacionární náboj, ale množství energie letící za sekundu kolem (ve wattech na čtvereční metr) je úměrné druhé mocnině intenzity elektrického pole. Konstantu úměrnosti odvodíme v další kapitole. Při pohledu ze západní strany přispívají oba oscilátory stejně a ve fázi, takže elektrické pole je dvakrát tak silné než by bylo, kdyby tam byl jen jeden oscilátor. Proto *intenzita záření je čtyřikrát silnější než by byla, kdyby tam byl jen jeden oscilátor.* (Čísla na obr. 29.5 znázorňují, jaká bude intenzita pole v porovnání s tím, že by tam byl jen jeden oscilátor s jednotkovou silou.) Při pozorování ze severní nebo jižní strany je účinek jednoho oscilátoru fázově posunut vzhledem k účinku druhého oscilátoru přesně o půl kmitu, neboť jsou od sebe vzdáleny o polovinu vlnové délky, a jejich pole navzájem ruší. Pod určitým úhlem (přesně  $30^\circ$ ) je intenzita rovna 2, takže intenzita klesá jako 4, 2, 0 atd. Potřebujeme se naučit, jak tato čísla najít pro jiné úhly. Je to otázka skládání dvou oscilací s různými fázemi.

Podívejme se zkrátka na některé jiné zajímavé případy. Opět předpokládejme, že oscilátory jsou vzdáleny o polovinu vlnové délky, ale fáze  $\alpha$  jednoho se opožďuje o půl periody za fází dru-

hého (obr. 29.5b). Intenzita v západním směru je nyní rovna nule, neboť jeden oscilátor „tlačí“, když druhý „tahá“. V severním směru přichází signál od bližšího oscilátoru za určitý čas a od druhého o půl periody později. Ten však byl *převodně* o půl periody posunut, je proto nyní přesně v časovém souladu s prvním a intenzita v tomto směru je rovna 4 jednotkám. Intenzita ve směru pod úhlem  $30^\circ$  je stále rovna 2, jak dále uvidíme.

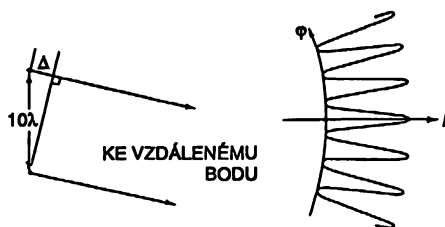
Dostáváme se k zajímavému případu, jenž se vyznačuje užitečnými vlastnostmi. Poznamenejme, že jeden z důvodů, proč jsou tyto souvislosti mezi oscilátory zajímavé, je směřování radiovysílačů. Například, když stavíme anténový systém a chceme vyslat signál, řekněme na Havaj, sestavíme antény, jako na obr. 29.5a, a vysíláme s našimi dvěma anténami ve fázi, neboť Havaj se od nás nachází na západ. Potom se rozhodneme, že zítra budeme vyslat směrem do Alberty v Kanadě. Protože je od nás na sever a ne na západ, jediné, co stačí udělat, je obrátit fázi jedné z našich antén a můžeme vyslat na sever. Anténové systémy můžeme sestavit různě. Náš systém je ten nejjednodušší možný. Můžeme však sestavit mnohem složitější systémy. Změnou fáze v různých anténách můžeme paprsky směřovat do různých směrů a největší výkon vyslat v žádaném směru aniž bychom s anténou pohnuli! V obou předcházejících případech ztrácíme mnoho výkonu unikajícího na opačnou stranu. Při vyslání směrem k Albertě jde stejný výkon i na Velikonoční ostrov, a bylo by zajímavé si položit otázku, zda by bylo možné vyslat jen *jedním* směrem. Na první pohled se nám může zdát, že s takovým párem antén bude výsledek vždy symetrický. Abychom ukázali i takovou možnost, podívejme se na případ, jenž není symetrický.

Co se stane, budou-li antény od sebe vzdáleny o čtvrt vlnové délky a když ta, která je severněji (S), se bude zpožďovat o čtvrt periody za tou, která je jižněji (J)? (Obr. 29.6) V západním směru, jak později uvidíme, dostaneme 2. V jižním směru dostaneme nulu, neboť signál z J přijde za určitý čas, ale signál z S přijde o čtvrt periody později, ale protože je sám o čtvrt periody opožděn, bude výsledné zpoždění rovno půl periodě a výsledný efekt bude nulový. Na druhé straně, v severním směru přichází signál o čtvrt periody dříve než z J, neboť je blíže o čtvrt vlnové délky, avšak jeho fáze se opožďuje o čtvrt periody, což se právě kompenzuje s časovým zpožděním, takže oba signály jsou ve fázi, intenzita pole je dvakrát tak velká a energie čtyřikrát tak velká.



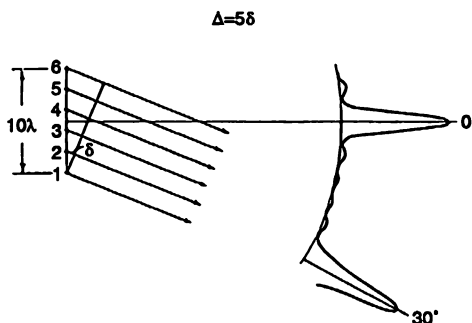
Obr. 29.6 Pár dipólových antén vyzářující maximální výkon v jednom směru

Pomocí určité šikovnosti při rozmístování antén a při nastavení jejich fází tedy můžeme vyslat celý výkon v jednom směru. Energie je však ještě stále rozložena ve velkém prostorovém úhlu. Můžeme zařídit, aby výkon byl ostřeji nasměrován v jednom směru? Opět vezmeme případ vyslání na Havaj, kde vysíláme vlny na západ a na východ, přičemž se šíří v dost velkém úhlu, neboť dokonce při  $30^\circ$  máme stále poloviční intenzitu – zbytečně ztrácíme výkon. Můžeme udělat něco lepšího? Mějme situaci, v níž je vzdálenost mezi anténami rovna deseti vlnovým délkám (obr. 29.7), což je víc podobné naší experimentální situaci z předešlé kapitoly s rozestupem antén rovnajícím se několika vlnovým délkám a ne malému zlomku vlnové délky. Zde máme zcela jiný obraz.

Obr. 29.7 Obraz rozložení intenzity pro dva dipóly vzdálené od sebe o  $10\lambda$ 

Je-li rozestup mezi anténami roven deseti vlnovým délkám (pro jednoduchost bereme případ se stejnými fázemi), ve směru východ – západ jsou antény ve fázi a dostáváme velkou intenzitu, čtyřikrát větší než bychom měli pouze při jedné anténě. Na druhé straně, při směru odlišném jen o velmi malý úhel, odpovídají rozdíly v časech polovině periody a intenzita je rovna nule. Přesněji, když vyznačíme směr od každého z oscilátorů do vzdáleného bodu a když je rozdíl  $\Delta$  těchto dvou vzdáleností roven  $\lambda/2$  (polovina kmitu), budou kmity v protifázi a vyskytne se první nula. (Části obrázku nejsou nakresleny ve stejném měřítku, je to jen hrubý náčrt.) To znamená, že v žádaném směru máme velmi ostrý paprsek, neboť, když se jen o málo odchýlíme, ztratíme celou intenzitu. Bohužel, pro praktické účely konstrukce vysílacích soustav, zdvojnásobili se vzdálenost  $\Delta$ , posunou se fáze o celou periodu, což je přesně totéž, jako kdyby byly znovu ve fázi! Takže máme mnoho po sobě jdoucích maxim a minim, podobných těm, jež jsme našli v kapitole 28 při vzdálenosti antén rovnající se dvěma půlvlnovým délkám.

Jak se můžeme zbavit všech těchto nadbytečných maxim nebo, jak se jim říká, „laloků“? Můžeme se jich zbavit velmi zajímavým způsobem. Předpokládejme, že bychom mezi dvě antény umístili další sadu antén, takže vnější by byly stále vzdáleny o  $10\lambda$ , ale mezi ně bychom, řekněme ve vzdálenosti každé  $2\lambda$ , umístili další anténu všechny ve fázi. Nyní budeme mít šest antén a je samozřejmé, že ve směru východ – západ bude intenzita mnohem větší než při jedné anténě. Intenzita pole bude šestkrát větší a intenzita záření třicet šestkrát větší (rovna druhé mocnině intenzity pole). V tomto směru budeme mít 36 jednotek. Podíváme-li se nyní na okolní body, nulu opět najdeme přibližně jako předtím, ale jdeme-li dál, tam, kde jsme měli velký „hrb“, najdeme nyní „hrb“ mnohem menší. Pokusme se ukázat proč.



Obr. 29.8 Šestidipólová anténová souprava a část rozložení její intenzity

Důvod je třeba hledat v tom, že při vzdálenosti  $\Delta$  rovnající se vlnové délce bychom sice mohli očekávat „hrb“, neboť dipóly 1 a 6 jsou tehdy ve fázi a vzájemně se podporují při vytváření pole v tomto směru, ale dipóly 3 a 4 jsou přibližně o půl vlny fázově posunuty vzhledem k 1 a 6,

a i když 1 a 6 pracují spolu, 3 a 4 také pracují spolu, ale s opačnou fází. Proto je intenzita v tomto směru velmi malá, ale ne nulová, protože účinky se úplně neruší. Takový jev nastává při ostatních maximech – dostáváme velmi malé „hrby“, přičemž paprsek je v žádaném směru velmi silný. V tomto konkrétním případě nastane i něco jiného – jsou-li vzdálenosti mezi sousedními dipóly  $2\lambda$ , lze najít takový úhel, při kterém jsou rozdíly vzdáleností  $\delta$  od sousedních dipólů rovny přesně jedné vlnové délce, takže účinky všech dipólů jsou opět ve fázi. Fáze každého dipólu je vzhledem k následující fázi posunuta o celý cyklus, takže všechny jsou opět ve fázi a v tomto směru máme další silný paprsek! V praxi je možné se tomu vyhnout, neboť dipóly se k sobě mohou přiblížit těsněji než je vzdálenost jedné vlnové délky. Přidáme-li další antény s rozstupem menším než jedna vlnová délka, nemůže takové maximum vzniknout. Avšak fakt, že při určitých úhlech vzniknout *může*, jsou-li vzdálenosti mezi anténami větší než jedna vlnová délka, je velmi zajímavý a je to užitečný jev pro jiné aplikace – nikoli pro šíření rádiových vln, ale pro difrakční mřížky.

## 29.5 MATEMATIKA INTERFERENCE

Skončili jsme kvalitativní rozbor jevů souvisejících s dipólovými zářiči a je třeba se naučit, jak je analyzovat kvantitativně. Chceme-li najít účinek od dvou zdrojů pod nějakým úhlem v nejobecnějším případě, když mezi oscilátory je nějaký vzájemný fázový posun  $\alpha$  a amplitudy  $A_1$  a  $A_2$  nejsou stejné, zjistíme, že musíme sčítat dva kosiny se stejnými frekvencemi, ale s rozdílnými fázemi. Tento rozdíl fází lze snadno najít; skládá se ze zpoždění způsobeného rozdílem vzdáleností a vlastním, zabudovaným, fázovým posunem oscilátorů. Matematicky musíme najít součet  $R$  dvou vln:  $R = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ . Jak se to dělá?

Je to skutečně velmi snadné a předpokládáme, že to už umíme udělat. Přesto však naznačíme, jak se to dělá. Ovládneme-li dobře matematiku a dost toho víme o kosinu a sinu, můžeme to snadno vypočítat přímo. Nejjednodušší případ je, když  $A_1$  a  $A_2$  jsou stejné, řekněme, že jsou obě rovny  $A$ . V takovém případě (takovou metodu můžeme nazvat *trigonometrickou* metodou řešení) máme

$$R = A [\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)]. \quad (29.9)$$

Na hodinách trigonometrie jsme se snad naučili pravidlo

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B). \quad (29.10)$$

Známe-li ho, můžeme ihned napsat

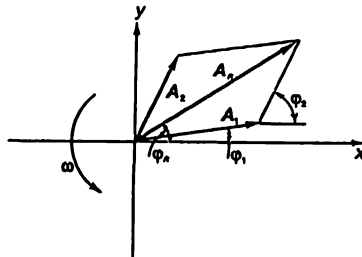
$$R = 2 A \cos \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \left( \omega t + \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 \right); \quad (29.11)$$

vidíme tedy, že máme řešení ve tvaru vlny s novou fází a s novou amplitudou. Obecně je výsledkem vlna s novou amplitudou  $A_R$  (můžeme ji nazvat výslednou amplitudou), oscilující se stejnou frekvencí, ale s různou fází  $\varphi_R$  nazvanou výsledná fáze. V našem konkrétním případě je výsledná amplituda

$$A_R = 2 A \cos \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (29.12)$$

a výsledná fáze je rovna průměru z obou fází. Náš problém je vyřešen.

Nyní předpokládejme, že si nepamätujeme, že součet dvou kosinů je roven dvojnásobku součinu kosinů polovičního součtu a kosinu polovičního rozdílu. Pak můžeme použít jiný způsob analýzy, jenž je víc geometrický. Každou funkci kosinus  $\omega t$  si můžeme představit jako horizontální projekci rotujícího vektoru. Předpokládejme, že vektor  $A_1$  délky  $A_1$  rotuje v čase, takže úhel, který svírá s horizontální osou je  $\omega t + \varphi_1$ . Na chvíli vynecháme  $\omega t$  a uvidíme, že se nic nestane. Předpokládejme, že v čase  $t=0$  uděláme momentku, i když ve skutečnosti obraz rotuje s úhlovou rychlostí  $\omega$  (obr. 29.9). Průmět  $A_1$  na horizontální osu je přesně  $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ . Nyní, pro  $t=0$ , můžeme znázornit druhou vlnu jako nějaký jiný, také rotující vektor  $A_2$  délky  $A_2$  a pod úhlem  $\varphi_2$ . Oba vektory rotují se stejnou úhlovou rychlostí, proto se jejich vzájemná poloha nemění. Systém se otáčí jako tuhé těleso. Horizontální průmět  $A_2$  je  $A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ . Z vektorového počtu však víme, že sčítáme-li dva vektory (pomocí běžného pravidla rovnoběžníka) a nakreslíme výsledný vektor  $A_R$ ,  $x$ -ová složka výslednice je rovna součtu  $x$ -ových složek jednotlivých vektorů. To je řešení našeho problému. Snadno se můžeme přesvědčit, že pro speciální případ  $A_1 = A_2 = A$ , jímž jsme se již zabývali, dostaneme správný výsledek. Z obr. 29.9 uvidíme, že v tomto případě leží  $A_R$  uprostřed mezi  $A_1$  a  $A_2$  a s každým z nich svírá úhel  $1/2(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Proto vidíme, že jako předtím  $A_R = 2A \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Z trojúhelníku je také zřejmé, že otáčí-li se  $A_R$  dokola, jeho fáze je rovna průměru úhlů příslušejících  $A_1$  a  $A_2$  v případě, že amplitudy jsou stejné. Je jasné, že stejně jednoduše můžeme najít řešení i pro případ, kdy amplitudy nejsou stejné. To můžeme nazvat *geometrickým* způsobem řešení problému.



Obr. 29.9 Geometrický způsob skládání dvou kosinových vln. Celý diagram rotuje proti směru hodinových ručiček úhlovou rychlostí  $\omega$ .

Existuje ještě další způsob řešení tohoto problému a to *analytický*. Znamená tolik, že místo toho, abychom museli kreslit obrázky (jako obr. 29.9), můžeme napsat něco, co říká totéž co obrázek: místo kreslení vektorů píšeme *komplexní čísla* jako reprezentaci vektorů. Reálné části komplexních čísel jsou skutečné fyzikální veličiny. V našem případě mohou být vlny zapsány takto:  $A_1 \exp i(\omega t + \varphi_1)$  (reálná část je  $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ) a  $A_2 \exp i(\omega t + \varphi_2)$ . Nyní je můžeme sčítat

$$R = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) e^{i\omega t} \quad (29.13)$$

nebo pro komplexní amplitudu

$$\hat{R} = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} = A_R e^{i\varphi_R}. \quad (29.14)$$

To je řešení daného problému, neboť výsledek má tvar komplexního čísla s velikostí  $A_R$  a fází  $\varphi_R$ .

Abychom viděli, jak se tato metoda používá, najdeme amplitudu  $A_R$ , což je „délka“  $\hat{R}$ . Abychom našli „délku“ komplexní veličiny, vynásobíme ji vždy veličinou komplexně sdruženou, a dostaneme druhou mocninu délky. Komplexně sdružená veličina – to je tentýž výraz, jen znaménka u  $i$  jsou opačná. Máme

$$A_R^2 = \left( A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} \right) \left( A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2} \right). \quad (29.15)$$

Násobením dostáváme  $A_1^2 + A_2^2$  (zde se exponenciály ruší) a pro smíšený člen platí:

$$A_1 A_2 \left( e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right).$$

Protože

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta + \cos \vartheta - i \sin \vartheta,$$

to je

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2 \cos \vartheta,$$

dostáváme konečný výsledek

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (29.16)$$

Jak vidíme, je to v souladu s délkou  $A_R$  na obr. 29.9, kdybychom ji počítali použitím pravidel trigonometrie.

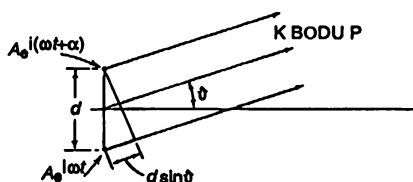
Intenzita součtu dvou účinků je rovna  $A_1^2$  (což bychom dostali, kdybychom měli jen jeden z nich) plus intenzita  $A_2^2$  (což bychom dostali, kdybychom měli jen druhý z nich) plus nějaká korekce. Tuto korekci *vyvolává interference*. Vlastně je to pouze rozdíl mezi tím, co bychom získali jednoduchým sčítáním intenzit záření a tím, jaká je skutečnost. Nazýváme to *interferencí*, ať už je pozitivní nebo negativní. (Interference v angličtině obvykle znamená protivenství nebo překážku, ale ve fyzice jazyk často používáme v jiném než běžném významu!) Je-li interferenční člen kladný, mluvíme o konstruktivní interferenci, i když to může znít hrozně každému, kdo není fyzik! V opačném případě mluvíme o destruktivní interferenci.

Nyní se podívejme, jak je třeba aplikovat náš obecný vztah (29.16) na případ dvou oscilátorů vsituaci, kterou jsme kvalitativně prodiskutovali. Abychom mohli použít tento obecný vztah, stačí určit rozdíl fází  $\varphi_1 - \varphi_2$  mezi dopadajícími signály v daném bodě. (Samozřejmě, interference závisí pouze na rozdílu fází, nikoli na samotných fázích.) Proto uvažujme případ dvou oscilátorů se stejnou amplitudou vzdálených od sebe o vzdálenost  $d$  s daným fázovým rozdílem. (Když je fáze jednoho rovna 0, fáze druhého je rovna  $\alpha$ .) Ptáme se, jaká bude intenzita v nějakém, azimutálním směru, jenž tvoří se směrem východ – západ úhel  $\vartheta$ ? (Všimněte si, že to není  $\vartheta$ , který se vyskytuje v (29.1). Jsme na rozpacích, zda použít nekonvenční symbol, např.  $\vartheta$  nebo běžný symbol  $\vartheta$  (obr. 29.10).) Vztah, který platí mezi fázemi, lze určit, všimneme-li si, že rozdíl vzdáleností  $P$  pro oba oscilátory je  $d \sin \vartheta$ , takže příspěvek k rozdílu fází je roven počtu vlnových délek v  $d \sin \vartheta$  vynásobených  $2\pi$ . (Kdo chce spekulovat, ten bude chtít násobit vlnové číslo  $k$ , což je rychlost změny fáze v závislosti na vzdálenosti,  $d \sin \vartheta$ , což dá stejný výsledek.) Rozdíl fází způsobený rozdílem vzdáleností je tedy  $(2\pi/\lambda) d \sin \vartheta$ , ale je zde ještě fáze  $\alpha$ , v důsledku časového nastavení oscilátorů. Rozdíl fází bude

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha + \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \vartheta. \quad (29.17)$$

Zde jsou zahrnuty všechny případy. Zbývá nám dosadit tento výraz do (29.16) pro případ, že  $A_1 = A_2$ , a můžeme vypočítat všechny výsledky pro dvě antény se stejnou intenzitou.

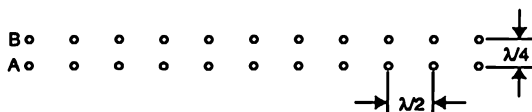
Podívejme se, co se stane v různých případech. Například důvod, proč je při  $30^\circ$  na obr. 29.5 intenzita rovna 2, je tento: dva oscilátory jsou od sebe vzdáleny  $\lambda/2$ , takže při  $30^\circ$   $d \sin \vartheta = \lambda/4$ . Proto  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \lambda/4 \lambda = \pi/2$  a interferenční člen je roven nule. (Sčítáme dva vektory svírající  $90^\circ$ .) Výsledkem je přepona rovnoramenného pravouhelného trojúhelníka, rovná  $\sqrt{2}$  násobené jednotkovou amplitudou. Umocníme-li ji na druhou, dostáváme intenzitu dvojnásobně větší než v případě jednoho oscilátoru. Podobným způsobem lze vypočítat všechny ostatní případy.



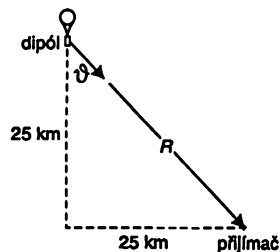
Obr. 29.10 Dva oscilátory se stejnou amplitudou fázově posunuté o úhel  $\alpha$

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 29.1 ■ Dvě antény jsou rozmístěny jako na obr. úlohy 29.5. Kmitají ve stejné fázi; vyzařuje-li jedna z nich ve všech horizontálních směrech s intenzitou  $I_0$ , intenzita vyzařování druhé z nich je  $2 I_0$ . Čemu je rovna pozorovaná intenzita vyzařování obou antén v různých směrech ukázaných na obrázku?
- 29.2 ■ Čtyři stejné dipólové zářiče jsou rozmístěny rovnoběžně ve stejných vzdálenostech 2,50 cm. Kmitají na frekvenci  $3,00 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$  a jsou sfázovány tak, že fáze každého z nich se opožďuje za fází předcházejícího o  $90^\circ$ . Najděte intenzitu záření ve velké vzdálenosti od soustavy v rovinné rovině (tj. kolmé k ose dipólů) a nakreslete graf této závislosti v polárních souřadnicích. Takové grafické znázornění se nazývá směrový diagram anténové soustavy.
- 29.3 ■ Dvě parabolické antény radioteleskopu Caltechu v Owens Valley jsou vzájemně vzdáleny 480 m. Každá anténa shromažďuje dopadající záření v malém přijímači umístěném v ohnisku. Oba signály postupují ke směšovači v poloviční vzdálenosti mezi anténami, kde se sčítají a měří se střední hodnota druhé mocniny výsledné amplitudy. S jakou přesností je možno určit úhlovou polohu vzdáleného bodového zdroje pozorovaného radioteleskopem, jsou-li měřitelné už 10 % fluktuace výstupního signálu? Vlnovou délku vezměte rovnou 50 cm.
- 29.4 ■ Náboj  $q$  se pohybuje po kružnici poloměru  $a$  a úhlovou rychlostí  $\omega$ . Vypočítejte elektrické pole vytvářené nábojem ve velké vzdálenosti  $r$  od soustavy po úhlem  $\vartheta$  k ose kruhové orbity. Najděte intenzitu vyzařování v rovině orbity a na ose orbity na velkých vzdálenostech  $r$ .
- 29.5 ■ Všech  $N$  dipólů v řadě  $A$  na obrázku kmitá ve stejné fázi a všechny dipóly v řadě  $B$  se fázově opožďují za dipóly v řadě  $A$  o  $90^\circ$ . Znázorněte úhlovou závislost vyzařování v rovinné rovině na velkých vzdálenostech (jako v úloze 29.2).



- 29.6 ■ Elektrony v dlouhém tenkém rovném drátu délky  $L$  kmitají s úhlovou frekvencí  $\omega$  a malou amplitudou  $a$  se stejnou fází podél celého drátu. Najděte elektrické pole, které elektrony vytvářejí pod úhlem  $\vartheta$  vzhledem ke směru drátu na velkých vzdálenostech  $R$  od něho ( $R \gg L$ ).
- 29.7 ■ Množství energie na jednotku plochy přenášené elektromagnetickou vlnou je úměrné střední hodnotě druhé mocniny intenzity elektrického pole. Určete část celkové energie, kterou vyzařuje kmitající náboj a která dopadá na jednotku plochy kolmé k průvodiči  $R$  vedenému pod úhlem  $\vartheta$  k ose kmitů. Vyjádřete tuto veličinu ve  $\text{W m}^{-2}$  pro případ vertikálně orientovaného kmitajícího dipólu zavěšeného k radiosondě kosmického záření, jenž se nachází ve výšce 25 km a v horizontální vzdálenosti od přijímače rovněž 25 km a vyzařuje celkem 0,5 W.





# 30 Difrakce

- 30.1 VÝSLEDNÁ AMPLITUDA  $n$  STEJNÝCH OSCILÁTORŮ
- 30.2 DIFRAKČNÍ MŘÍŽKA
- 30.3 ROZLIŠOVACÍ SCHOPNOST MŘÍŽKY
- 30.4 PARABOLICKÁ ANTÉNA
- 30.5 BAREVY TENKÝCH VRSTEV; KRYSTALY
- 30.6 DIFRAKCE NA NEPRŮZRAČNÉ CLONĚ
- 30.7 POLE NÁBOJŮ KMITAJÍCÍCH V ROVINĚ

## 30.1 VÝSLEDNÁ AMPLITUDA $n$ STEJNÝCH OSCILÁTORŮ

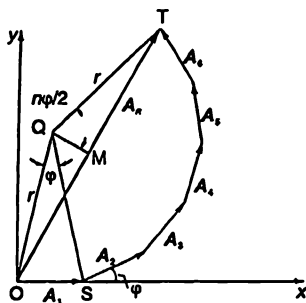
Tato kapitola je přímým pokračováním kapitoly předcházející, i když název se změnil z „interference“ na „difrakci“. Zatím se nikomu nepodařilo uspokojivě definovat rozdíl mezi interferencí a difrakcí. Je to otázka konvence, není mezi nimi nějaký důležitý fyzikální rozdíl. Zhruba je můžeme rozlišit tak, že interferuje-li jen několik zdrojů, například dva, výsledek nazýváme interferencí a je-li zdrojů mnoho, častěji se používá výraz difrakce. Nebudeme se proto znepokojovat, zda jde o interferenci nebo difrakci, ale ihned budeme pokračovat v tématu předešlé kapitoly.

Budeme se zabývat  $n$  stejně od sebe vzdálenými oscilátory se stejnými amplitudami, ale různými fázemi, a to buď proto, že kmitají s různými fázemi nebo proto, že na ně hledíme pod takovým úhlem, že dochází k časovému zpoždění. Z jednoho nebo druhého důvodu musíme sčítat něco jako

$$R = A [\cos \omega t + \cos (\omega t + \varphi) + \cos (\omega t + 2\varphi) + \dots + \cos (\omega t + (n - 1)\varphi)], \quad (30.1)$$

kde  $\varphi$  je fázový rozdíl mezi sousedními oscilátory při pohledu z daného směru. Přitom platí  $\varphi = \alpha + 2\pi d \sin \vartheta / \lambda$ .

## VÝSLEDNÁ AMPLITUDA $n$ STEJNÝCH OSCILÁTORŮ



Obr.30.1 Výsledná amplituda pro  $n = 6$  rovnoměrně od sebe vzdálených oscilátorů s fázovým rozdílem  $\varphi$  mezi sousedními oscilátory

Nyní musíme sečíst všechny členy. Uděláme to geometricky. První má délku  $A$  a má nulovou fázi. Druhý má také délku  $A$ , ale fázi má  $\varphi$ . Další má opět délku  $A$  a fázi  $2\varphi$  atd. Je jasně vidět, že jde jakoby o pohyb podél  $n$  stran pravidelného mnohoúhelníka (obr. 30.1). Jeho vrcholy leží ovšem na kružnici a výslednou amplitudu snadno najdeme, určíme-li poloměr této kružnice.

Předpokládejme, že bod  $Q$  je středem kružnice. Pak úhel  $OQS$  je roven fázi  $\varphi$ . (To proto, že poloměr  $QS$  svírá s  $A_2$  stejný úhel jako svírá poloměr  $QO$  s  $A_1$ .) Pro poloměr  $r$  pak musí platit

$$A = 2r \sin \frac{\varphi}{2},$$

z čehož lze určit  $r$ . Velký úhel  $OQT$  je roven  $n\varphi$ , takže platí

$$A_R = 2r \sin \frac{n\varphi}{2}.$$

Z těchto dvou vztahů vyloučíme  $r$  a dostaneme

$$A_R = A \frac{\sin \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (30.2)$$

Výsledná intenzita je proto

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (30.3)$$

Provedme analýzu tohoto výrazu a podívejme se na některé jeho důsledky. Začneme zkouškou pro  $n = 1$  a správně dostaneme  $I = I_0$ . Pro  $n = 2$  můžeme napsat

$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

a máme

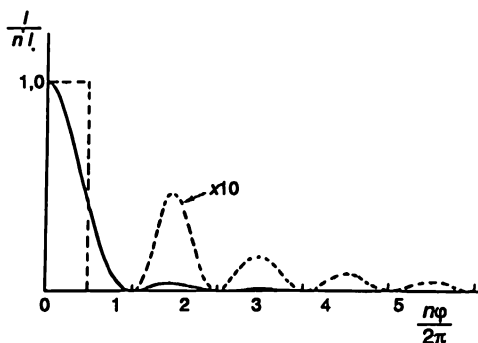
## DIFRAKCE

$$A_R = 2 a \cos \frac{\varphi}{2},$$

což souhlasí s (29.12).

Původní myšlenka, proč jsme začali skládat více zdrojů, byla ta, že v jednom směru snad získáme větší intenzitu než v ostatních směrech, že přilehlá maxima, jež bychom měli při dvou zdrojích, budou potlačena. Abychom viděli tento efekt, nakreslíme graf křivky, kterou dostaneme z (30.3) pro velmi velké  $n$  v oblasti blízko  $\varphi = 0$ . Pro  $\varphi$  rovnající se 0, máme 0/0, ale pro  $\varphi$  infinitezimálně malé je poměr druhých mocnin sinů roven prostě  $n^2$ , neboť sinus úhlu je tehdy roven přibližně samotnému úhlu. Intenzita v maximu křivky je proto rovna  $n^2$ -násobku intenzity jednoho oscilátoru. To lze snadno pochopit, neboť jsou-li všechny oscilátory ve fázi, jejich fázové rozdíly vymizí a všech  $n$  oscilátorů přispívá k výsledné amplitudě stejně, takže amplituda je  $n$ -krát větší a intenzita je  $n^2$ -krát silnější.

S narůstáním fáze  $\varphi$  se poměr obou sinů začíná zmenšovat a poprvé dosáhne nuly, když  $n\varphi/2 = \pi$ , neboť  $\sin \pi = 0$ . Jinak řečeno  $\varphi = 2\pi/n$  odpovídá prvnímu minimu křivky (obr. 30.2). Chceme-li to vyjádřit pomocí šipek jako na obr. 30.1, první minimum se vyskytne tehdy, když se šipky vrátí do počátečního bodu. Znamená to, že celkový úhel složený z příspěvků pootočení jednotlivých šipek, celkový rozdíl fází mezi prvním a posledním oscilátorem, musí být roven  $2\pi$ , aby se kružnice uzavřela.



Obr. 30.2 Intenzita velkého počtu stejně silných oscilátorů jako funkce fázového rozdílu

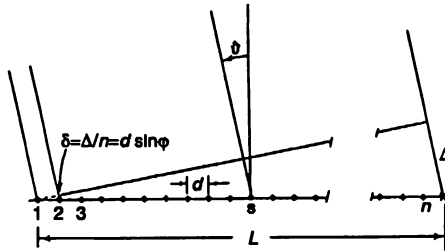
Nyní přejdeme k dalšímu maximu, o němž se chceme přesvědčit, zda je opravdu mnohem menší než první maximum, jak doufáme. Nepůjdeme přesně do maxima, neboť jak čitatel tak jmenovatel (30.3) se mění, avšak  $\sin \varphi/2$  se mění dost pomalu ve srovnání se  $\sin n\varphi/2$  pro velké  $n$ , takže když  $\sin n\varphi/2 = 1$ , budeme velmi blízko maxima. Toto další maximum nastane, když  $n(\varphi/2) = 3/2\pi$  nebo  $\varphi = 3\pi/n$ . To odpovídá tomu, že šipky oběhnou jednu a půl kružnice. Dosazením za  $\varphi = 3\pi/n$  do našeho vztahu pro velikost druhého maxima máme v čitateli  $\sin^2 3\pi/2 = 1$  (tak jsme vybrali úhel  $\varphi$ ) a ve jmenovateli máme  $\sin^2 3\pi/2 n$ . Pro dostatečně velké  $n$  je to velmi malý úhel a sinus je pak roven argumentu, takže pro všechny praktické výpočty můžeme položit  $\sin 3\pi/2n = 3\pi/2n$ . Zjistili jsme, že intenzita tohoto maxima je  $I = I_0 4 n^2/9 \pi^2$ . Maximální intenzita byla rovna  $n^2 I_0$ , takže máme  $4/9 \pi^2$  násobek intenzity, což je 0,47, tedy méně než 5 % z maximální intenzity! Samozřejmě, že dál se nacházejí další klesající maxima, takže máme velmi ostré centrální maximum s velmi slabými vedlejšími maximy po stranách.

Lze dokázat, že plocha ohraničená křivkou včetně malých maxim je rovna  $2\pi n I_0$ , neboli dvojnásobku plochy čárkovaného obdélníku na obr. 30.2.

## VÝSLEDNÁ AMPLITUDA $n$ STEJNÝCH OSCILÁTORŮ

Dále se věnujeme úvaze o možných aplikacích rovnice (30.3) za různých podmínek a pokusme se pochopit, o čem tu jde. Nechtě jsou všechny naše zdroje na přímce, jak je to znázorněno na obr. 30.3. Dohromady je jich  $n$ , všechny jsou od sebe ve vzdálenosti  $d$  a předpokládejme, že relativní fáze mezi sousedními oscilátory je  $\alpha$ . Pozorujeme-li je ve směru vytvářejícím s kolmicí úhel  $\vartheta$ , je zde ještě dodatečný fázový rozdíl  $(2\pi/\lambda)$   $d \sin \vartheta$ , způsobený časovým zpožděním mezi sousedy, jak jsme již říkali. Takže:

$$\varphi = \alpha + \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \vartheta = \alpha + kd \sin \vartheta. \quad (30.4)$$



Obr. 30.3  $n$  stejných lineárně uspořádaných oscilátorů s fázemi  $\alpha_s = s\alpha$

Nejprve se podíváme na situaci, kdy  $\alpha = 0$ , tj. když jsou všechny oscilátory ve fázi a chceme vědět, jak se mění intenzita jako funkce úhlu  $\vartheta$ . Stačí nám prostě dosadit  $\varphi = kd \sin \vartheta$  do vztahu (30.3) a podívat se, co se stane. Máme zde především maximum pro  $\varphi = 0$ . Znamená to, že jsou-li všechny oscilátory ve fázi, ve směru  $\vartheta = 0$  je velká intenzita. Zajímavá je také otázka, kde je první minimum? Nastane pro  $\varphi = 2\pi/n$ , takže první minimum má křivka, když platí

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \vartheta = \frac{2\pi}{n}.$$

Po úpravě máme

$$nd \sin \vartheta = \lambda. \quad (30.5)$$

Pokusme se fyzikálně pochopit, proč dostáváme minimum v tomto směru. Součin  $nd$  je celková délka řetězce  $L$ . Z pohledu na obr. 30.3 vidíme, že platí  $nd \sin \vartheta = L \sin \vartheta = \Delta$ .

Vztah (30.5) říká, že když je  $\Delta$  rovno jedné vlnové délce, dostaneme minimum. Proč nastane minimum, když platí  $\Delta = \lambda$ ? Proto, že fáze příspěvků od různých oscilátorů jsou rozděleny rovnoměrně v intervalu od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Šipky na obr. 30.1 vytvářejí úplnou kružnici – sčítáme stejné vektory směřující na všechny strany a takový součet je roven nule. Takže, když máme úhel, pro který  $\Delta = \lambda$ , máme minimum. To je první minimum.

Vztah (30.3) se vyznačuje další zajímavou vlastností a to tou, že se vůbec nezmění, když se  $\varphi$  zvětší o jakýkoliv násobek  $2\pi$ . Takže pro  $\varphi = 2\pi, 4\pi, 6\pi$  atd. dostaneme další silná maxima. Při každém velkém maximu se opakuje průběh znázorněný na obr. 30.2. Můžeme si klást otázku, jaké geometrické uspořádání dává další maxima? Podmínkou je, aby  $\varphi = 2\pi m$ , kde  $m$  je celé číslo, tj. aby platilo

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \vartheta = 2\pi m.$$

Odtud po dělení  $2\pi$  dostaneme

$$d \sin \vartheta = m\lambda. \quad (30.6)$$

To vypadá jako další vztah (30.5). Ale není to tak, ten byl

$$nd \sin \vartheta = \lambda.$$

Rozdíl je v tom, že tady se musíme dívat na *jednotlivé zdroje* a když platí  $d \sin \vartheta = m\lambda$ , znamená to, že úhel  $\vartheta$  je takový, že  $\delta = m\lambda$  (viz obr. 30.3). Jinak řečeno, každý zdroj nyní přispívá určitým dílem a následující zdroje jsou fázově posunuty o celý násobek  $360^\circ$ , a proto přispívají *ve fázi*; fázový posun o  $360^\circ$  znamená totéž jako být ve fázi. Všechny zdroje přispívají stejnou fází a vytvářejí stejně dobré maximum, jaké bylo pro  $m = 0$ , o němž jsme mluvili předtím. Vedlejší maxima a celkový průběh intenzity mají stejný průběh, jako to bylo v blízkosti  $\varphi = 0$ , s týmiž minimy po obou stranách atd. Proto takový řetězec zdrojů vysílá paprsky v různých směrech a každý z nich má silné centrální maximum a určitý počet slabých „vedlejších laloků“. Silným paprskům se také říká paprsky nultého řádu, paprsek prvního řádu atd. a to podle hodnoty  $m$ , která se nazývá *řád* paprsku.

Je třeba upozornit na skutečnost, že je-li  $d$  menší než  $\lambda$ , nemůže mít rovnice (30.6) jiné řešení, než pro  $m = 0$ , takže když je vzdálenost mezi sousedními zdroji velmi malá, existuje jen jeden paprsek – paprsek nultého řádu soustředěný ve směru  $\vartheta = 0$ ; a samozřejmě i v opačném směru. Abychom dostali dodatečná velká maxima, musí být vzdálenost  $d$  větší než jedna vlnová délka.

## 30.2 DIFRAKČNÍ MŘÍŽKA

V technické praxi s anténami a dráty lze vše upravit tak, že fáze všech malých oscilátorů nebo antén jsou stejné. Otázkou je, zda a jak toho můžeme dosáhnout se světlem. Dnes ještě nedokážeme zkonstruovat malé radiostanice s optickou frekvencí, pospojovat je nekonečně malými drátky a budít je všechny se stejnou fází. Ale lze toho dosáhnout jinak.

Předpokládejme, že bychom měli mnoho rovnoběžných drátů rovnoměrně rozložených se vzdáleností  $d$  a nějaký velmi vzdálený zdroj kmitající s rádiovou frekvencí a budící elektromagnetické pole, jež dopadá na všechny dráty se stejnou fází (tj. tak daleko, že časové zpoždění je pro všechny dráty stejné). Bylo by možné vymyslet případ, kdy jsou dráty na zakřivené ploše, ale mluvíme jen o rovině. Vnější elektrické pole bude nutit elektrony v každém drátu, aby kmitaly nahoru a dolů. Takže pole, přicházející od původního zdroje, bude pohánět elektrony nahoru a dolů, a tak vzniknou nové generátory. Tomuto jevu se říká rozptyl: světelná vlna z nějakého zdroje může indukovat pohyb elektronů v nějakém materiálu a tyto pohyby generují své vlastní vlny. Je tedy třeba rozložit mnoho stejně vzdálených drátů, vybudit je vzdáleným zdrojem elektromagnetického pole a máme, co jsme chtěli, vše bez mnoha speciálních zapojení. Je-li dopadající vlna ve směru normály, všechny fáze budou stejné a budeme mít přesně to, o čem jsme mluvili. Takže, jsou-li vzdálenosti mezi dráty větší než vlnová délka, dostaneme velkou intenzitu rozptylu ve směru normály a v dalších směrech daných vztahem (30.6).

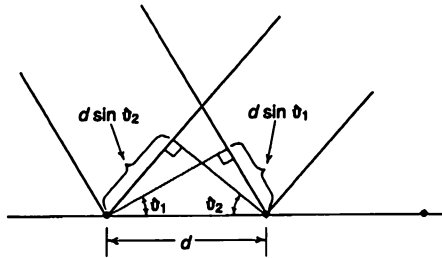
*Obdobně to můžeme provést i se světlem.* Místo drátů použijeme kousek plochého skla a uděláme do něho vrypy, takové, že každý vryp rozptyluje světlo trochu jinak než zbytek skla. Posvítíme-li potom na sklo, každý vryp bude představovat nějaký zdroj, a budou-li velmi blízko vedle sebe, ne však blíže než vlnová délka (což je i technicky téměř nemožné), budeme očekávat zázračný jev: Světlo nejen, že bude procházet sklem, ale vznikne i silný paprsek pod určitým úhlem, y závislosti na vzdálenosti mezi vrypy. Takové objekty byly skutečně vyrobeny a běžně se používají – nazývají se *difrakční mřížky*.

## DIFRAKČNÍ MŘÍŽKA

Jedna z forem takové difrakční mřížky není opravdu nic jiného než jednoduchá rovinná tabulka průhledného a bezbarvého skla, do níž jsou vyryty vrypy. Na jednom milimetru bývá často i několik set rovnoměrně rozložených vrypů *velmi* pečlivě uspořádaných ve stejných vzdálenostech. Účinek takové mřížky je možné dobře vidět pomocí projektoru, jenž na plátno vrhá úzký vertikální proužek světla (obraz nějaké úzké štěrbin). Vložíme-li do takového paprsku difrakční mřížku s vrypy otočenými vertikálně, vidíme, že proužek světla na plátně zůstal a navíc máme po každé straně *další* výraznou světelnou stopu, která je *barevná*. Odpovídá obrazu štěrbinový roztaženému ve velkém rozsahu úhlů, neboť úhel  $\vartheta$  ve vztahu (30.6) závisí na vlnové délce  $\lambda$  a jak víme, světlu různých barev přísluší různé frekvence, a tedy i různé vlnové délky.

Největší viditelná vlnová délka odpovídá červené barvě a protože  $d \sin \vartheta = \lambda$ , je  $\vartheta$  pro červenou barvu největší. Na plátně opravdu vidíme, že červená je posunuta od středu o největší úhel! Na druhé straně by se také měl nacházet takový paprsek a opravdu ho i vidíme. Dále, vztah (30.6) může mít i další řešení pro  $m = 2$ . Skutečně neurčitě vidíme, že tam něco je – velmi slabý paprsek – a za ním jsou dokonce vidět i další paprsky.

Právě jsme dokazovali, že všechny tyto paprsky mají mít stejnou intenzitu, ale zjistili jsme, že ji nemají a dokonce ani první paprsek vpravo a vlevo ji nemají stejnou! Důvodem je to, že mřížka byla pečlivě vyrobena, aby se chovala právě tak. Kdyby se mřížka skládala z velmi jemných vrypů nepatrné šířky, rozložených rovnoměrně, intenzity všech paprsků by byly skutečně stejné. Ale i v nejjednodušším případě bychom mohli uvažovat uspořádání *dvou* antén, z nichž každá má určitou intenzitu a nějakou relativní fázi. V takovém případě můžeme získat paprsky, které se v různých řádech liší intenzitou. Mřížka se často nezískává z malých symetrických vrypů, ale pomocí rýh, jež mají pilovitý profil. Důmyslným uspořádáním těchto zubů lze dosáhnout toho, že víc světla jde do paprsků jednoho daného řádu spektra než do ostatních. V praxi je výhodné, když mřížka dává paprsky s maximální intenzitou v některém řádu. Může se zdát, že je to příliš komplikovaný případ, abychom zde o něm mluvili, ale je to opravdu velmi důmyslná věc, neboť mřížka se tak stává užitečnější.



Obr. 30.4 Dráhový rozdíl paprsků rozptylovaných sousedními rýhami difrakční mřížky je  $d \sin \vartheta_2 - d \sin \vartheta_1$

Dosud jsme se zabývali případem, kdy všechny zdroje byly ve fázi. Máme však vztah pro úhel  $\varphi$  i pro případ, liší-li se sousední fáze o úhel  $\alpha$ . Vyžaduje to takové zapojení antén, aby mezi nimi byl malý fázový posun. Můžeme toho dosáhnout i u světla? Ano, a to velmi snadno. Předpokládejme, že světlo přichází z nekonečně vzdáleného zdroje pod určitým úhlem  $\vartheta_1$  a řekněme, že se zajímáme o rozptýlené světlo, jež vychází pod úhlem  $\vartheta_2$ . Úhel  $\vartheta_2$  je tentýž úhel  $\vartheta$ , který jsme měli předtím a  $\vartheta_1$  slouží jen k tomu, aby zdroje byly uspořádány s různými fázemi. Světlo přicházející ze vzdáleného budícího zdroje nejprve dosáhne první rýhy, pak další a další atd. s fázovým posunem mezi rýhami, jenž jak vidíme je roven

## DIFRAKCE

$$\alpha = -\frac{d \sin \vartheta_1}{\lambda}.$$

Tak máme vztah pro fázový úhel mřížky, u níž světlo dopadá pod různými úhly:

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \vartheta_2 - \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \vartheta_1. \quad (30.7)$$

Pokusme se zjistit, kde za těchto okolností dostaneme silnou intenzitu. Podmínkou pro silné intenzity je, že  $\varphi$  má být rovno celému násobku  $2\pi$ . Je tu několik zajímavostí, jichž si musíme všimnout.

Jeden velmi zajímavý případ odpovídá hodnotě  $m = 0$ ; pro  $d$  menší než  $\lambda$  je to fakticky jediné řešení. Vidíme, že v tomto případě  $\sin \vartheta_2 = \sin \vartheta_1$ , což znamená, že vycházející světlo má stejný směr jako světlo, které vybudilo difrakční mřížku. Mohli bychom si myslet, že světlo mřížkou přímo prochází. Ale pozor, my zde mluvíme o *jiném světle*. Světlo, jež prochází přímo, je světlo z původního zdroje. Světlo, o němž mluvíme, je nové světlo vybuzené rozptylem. Vychází nám, že rozptýlené světlo letí ve stejném směru jako původní a může s ním interferovat – jev, jímž se budeme zabývat později.

V tomto případě existuje ještě další možnost. Pro dané  $\vartheta_1$  může být  $\vartheta_2$  rovno  $\pi - \vartheta_1$ . A tak nejenže dostáváme paprsek ve stejném směru jako dopadající paprsek, ale i v dalším směru, jenž je takový (uvážíme-li to pozorně), že *úhel dopadu je roven úhlu rozptylu* – tento paprsek nazýváme *odražený paprsek*.

Tak začínáme chápat základní mechanismus odrazu světla: Dopadající světlo vyvolává pohyby atomů v odrazeči a ten vytváří *novou vlnu*. Jedno z řešení pro směr rozptylu (je to jediné řešení pro případ, že vzdálenost rozptylových center je velmi malá v porovnání s vlnovou délkou světla) je, že úhel, pod kterým světlo vychází, je roven úhlu, pod kterým dopadá!

Nyní se podíváme na zvláštní případ, kdy  $d \rightarrow 0$ . Mějme kousek skla konečných rozměrů a požadujeme, aby se fázový rozdíl mezi sousedními rozptylovými centry blížil k nule. Jinak řečeno, mezi existujícími „antény“ vkládáme další, takže rozdíly fází se zmenší, přičemž se však celkový fázový rozdíl mezi začátkem a koncem řady nezmění. Podívejme se, co se stane s (30.3), zachováme-li rozdíl fází mezi první a poslední anténou konstantní. (Řekněme, že je roven  $n\varphi = \Phi$ ), počet antén necháme narůstat do nekonečna a fázový posun  $\phi$  každé antény se bude blížit k nule. Nyní pro malé  $\phi$  platí  $\sin \phi = \phi$  a když si vzpomeneme, že  $n^2 I_0$  je  $I_m$ , maximální intenzita ve středu paprsku, zjistíme, že

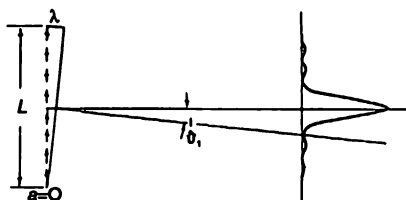
$$I = \frac{4 I_m \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{\Phi^2}. \quad (30.8)$$

Tento limitní případ je znázorněn na *obr. 30.2*.

Za těchto okolností dostáváme stejný obecný obraz jako pro případ konečně vzdálených antén s  $d > \lambda$ ; všechny vedlejší laloky jsou prakticky stejné, chybíjí pouze maxima vyšších řádů. Pro všechna rozptylová centra ve fázi dostáváme maximum ve směru  $\vartheta_2 = 0$  a minimum, je-li vzdálenost  $\Delta$  rovna  $\lambda$  jako v případě konečného  $d$  a  $n$ . Takže můžeme analyzovat dokonce i *spojujé* rozdělení rozptylových center nebo oscilátorů, použijeme-li místo sum integrály.

Pro ilustraci si představme dlouhý řetězec oscilátorů s náboji oscilujícími ve směru řetězce

jako na obr. 30.5. Největší intenzita od takto seřazených antén je ve směru kolmém na směr řetězce. Ve směru nad a pod rovinnou je také rozložena část intenzity, ale velmi slabá. Pomocí tohoto výsledku můžeme řešit i složitější situace. Představme si, že máme několik takových řetězců, z nichž každý vytváří paprsek jen v rovině na něho kolmé. Najít, jaká je intenzita paprsků v různých směrech od série dlouhých drátů místo od infinitezimálně krátkých drátů, je též problém, dokud jsme ve střední rovině kolmé na dráty – příspěvky od jednotlivých vodičů prostě sčítáme. To je důvod, proč jsme naši analýzu malých antén mohli použít i pro mřížku s dlouhými úzkými rýhami. Účinek každé z těchto rýh se projeví jen ve směru na ní kolmém (nikoli ve směru šikmo nahoru nebo dolů), ale protože jsou všechny uspořádány vodorovně, tímto způsobem interferují.



Obr. 30.5 Průběh intenzity oscilátorů spojitě rozložených na přímce má jedno silné maximum a mnoho slabých bočních „laločků“

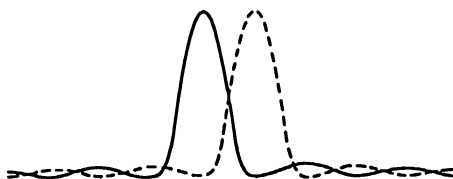
Takto bychom mohli vytvořit i složitější situace – rozložením různých rozptylových center podél přímek v rovinách nebo v prostoru. Nejdříve jsme provedli analýzu pro rozptylová centra rozložená na přímce a pak jsme ji rozšířili pro rovnoběžné pásky. To lze provést prostým sčítáním příspěvků jednotlivých oscilátorů. Princip je vždy stejný.

### 30.3 ROZLIŠOVACÍ SCHOPNOST MŘÍŽKY

Dostali jsme se tak daleko, že můžeme pochopit celou řadu zajímavých jevů. Například jak by bylo možné využít difrakční mřížku k odlišení vlnových délek. Všimli jsme si, že na plátně bylo rozprostřeno celé spektrum barev, takže difrakční mřížku lze použít jako nástroj k rozložení světla na jeho různé vlnové délky. Jednou ze zajímavých otázek je: Předpokládejme, že máme dva zdroje, jejichž frekvence nebo vlnové délky se liší jen málo; jak malý musí být rozdíl jejich vlnových délek, aby pomocí difrakční mřížky nebylo možné zjistit, že jde o dvě různé vlnové délky? Červenou a modrou vlnovou délku bylo možné jasně rozlišit, ale jak malý by musel být rozdíl vlnových délek, kdyby jedna vlnová délka byla červená a druhá jen trochu červenější? To je vlastnost, jež se nazývá *rozlišovací schopnost mřížky* a jeden možný způsob, jak ji určit, je následující. Předpokládejme, že maximum rozptýleného světla nějaké barvy máme pro paprsek vycházející pod určitým úhlem. Se změnou vlnové délky měníme i fázi  $2\pi d \sin \theta / \lambda$ , takže maximum nastane pod jiným úhlem. To je důvod, proč červená a modrá jsou odděleny. Jak velká musí být tato změna úhlu, abychom tento rozdíl postrehli? Překrývají-li se obě maxima, je pochopitelné, že je nerozlišíme. Je-li jedno maximum dostatečně daleko od druhého, budeme ho pozorovat jako dvojité. K rozlišení takových dvou blízkých maxim se používá *Rayleighovo kritérium* (obr. 30.6): první minimum od jednoho zdroje musí ležet na maximu od druhého zdroje. Nyní, lež-li jedno minimum na druhém maximu, lze snadno vypočítat, jaký musí být příslušný rozdíl vlnových délek. Nejlépe je to provést geometricky.



## DIFRAKCE



Obr. 30.6 Znárodnění Rayleighova kritéria. Maximum od jednoho zdroje leží na prvním minimu od druhého zdroje.

Abychom měli maximum pro vlnovou délku  $\lambda'$ , musí být vzdálenost  $\Delta$  (obr. 30.3) rovna  $n\lambda'$  a jde-li o paprsek  $m$ -tého řádu, tak  $mn\lambda'$ . Takže

$$\frac{2\pi d}{\lambda'} \sin \vartheta = 2\pi m$$

a  $\Delta$  rovné  $nd \sin \vartheta$ , je vlastně  $\lambda'$  krát  $n$  nebo  $mn$ . Chceme, aby druhý paprsek s vlnovou délkou  $\lambda$  měl při tomto úhlu své minimum. To znamená, že chceme, aby  $\Delta$  bylo přesně o jednu vlnovou délku větší než  $mn\lambda$ :

$$\Delta = mn\lambda + \lambda = mn\lambda'.$$

Když  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ , platí

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mn}. \quad (30.9)$$

Poměr  $\lambda/\Delta\lambda$  se nazývá rozlišovací schopnost mřížky. Vidíme, že je rovna součinu celkového počtu vrypů mřížky  $n$  a řádu  $m$ . Není těžké ukázat, že tento vztah je ekvivalentní vztahu, podle něhož je změna frekvence rovna převrácené hodnotě rozdílu časů náležících dvěma extrémním dráhám, po nichž se pohybují interferující paprsky<sup>38)</sup>

$$\Delta f = \frac{1}{T}.$$

Nejlépe je zapamatovat si tento vztah, neboť platí obecně, nejen pro mřížky, ale pro jakýkoliv přístroj, zatímco vztah (30.9) vyjadřuje fakt, že jde o mřížku.

### 30.4 PARABOLICKÁ ANTÉNA

Podívejme se na jiný problém spojený s rozlišovací schopností. Souvisí s radioteleskopickou anténou, jaká se používá při určování polohy zdrojů rádiových vln na obloze a jejich úhlové velikosti. Samozřejmě, kdybychom vzali jakoukoli z dřívě používaných antén a zachytili signál, nevěděli bychom, odkud přichází. My však chceme vědět, jestli se zdroj nachází na tom nebo na onom místě. Jeden způsob, jak to zjistit, je rozložit celou sérii rovnoměrně vzdálených dipólových antén, například po území Austrálie. Pak zapojíme přírody těchto antén do téhož

<sup>38)</sup> V našem případě  $T = \frac{\Delta}{c} = \frac{mn\lambda}{c}$ , kde  $c$  je rychlost světla. Frekvence  $f = \frac{c}{\lambda}$ , takže  $\Delta f = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$ .

přijímače a to tak, aby časový posun byl ve všech napájecích linkách stejný. Přijímač tedy přijímá signály od všech dipólů ve fázi a všechny vlny ve fázi sčítá. Co se stane? Nachází-li se zdroj přímo nad anténami v téměř nekonečné vzdálenosti, dopadající rádiové vlny vybudí všechny antény ve fázi, všechny společně napájí přijímač.

Dále předpokládejme, že se radiovysílač nachází ve směru, jenž se od svislého směru odchyluje o nějaký malý úhel  $\vartheta$ . Různé antény pak přijímají signály s malými fázovými rozdíly. V přijímači se tyto nesfázované signály sčítají a je-li úhel  $\vartheta$  příliš velký, nic neslyšíme. Jak velký může být úhel  $\vartheta$ ? Nulový signál dostaneme, když úhel  $\Delta/L = \vartheta$  (obr. 30.3) odpovídá fázovému posunu  $2\pi$  tj., když je  $\Delta$  rovno vlnové délce  $\lambda$ . Tehdy vektorové příspěvky vytvářejí uzavřený mnohoúhelník s nulovou výslednicí. Nejmenší úhel, který může rozlišit anténa délky  $L$ , je  $\vartheta = \lambda/L$ . Všimněme si, že směrová citlivost antény je stejná, jak by bylo rozložení intenzity jí vyslaných signálů, kdybychom přijímač vyměnili za vysílač. Máme příklad toho, čemu se říká princip reciprocity. Pro jakékoli seskupení antén, pro jakékoli úhly a podobně obecně platí, že zjistíme-li nejdříve relativní intenzity signálů v různých směrech, při zapojení antény na vysílač, relativní směrová citlivost přijímače se stejně zapojeným systémem antén je stejná jako byla relativní intenzita vyslaných vln.

Některé rádiové antény jsou zkonstruovány jinak. Místo mnoha dipólů seřazených podél dlouhé přímky a pospojovaných s přijímačem množstvím drátů mohou být seřazené do tvaru vhodné křivky s přijímačem umístěným na vhodném místě, kde může zachycovat rozptýlené vlny. Tvar takové křivky je možné navrhnout tak, že když rádiové vlny přicházejí přesně shora, rozptýlené vlny dopadnou na přijímač současně (obr. 26.12). Takovou křivkou je parabola a nachází-li se zdroj přesně v její ose, dostaneme v jejím ohnisku signál velké intenzity. Rozlišovací schopnost takového přístroje je jasná. Rozestavení antén po parabolické křivce zde není podstatné. Je to jen vhodný způsob, jak dostat všechny signály do jednoho bodu současně a bez připojovacích kabelů. Rozlišovací úhel takového zařízení je stále  $\vartheta = \lambda/L$ , kde  $L$  je vzdálenost mezi krajními anténami. Tento úhel nezávisí na velikosti mezer mezi anténami, jež mohou být i těsně vedle sebe nebo dokonce mohou tvořit jeden kus kovu. Řeč je samozřejmě o teleskopickém zrcadle a vlastně jsme určili rozlišovací schopnost zrcadlového dalekohledu! Někdy se uvádí, že rozlišovací schopnost je  $\vartheta = 1,22 \lambda/L$ , kde  $L$  je průměr teleskopu. Důvod, proč to není přesně  $\lambda/L$ , je tento: Při odvozování výsledku  $\vartheta = \lambda/L$  jsme předpokládali, že všechny dipóly jsou stejně výkonné, ale teleskop je obvykle kruhovitý, a proto z jeho okrajů nepřichází tak silný signál, jaký by přicházel od rovinné desky, na níž by byla všude stejná intenzita. Na okrajích využíváme teleskop jen částečně, takže celková intenzita je o něco menší. Chápeme proto, že efektivní průměr je o něco menší než skutečný průměr a to je vyjádřeno faktorem 1,22. V každém případě, takové přesné vyjádření vztahu pro rozlišovací schopnost se zdá být příliš přehnané<sup>39)</sup>.

### 30.5 BARVY TENKÝCH VRSTEV; KRISTALY

Uvedli jsme některé interferenční jevy, které vznikají skládáním různých vln. Existuje však mnoho dalších příkladů interference, a i když zatím ještě nerozumíme podstatě jejího mechanismu, víme už nyní, jak k interferenci dochází. Například při dopadu světelné vlny na povrch látky s indexem lomu  $n$ , řekněme pod pravým úhlem, se část světla odrazí. *Důvod*, proč nastává odraz,

<sup>39)</sup> Je to v především proto, že Rayleighovo kritérium je jen hrubý odhad. Říká nám, kdy začíná být obtížné rozlišit obrazy dvou blízkých hvězd. Ve skutečnosti, je-li možno provést dostatečně přesné měření rozložení intenzity v oblasti světelné skvny vzniklé difrakcí, lze oba zdroje rozlišit i pro  $\vartheta$  menší než  $\lambda/L$ .

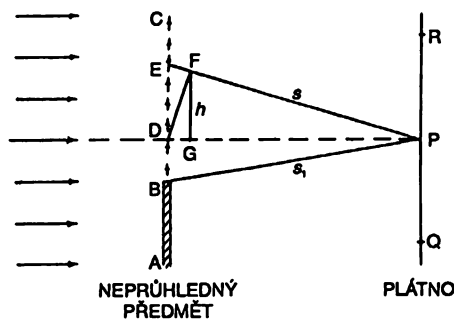
si rozebereme později. Předpokládejme však, že víme, že část světla se odrazí jak při vstupu tak i výstupu z odrazivého prostředí. Podsvámě-li se na odraz světla na tenké vrstvě, vidíme součet dvou vln. Je-li tloušťka vrstvy dostatečně malá, dojde k interferenci těchto dvou vln, konstruktivní nebo destruktivní, v závislosti na znaménkách fází. Může se například stát, že pro červenou barvu dostaneme zesílený odraz, ale pro modrou, jež má jinou vlnovou délku, dostaneme zeslabený odraz v důsledku destruktivní interference, takže vidíme jasný červený odraz. Změníme-li tloušťku, tj. podsvámě-li se na jiné místo, kde je vrstva tlustší, může to být naopak – červená se zeslabí, ale ne modrá, takže obraz zdroje je jasně modrý nebo zelený nebo žlutý nebo jiný. Proto při pohledu na tenké vrstvy vidíme *barvy* a ty se mění, díváme-li se z různých úhlů, neboť již víme, že fázové rozdíly jsou různé pro různé úhly. Tak umíme pochopit mnoho dalších případů, když při různých úhlech vidíme barvy na olejových vrstvách, mýdlových bublinách apod. Princip je však vždy stejný – sčítají se vlny s rozdílnými fázemi.

Vzpomeneme i další důležitou aplikaci difrakce. U mřížky jsme viděli na plátně difrakční obrazec. Kdybychom použili monochromatické světlo, nacházelo by se maximum na určitém místě. Byla by tam i další maxima vyšších řádů. Z polohy difrakčních obrazců bychom mohli určit vzdálenost rýh na mřížce, kdybychom znali vlnovou délku světla. Z rozdílu v intenzitě mezi jednotlivými obrazci bychom mohli zjistit profil rýh tvořících mřížku – ať jsou to drátky, pilovité rýhy nebo něco jiného, a to *aniž bychom mřížku viděli*. Stejný princip se používá při identifikaci polohy *atomů v krystalech*. Jedinou těžkostí je, že krystal je trojrozměrný útvar – opakující se trojrozměrné uspořádání atomů. K tomu nemůžeme použít obyčejné světlo, ale něco, co má vlnovou délku menší než je vzdálenost mezi atomy, neboť jinak nedostaneme interferenci. Musíme proto použít záření s velmi krátkou vlnovou délkou, tj. rentgenové záření. Osvětíme-li krystal rentgenovým zářením a všimneme si intenzity odrazu v různých řádech, můžeme určit, jak jsou uspořádány atomy v krystalu, aniž bychom je viděli okem. Tak poznáme uspořádání atomů v různých látkách a to nám umožnilo nakreslit v 1. kapitole rozložení atomů v krystalu kuchyňské soli apod. Později se k tomu ještě vrátíme, abychom si toto velmi zajímavé téma probrali mnohem podrobněji; zatím se spokojíme s tímto stručným výkladem.

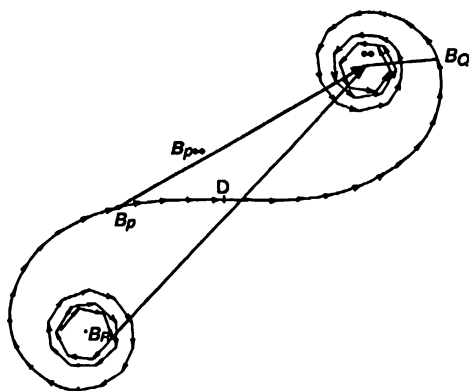
## 30.6 DIFRAKCE NA NEPROPUSTNÉ CLONĚ

Nyní se dostáváme k velmi pozoruhodné situaci. Předpokládejme, že na jedné straně máme nepropustnou desku s otvory a vedle ní zdroj světla. Chceme zjistit, jaká je intenzita světla na druhé straně. Většina lidí řekne, že světlo svítí otvory a osvětluje druhou stranu. Ukazuje se, že správnou odpověď ve velmi dobrém přiblížení dostaneme, budeme-li předpokládat, že zdroje světla jsou rovnoměrně rozloženy v jednotlivých otvorech a jejich fáze jsou takové jako kdyby tam nepropustná deska nebyla. Samozřejmě, ve skutečnosti v otvorech nejsou žádné zdroje, v tomto případě jsou to vlastně jediná místa, kde zcela určitě nejsou zdroje. Přesto správný difrakční obrazec dostaneme za předpokladu, že otvory jsou jediná místa, kde zdroje jsou – to je dost divné. Vysvětlíme si to později, zatím předpokládejme, že je to tak.

V teorii difrakce se vyskytuje další druh difrakce, který si stručně probereme. V základním kurzu se o něm obvykle nemluví už tak brzy, jak to děláme my, a to jen proto, že ke sčítání malých vektorových příspěvků je třeba použít o něco složitější matematické vzorce. Jinak je to úplně stejné jako to, co jsme dělali dosud. Všechny interferenční jevy jsou stejné, nejde v podstatě o nic náročnějšího, jen situace je tady složitější a zmiňované vektory lze hůře spočítat.



Obr. 30.7 Vzdálený zdroj světla vrhá na stínítko stín neprůhledného předmětu.

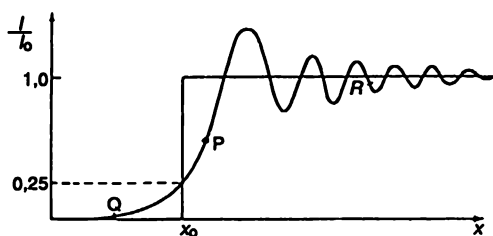


Obr. 30.8 Skládání amplitud mnoha oscilátorů kmitajících ve fázi, jejichž fázový posun se mění jako druhá mocnina vzdálenosti od bodu  $D$  na předcházejícím obrázku.

Předpokládejme, že světlo letící z nekonečna vrhá stín nějakého předmětu. Obr. 30.7 znázorňuje stínítko, na které dopadá stín od předmětu  $AB$ , přičemž zdroj světla je velmi daleko v porovnání s vlnovou délkou světla. Dalo by se očekávat, že mimo stín bude osvětlení všude jasné a ve stínu bude všude tma. Kdybychom si však znázornili intenzitu jako funkci polohy v blízkosti okraje stínu, viděli bychom, že zpočátku stoupá, pak překročí vrchol a kmitá velmi zvláštním způsobem v blízkosti okraje (obr. 30.9). Podívejme se, proč tomu tak je. Použijeme-li větu, kterou jsme ještě nedokázali, můžeme skutečnou situaci nahradit sérií zdánlivých zdrojů rozložených rovnoměrně v prostoru za objektem  $AB$ .

Představme si tam velké množství antén, jednu těsně vedle druhé. Zajímá nás intenzita v bodě  $P$ . Podobá se to tomu, co jsme už dělali, ale ne zcela, neboť naše stínítko nyní není v nekonečnu. Nechceme vědět, jaká je intenzita v nekonečnu, ale v konečném bodě. Při výpočtu intenzity v daném místě musíme sečítat příspěvky od všech antén. Nejprve je zde anténa v bodě  $D$ , přesně proti bodu  $P$ . Kdybychom se posunuli o málo výš, řekněme o vzdálenost  $h$ , časové zpoždění se zvětší. (Změní se i amplituda, neboť se změnila vzdálenost, ale je to jen velmi malý efekt, jsme-li od zdroje dost daleko a je mnohem méně významný než změna ve fázích.) Dráhový rozdíl  $EP - DP$  je  $h^2/2s$ , takže rozdíl fází se zvětšuje s druhou mocninou vzdálenosti, o níž se posuneme od bodu  $D$ , zatímco předtím jsme mívali s nekonečnou a fázový rozdíl byl přímo úměrný  $h$ . Jsou-li fáze přímo úměrné, každý vektor se sečítá pootočen o konstantní úhel proti předcházejícímu. Nyní

však potřebujeme křivku, jež vznikne sčítáním mnoha infinitezimálně malých vektorů za podmínky, že úhel, který svírají, se nezvětšuje lineárně, ale s *druhou mocninou* délky křivky. Ke konstrukci takové křivky je třeba trochu složitější matematiky, ale vždy jí můžeme zkonstruovat přímo nanášením vektorů a měřením úhlů. V každém případě dostaneme nádhernou křivku (Cornuovo spirálu) znázorněnou na *obr. 30.9*. Jak ji nyní využijeme?



Obr. 30.9 Průběh intenzity na hranici stínu. Geometrická hranice stínu je v bodě  $x_0$ .

Chceme-li vědět, jaká je intenzita světla například v bodě  $P$ , sčítáme příspěvky, jež mají různé fáze, od bodu  $D$  nahoru do nekonečna a od bodu  $D$  dolů jen po bod  $B_p$ , z něhož vynášíme postupně celou sérii šipek se stále se zvětšujícími úhly. Celkový příspěvek od bodu  $B_p$  nahoru proto sleduje spirálovitou křivku. Kdyby se měla integrace v některém bodě zastavit, celková amplituda by byla dána vektorem spojujícím  $B_p$  s tímto bodem; v tomto případě jdeme až do nekonečna, takže celkový příspěvek je roven vektoru  $B_{p_{\infty}}$ . Inflexní bod  $D$  vždy odpovídá poloze bodu  $P$ , a proto poloha bodu  $B_p$  na křivce se mění podle toho, kde se bod  $P$  nachází. Proto počáteční bod výsledného vektoru bude ležet v různých místech dolní levé části křivky podle toho, jak daleko nad bodem  $B$  se nachází bod  $P$ . Výsledný vektor  $B_{p_{\infty}}$  bude mít mnoho maxim a minim (*obr. 30.9*).

V opačném případě, když jsme v bodě  $Q$ , na opačné straně od bodu  $P$ , použijeme jen jeden konec spirálové křivky a ne i druhý. To znamená, že začátek se dostane jen do bodu  $B_Q$ , takže výsledná intenzita osvětlení se postupně zmenšuje, jak se bod  $Q$  posouvje hlouběji do stínu.

Abychom si ověřili, že jsme opravdu pochopili, můžeme ihned snadno vypočítat intenzitu světla v bodě přesně proti hraně. Intenzita je zde rovna  $1/4$  intenzity dopadajícího světla. V tomto případě je začátek výsledného vektoru v bodě  $D$  na *obr. 30.8* a z celkové křivky nám zůstane jen polovina v porovnání s tím, co bychom měli, kdybychom byli hluboko v osvětlené zóně. Je-li bod  $R$  hluboko v osvětlené zóně, máme celou křivku od jednoho jejího konce až po druhý, tj. celý jednotkový vektor. Nacházíme-li se však na hranici stínu, máme jen poloviční amplitudu, což odpovídá  $1/4$  intenzity záření.

V této kapitole jsme hledali výslednou intenzitu v různých směrech od různě rozložených zdrojů. V následujícím článku odvodíme vztah, který budeme potřebovat v další kapitole v teorii indexu lomu. Dosud jsme vystačili s relativními intenzitami, ale tentokrát odvodíme úplný vztah pro výpočet pole v konkrétní situaci.

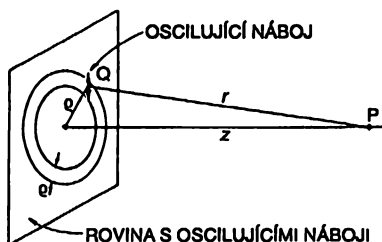
### 30.7 POLE NÁBOJŮ KMITAJÍCÍCH V ROVINĚ

Předpokládejme, že máme mnoho zdrojů rozložených v rovině, jež současně kmitají, přičemž se pohybují v rovině a mají stejnou amplitudu a stejnou fázi. Jaké bude pole v konečné, ale přitom dostatečně velké vzdálenosti od roviny? (Nemůžeme se příliš přiblížit, neboť nemáme

správné vzorce v blízkosti zdrojů.) Označíme-li rovinu nábojů  $XY$ , chceme vědět, jaké pole je v bodě  $P$  daleko na ose  $Z$  (obr. 30.10). Předpokládejme, že na jednotce plochy roviny se nachází  $\eta$  nábojů a že každý z nich má náboj  $q$ . Všechny náboje se pohybují jednoduchým harmonickým pohybem se stejným směrem pohybu, amplitudou a fází. Necht' pohyb každého náboje *vzhledem k jeho rovnovážné poloze* je  $x_0 \cos \omega t$ . Pomocí komplexního zápisu může být tento pohyb popsán jako  $x_0 e^{i\omega t}$ , přičemž máme na paměti, že skutečný pohyb popisuje reálná část.

Intenzitu pole v bodě  $P$  od všech nábojů dostaneme tak, že zjistíme intenzitu od každého náboje  $q$  a pak sčítáme příspěvky od všech nábojů. Víme, že radiální pole je úměrné zrychlení náboje, jež je  $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$  a je stejné pro každý náboj. Hledaná intenzita elektrického pole v bodě  $P$ , způsobená nábojem v bodě  $Q$ , je úměrná zrychlení náboje  $q$ , ale musíme mít na zřeteli, že v bodě  $P$  v čase  $t$  je dáno zrychlením náboje v dřívějším čase  $t' = t - r/c$ , kde  $r/c$  je čas, který potřebují vlny pole, aby prošly vzdálenost  $r$  od  $Q$  do  $P$ . Proto je pole v bodě  $P$  úměrné

$$-\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}. \quad (30.10)$$



Obr. 30.10 Radiální pole nábojů oscilujících v rovině

Dosadíme-li toto zrychlení do našeho vztahu pro intenzitu elektrického pole ve velkých vzdálenostech od vyzařujícího náboje, dostaneme

$$\text{Intenzita pole v } P \text{ od náboje v } Q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (\text{přibližně}). \quad (30.11)$$

Tento vztah není zcela přesný, neboť jsme neměli použít zrychlení náboje, ale jeho složku kolmou na přímkou  $QP$ . Budeme však předpokládat, že bod  $P$  je tak daleko v porovnání se vzdáleností bodu  $Q$  od osy (vzdálenost  $\varrho$  na obr. 30.10), že při změnách, jež budeme brát v úvahu, můžeme kosinový faktor (jenž by byl i tak roven přibližně 1) vynechat.

Abychom dostali celkovou intenzitu pole v  $P$ , sčítáme vlivy od všech nábojů, jež jsou v rovině. Samozřejmě, měli bychom udělat *vektorový* součet, ale protože směr intenzity pole je téměř stejný pro všechny náboje, můžeme, v rámci již uvedené aproximace, prostě sčítat velikosti intenzit. V naší aproximaci závisí intenzita pole v bodě  $P$  jen na vzdálenosti  $r$ , takže všechny náboje vzdálené o stejné  $r$  vytvářejí stejná pole. Proto nejdříve sčítáme pole od nábojů rozložených na prstenci šířky  $d\varrho$  s poloměrem  $\varrho$ . Potom integrujeme přes všechna  $\varrho$  dostaneme celkové pole.

Počet nábojů na prstenci se rovná součinu velikosti plochy prstence  $2\pi\varrho d\varrho$  a počtu nábojů na jednotkové ploše  $\eta$ . Takže máme

$$\text{Výsledné pole v } P = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \cdot \eta \cdot 2\pi\varrho d\varrho. \quad (30.12)$$

## DIFRAKCE

Tento integrál chceme vypočítat pro  $\varrho$  od  $\varrho = 0$  do  $\varrho = \infty$ . Proměnná  $t$  je po dobu integrace konstantní, takže proměnnými veličinami jsou jen  $\varrho$  a  $r$ . Vynecháme-li na chvíli všechny konstantní faktory, včetně faktoru  $e^{i\omega t}$ , žádaný integrál má tvar

$$\int_{\varrho=0}^{\varrho=\infty} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \varrho d\varrho. \quad (30.13)$$

K jeho výpočtu potřebujeme použít vztah mezi  $r$  a  $\varrho$

$$r^2 = \varrho^2 + z^2. \quad (30.14)$$

Protože  $z$  je nezávislý na  $\varrho$ , diferencováním máme

$$2r dr = 2\varrho d\varrho,$$

což je výhodné, neboť v integrálu můžeme zaměnit  $\varrho d\varrho$  za  $r dr$  a  $r$  se vyruší s  $r$  ve jmenovateli. Hledaný integrál má pak jednodušší tvar

$$\int_{r=z}^{r=\infty} e^{-i\omega r/c} dr. \quad (30.15)$$

Integrace exponenciální funkce je velmi snadná. Funkci dělíme koeficientem, jenž je v exponentu u  $r$  a exponenciálu vyčíslíme v integračních mezích; ale integrační meze pro  $r$  nejsou stejné jako pro  $\varrho$ . Pro  $\varrho = 0$  máme  $r = z$ , takže integrujeme pro  $r$  od  $z$  do nekonečna. Dostáváme výsledek

$$-\frac{c}{i\omega} [e^{-i\infty} - e^{-i(\omega/c)z}], \quad (30.16)$$

kde za  $\omega r/c$  v nekonečno jsme napsali  $\infty$ , neboť oba zápisy označují velmi velké číslo

Přitom  $e^{-i\infty}$  je záhadná veličina. Její reálná část je například rovna  $\cos(-\infty)$ , co je matematicky řečeno, úplně neurčitá veličina (i když bychom očekávali, že to bude hodnota někde nebo všude mezi  $+1$  a  $-1$ ). Ve fyzikální situaci to však může označovat něco docela rozumného a obvykle to lze považovat za nulu. Abychom si ozřejmili, že je to tak i v našem případě, vraťme se k původnímu integrálu (30.15).

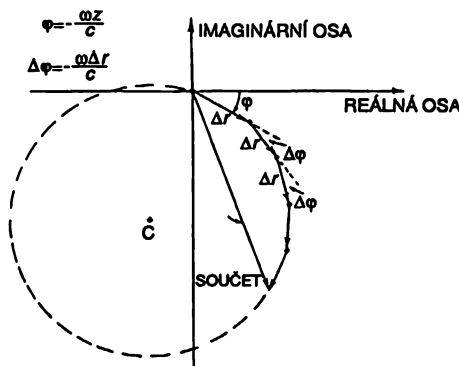
Integrál (30.15) můžeme chápat jako součet mnoha malých komplexních čísel, přičemž každé má v komplexní rovině velikost  $\Delta r$  a směrový úhel  $\varphi = -\omega r/c$ . Tento součet se můžeme pokusit vypočítat graficky. Na obr. 30.11 máme nakreslených prvních pět členů součtu. Každý úsek má délku  $\Delta r$  a s předcházejícím svírá úhel  $\Delta\varphi = -\omega\Delta r/c$ . Součet těchto prvních pěti členů je znázorněn šipkou od počátku ke konci pátého úseku. Přidáváním dalších členů bychom sledovali mnohoúhelník, až bychom se dostali nazpět do počátku (přibližně) a začali opět dokola. Přidáváním dalších členů bychom se točili stále dokola v blízkosti kružnice, o níž lze snadno ukázat, že její poloměr je roven  $c/\omega$ . Vidíme, proč integrál nedává určitou hodnotu.

Nyní se však musíme vrátit zpět k fyzice, jaká je v naší situaci. V žádné reálné situaci nemůže být rovina nábojů nekonečně rozsáhlá, ale musí někde končit. Kdyby končila najednou a měla přesně kruhový tvar, náš integrál by měl nějakou hodnotu na kružnici na obr. 30.11. Připustíme-

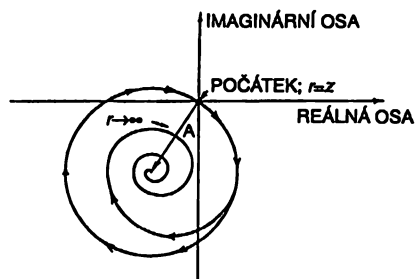
li, aby počet nábojů v rovině postupně klesal v nějaké velké vzdálenosti od středu (nebo končil náhle, ale nepravidelně, takže pro velké  $\rho$  nebude přispívat celý prstenec šířky  $d\rho$ ), koeficient  $\eta$  bude v přesném integrálu klesat k nule. Vzhledem k tomu, že budeme sčítat klesající členy, ale stále se odchylující o stejný úhel, grafem našeho integrálu bude křivka ve tvaru spirály. Spirála nakonec skončí ve středu našeho původního kruhu, jak je to nakresleno na obr. 30.12. Fyzikálně správný integrál dává komplexní číslo  $A$  znázorněné na obrázku šipkou od počátku do středu kruhu, což je právě rovno

$$\frac{c}{i\omega} e^{-i\omega z/c}, \quad (30.17)$$

jak se můžete sami přesvědčit. Stejný výsledek bychom dostali z rovnice (30.16), kdybychom položili  $e^{-i\infty} = 0$ . (Je zde ještě další důvod, proč se příspěvek k integrálu pro velké hodnoty  $r$  zmenšuje; musíme totiž brát projekci vektoru zrychlení do roviny kolmé na spojnici  $PQ$ , což jsme zanedbávali.)



Obr.30.11 Grafické řešení integrálu  $\int_z^\infty e^{-i\omega r/c} dr$



Obr.30.12 Grafické řešení integrálu  $\int_z^\infty \eta e^{-i\omega r/c} dr$

Nás zajímají jen fyzikálně reálné situace, proto zvolíme  $e^{-i\infty}$  rovno nule. Vráťme-li se ke vztahu pro výsledné pole (30.12) se všemi činiteli, jež jsou v integrálu, máme

$$\text{Výsledné pole v } P = -\frac{\eta q}{2 \epsilon_0 c} i \omega x_0 e^{i\omega(t-z/c)} \quad (30.18)$$



## DIFRAKCE

(mějme na zřeteli, že  $1/i = -i$ ).

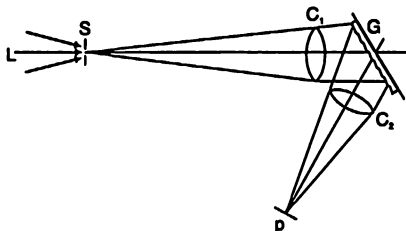
Je zajímavé si všimnout, že  $(i\omega x_0 e^{i\omega t})$  je rovno právě *rychlosti* pohybu nábojů, takže rovnici pro výpočet pole můžeme napsat také jako

$$\text{Výsledné pole v } P = -\frac{\eta q}{2 \epsilon_0 c} (\text{rychlost nábojů v čase } t - z/c). \quad (30.19)$$

Je to trochu překvapující, protože časové zpoždění je dáno právě vzdáleností  $z$ , což je nejkratší vzdálenost od  $P$  do roviny nábojů. Ale naštěstí vychází právě takový jednoduchý výsledek. (Mimochodem můžeme dodat, že i když bylo naše odvození platné jen pro dostatečně velké vzdálenosti od roviny oscilujících nábojů, ukazuje se, že vztah (30.18) nebo (30.19) platí pro libovolnou vzdálenost  $z$ , dokonce i pro  $z < \lambda$ ).

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 30.1 ■ Vlnové délky spektrálních čar D vybuzených atomů sodíku jsou 5889,95 a 5895,92 angströmů. Jakou délku musí mít mřížka s 600 vrypů na 1 mm, aby rozlišila tyto čáry ve spektru prvního řádu?
- 30.2 ■ Po rovné cestě jede automobil se zapnutými světly, která budeme považovat za bodové zdroje. Reflektory automobilu jsou od sebe vzdáleny 120 cm. Jak daleko od automobilu musí být pozorovatel, aby si mohl být jist, že vidí dva zdroje světla a ne jeden? Uvažujte průměr zornice oka 0,5 cm a efektivní vlnovou délku vyzařovaného světla 550 nm. Domníváte se, že okolnost, že světlo je „bílé“ (tj. obsahuje směs paprsků různých vlnových délek) usnadňuje nebo naopak ztěžuje rozlišení dvou zdrojů světla?
- 30.3 ■ Na obrázku vidíme obecné schéma spektrografické mřížky. Světlo ze zdroje  $L$  prochází úzkou štěrbinou  $S$ , pak čočkou kolimátoru (nebo se odráží od zrcadla)  $C_1$ , aby vznikl rovnoběžný svazek paprsků, jako kdyby na mřížku dopadala rovinná vlna přicházející z nekonečna. Rovnoběžný svazek paprsků se pak podrobuje difrakci na mřížce  $G$ . Světlo odražené v určitém úhlovém rozsahu dopadá na čočku  $C_2$  (čočka kamery) a je zaostřeno v rovině  $P$ . Tak dostáváme soubor úzkých spektrálních čar. Nechť je délka štěrbiny  $h$ , její šířka  $w$ , ohniskové vzdálenosti čoček  $C_1$  a  $C_2$  jsou rovny  $F_1$  a  $F_2$  a úhly mezi normálou k mřížce a osami čoček  $C_1$  a  $C_2$  jsou rovny  $\theta_1$  a  $\theta_2$ . Na 1 mm mřížky je rozmístěno  $N$  vrypů. Odpovězte na následující otázky:
- Jakou šířku bude mít pás vytvářený spektrem v rovině  $p$ ?
  - Jaké vlnové délce bude odpovídat čára, která leží v rovině  $p$  v místě, kudy prochází osa čočky  $C_2$ ?
  - V jaké vzájemné vzdálenosti v ohniskové rovině se budou nacházet dvě spektrální čáry, jejichž vlnové délky se liší o 0,1 nm? Tato veličina se často nazývá disperze optické soustavy.
  - Jaká je šířka spektrální čáry v rovině  $p$ , je-li šířka štěrbiny mnohem větší než rozlišovací schopnost čočky kolimátoru (rovná  $1,22 \lambda (F_1/F_2)$ , kde  $A_1$  je apertura) a než rozšíření vytvářené mřížkou, které je rovno  $(\lambda/L) F_1$ , kde  $L$  je rozměr mřížky?



- 30.4 ■ Spektrograf slunečního věžového teleskopu na observatoři na Mt. Wilsonu je znázorněn schematicky na obrázku. Jedna a tatáž čočka zde plní úlohu kolimátoru i čočky kamery a přitom je téměř  $\theta_1 = -\theta_2$ . Ohnisková vzdálenost celého zařízení  $F = 23$  m a mřížka má rozměry 15 cm x 25 cm. Na 1 mm mřížky je rozmístěno 600 čar. Při pozorování se obvykle využívá spektrum 5. řádu.
- Při jakém úhlu náklonu mřížky  $\vartheta$  bude spektrální čára vybuzeného neutrálního atomu železa o vlnové délce  $\lambda = 525,0218$  nm odpovídat poloze štěrbin ve spektru 5. řádu?
  - Pro které další vlnové délky v intervalu 360–700 nm budou spektrální čáry také odpovídat poloze štěrbin?

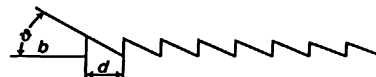
- c) Navrhněte jednoduchý způsob, jak odstranit spektra nežádoucích řádů a zachovat pouze spektrum 5. řádu.
- d) Jaká je disperze uvedeného zařízení při vlnové délce  $\lambda = 525$  nm odpovídající čáře spektra 5. řádu?
- e) Jaká je minimální teoretická hodnota  $\Delta\lambda$ , jež může být rozlišena na vlnové délce  $\lambda = 525$  nm ve spektru 5. řádu?



30.5 ■ Vlnové délky spektrálních čar se obvykle měří s přesností kolem 0,0001 nm pomocí spektrografů, jejichž rozlišovací schopnost je jen 0,001 nm. Není tím narušen nějaký fyzikální princip? Objasněte.

30.6 ■ Jsou-li vrypy difrakční mřížky utvářeny tak, že odrazejí většinu dopadajícího světla v jednom směru, říkáme, že mřížka v tomto směru „blyští“. Představme si takovou mřížku, jejíž vrypy mají profil daný pilovitou funkcí znázorněnou na obrázku. Povrch každého vrypu svírá s vodorovnou rovinou úhel  $\varphi_0$ .

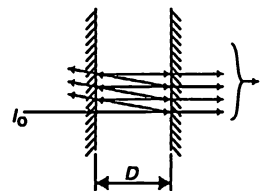
- a) Považujeme-li svazek odraženého světla za záření, jež vydávají oscilátory v látce kmitající se stejnou fází jako dopadající záření, určete, v jakém směru bude mít odražený svazek největší intenzitu, je-li úhel dopadu roven nule.



- b) Odhadněte přibližně interval úhlů, v němž mřížka „blyští“.

30.7 ■ Fabry – Perotův interferometr je tvořen dvojicí dokonale vyleštěných rovnoběžných rovinných ploch ve vzdálenosti  $D$ . Tyto roviny odrážejí  $R^2$ –část kolmo dopadajícího světla a propouštějí jeho  $T^2$ –část. Světlo o intenzitě  $I_0$  a vlnové délce  $\lambda$  dopadá nejprve zleva (viz obrázek), částečně prochází soustavou, částečně se odrazí od pravé roviny, pak opět od levé a znovu prochází soustavou. Výstupní svazek je tedy tvořen paprsky, jež se odrazily 0, 2, 4, 6, ... krát a nakonec pronikly oběma rovinami.

Jak závisí intenzita procházejícího světla na veličinách  $D$ ,  $\lambda$ ,  $R$  a  $T$ ? (Poznámka. Na téměř principu jsou založeny úzkopásmové, tzv. interferenční, optické filtry. Jejich odrazové plochy jsou vyrobeny z několika vrstev vysoce kvalitního skla přesně stanovené tloušťky, s různými indexy lomu.)



# Původ indexu lomu

## 31.1 INDEX LOMU

## 31.2 POLE V LÁTCE

## 31.3 DISPERZE

## 31.4 ABSORPCE

## 31.5 ENERGIE PŘENÁŠENÁ ELEKTRICKOU VLNOU

## 31.6 DIFRAKCE SVĚTLA NA CLONĚ

### 31.1 INDEX LOMU

Uvedli jsme, že rychlost světla je menší ve vodě než ve vzduchu a o trochu menší ve vzduchu než ve vakuu. Tento jev lze popsat pomocí indexu lomu  $n$ . Nyní se budeme snažit pochopit, jak toto zpomalení vzniká. Konkrétně, pokusíme se dozvědět, jak souvisí s některými fyzikálními předpoklady, které jsme udělali už dříve a které zněly

- za jakýchkoli fyzikálních podmínek celkové elektrické pole lze vyjádřit jako součet polí vytvořených všemi náboji ve vesmíru;
- radiační pole vytvořené jedním nábojem je vždy dáno jeho zrychlením vypočítaným se zpožděním při rychlosti  $c$ , a to vždy.

Jde-li o průchod světla kusem skla, mohli byste namítat: „V tom případě to neplatí, musíme brát rychlost  $c/n$ !“ To však není pravda a musíme pochopit proč.

Přibližně sice platí, že rychlost světla nebo elektromagnetické vlny při průchodu látkou s indexem lomu  $n$  je zdánlivě rovna  $c/n$ , ale pole jsou tvořena pohyby *všech* nábojů – včetně nábojů, které se pohybují v látce – a těmito základními příspěvky k poli, které se šíří konečnou rychlostí  $c$ . Naší úlohou je pochopit, jak dochází k zdánlivému zpomalení rychlosti.

Pokusíme se to objasnit na velmi jednoduchém případě. Zdroj, který budeme nazývat „vnějším zdrojem“, se nachází velmi daleko od tenké desky z průhledného materiálu, dejme tomu ze skla. Zajímáme se, jaké pole je ve velké vzdálenosti na opačné straně desky. Situace je znázorněna na obr. 31.1, kde si  $S$  a  $P$  představíme velmi daleko od desky. Podle principů, které jsme už vyslovili, je elektrické pole kdekoli v velké vzdálenosti od všech pohybujících se nábojů rovno vektorovému součtu polí vytvořených vnějším zdrojem (v bodě  $S$ ) a polí vytvořených všemi náboji ve skleněné desce, přičemž každé z nich má svou vlastní retardaci při rychlosti  $c$ . Pamatujme, že příspěvek od každého náboje se nezmění přítomností ostatních nábojů. To jsou naše základní

principy. Intenzita pole v bodě  $P$  se může proto napsat jako

$$E = \sum_{\text{přes všechny náboje}} E_{\text{každého náboje}} \quad (31.1)$$

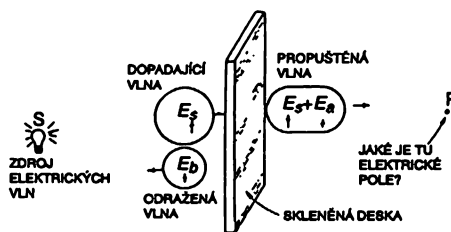
nebo

$$E = E_s + \sum_{\text{přes všechny ostatní náboje}} E_{\text{každého náboje}} \quad (31.2)$$

kde  $E_s$  je pole jen od zdroje a je rovno přesně poli, jež by bylo v bodě  $P$ , kdybychom neměli žádnou desku. Očekáváme, že v  $P$  bude pole různé od  $E_s$ , pokud jsou přítomny další pohybující se náboje.

Proč by se ve skle měly nacházet pohybující se náboje? Víme, že každá látka se skládá z atomů, jež mají elektrony. Dopadá-li elektrické pole zdroje na tyto atomy, rozkmitá jejich elektrony, neboť na ně působí silou a rozkmitané elektrony vytvářejí pole – představují nové zdroje záření. Tyto nové zdroje souvisejí se zdrojem  $S$ , neboť je rozkmitalo jeho pole. Výsledné pole není rovno jen poli zdroje  $S$ , ale je změněno dodatečnými příspěvky od ostatních pohybujících se nábojů. To znamená, že pole už není stejné jako pole, které tam bylo, dokud tam nebylo sklo, ale je modifikováno takovým způsobem, že se zdá, jakoby se pole uvnitř skla pohybovalo změněnou rychlostí. To je vysvětlení, jež bychom rádi odvodili kvantitativně.

Provést to exaktně je příliš komplikované, protože i když jsme řekli, že všechny ostatní náboje jsou poháněny polem zdroje, není to úplně tak. Jednotlivý náboj necítí jen zdroj, ale jako cokoliv na světě, cítí všechny ostatní pohybující se náboje, takže cítí i ty náboje, jež se pohybují někde jinde ve skle. Proto se celkové pole působící na daný náboj skládá z polí všech ostatních nábojů, jejichž pohyb je zpětně ovlivňován tím, co dělá daný náboj! Je vidět, že úplný a přesný popis by si vyžadoval komplikovaný systém rovnic. Problém je tak složitý, že si ho odložíme na další rok.



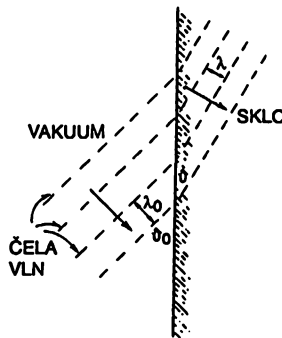
Obr. 31.1 Elektromagnetická vlna při průchodu vrstvou průhledné látky

Místo toho se podíváme na jednoduchý případ, jenž nám umožní jasně pochopit fyzikální podstatu. Vezměme si případ, kdy jsou účinky všech ostatních atomů v porovnání s účinky zdroje relativně velmi malé, tj. vezmeme si takovou látku, v níž se celkové pole pod vlivem pohybu ostatních nábojů příliš nezmění. To odpovídá materiálu, jehož index lomu je velmi blízký 1; nastane to například tehdy, když hustota atomů je velmi malá. Náš výpočet bude platit pro případy, kdy index lomu je z jakýchkoli důvodů blízký 1. Tak se vyhneme komplikacím úplného obecného řešení.

Všimněme si mimochodem, že pohyb nábojů v desce vyvolává i další efekt. Tyto náboje budou vyzařovat vlny i směrem dozadu ke zdroji  $S$ . Toto vracející se pole je světlo, jež vidíme jako světlo odražené od povrchu průhledných materiálů. Nepřichází však jen od povrchu. Zpětné záření přichází odevšad z vnitřku, ale celkový jev je ekvivalentní odrazu od povrchu. Odrazové jevy jsou

zatím mimo rámec naší aproximace, neboť se omezíme na výpočty pro látku s indexem lomu tak blízkým 1, že se odráží jen velmi málo světla.

Dříve než budeme pokračovat v našem studiu původu indexu lomu, musíme si uvědomit, že vše, co potřebujeme k pochopení refrakce, je pochopit, proč se vlny šíří v různých látkách různou rychlostí. Ohyb paprsků je způsoben právě tím, že efektivní rychlost vln je v různých látkách různá. Abychom si připomněli, jak k tomu dochází, narysovali jsme na obr. 31.2 několik postupných čel elektrické vlny, která dopadá z vakua na povrch skla. Šípky kolmé na čela vln označují směr pohybu vlny. Víme, že všechny oscilace ve vlně musí mít stejnou frekvenci. (Viděli jsme, že vybuzené oscilace mají frekvenci stejnou jako budící síla.) Znamená to také, že čela vln na obou stranách povrchu musí mít na povrchu stejnou vzdálenost, musí se pohybovat společně, takže náboj umístěný na rozhraní cítí jen jednu frekvenci. Nejkratší vzdálenost mezi čely vln je rovna vlnové délce, což je rychlost dělená frekvencí. Na straně vakua to je  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$  a na druhé straně  $\lambda = 2\pi v/\omega$  nebo  $2\pi c/\omega n$ , když  $v = c/n$  je rychlost vlny. Z obrázku vidíme, že jediný způsob, jak dosáhnout toho, aby vlny na rozhraní správně „seděly“, je ten, že vlny v látce se budou šířit pod jiným úhlem k rozhraní. Z geometrie na obrázku je vidět, že k tomu, aby vlny „seděly“, musí platit  $\lambda_0/\sin\theta_0 = \lambda/\sin\theta$  nebo  $\sin\theta_0/\sin\theta = n$ , což je Snellův zákon. V naší další diskuzi se budeme zajímat pouze o to, proč má světlo v látce s indexem lomu  $n$  efektivní rychlost  $c/n$  a v této kapitole se nebudeme zabývat otázkou, proč světlo mění směr.



Obr. 31.2 Vztah mezi lomem vln a změnou jejich rychlosti

Vraťme se zpět k obr. 31.1. Potřebujeme vypočítat pole v bodě  $P$  způsobené všemi oscilujícími náboji ve skleněné desce. Tuto část pole, jež je rovna sumě napsané v rovnici (31.2) jako druhý člen, nazveme  $E_a$ . Přičteme-li jí k členu  $E_i$  pocházejícímu od zdroje, dostaneme celkové pole v bodě  $P$ .

To je pravděpodobně nejkomplicovanější věc, kterou budeme letos dělat, ale komplikovaná je jen tím, že musíme poskládat velmi mnoho malých kousků; každý z nich je však velmi jednoduchý. Na rozdíl od ostatních odvozování, kde jsme řekli: „Zapomeňme na odvození, pamatujme si jen výsledek“, teď ani tak nepotřebujeme výsledek jako samotné odvození. Jinak řečeno potřebujeme pochopit fyzikální mechanismus indexu lomu.

Abychom viděli, k čemu vlastně spějeme, najdeme, čemu by bylo rovno „opravné pole“  $E_a$  v případě, kdy celkové pole v  $P$  má vypadat jako záření způsobené zdrojem, zpomalené průchodem tenkou deskou. Kdyby deska neměla žádný vliv, pro vlnové pole šířící se doprava (podél osy  $z$ ) by platilo

$$E_z = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (31.3)$$

nebo pomocí komplexního zápisu

$$E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/d)} \quad (31.4)$$

Co by se nyní stalo, kdyby se vlna při průchodu deskou šířila pomaleji? Tloušťku desky označme  $\Delta z$ . Kdyby tam deska nebyla, vzdálenost  $\Delta z$  by světlo proletělo za dobu  $\Delta z/c$ . Ale když se v desce šíří rychlostí  $c/n$ , potrvá mu to delší čas  $n\Delta z/c$  nebo *dodatečný* čas  $\Delta t = (n-1)\Delta z/c$ . Pak se bude nadále šířit rychlostí  $c$ . Toto zpoždění při průchodu deskou můžeme vzít v úvahu tak, že v rovnici (31.14) zaměníme  $t$  za  $(t - \Delta t)$  nebo za  $[t - (n-1)\Delta z/c]$ , takže po vsunutí desky můžeme napsat

$$E_{za\ deskou} = E_0 e^{i\omega[t - (n-1)\Delta z/c - z/d]} \quad (31.5)$$

což můžeme napsat jako

$$E_{za\ deskou} = e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t-z/d)} \quad (31.6)$$

To znamená, že vlnění za deskou můžeme dostat z vlnění, jež by existovalo, kdyby nebylo desky, tj. z  $E_s$  vynásobením faktorem  $e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c}$ . Víme, že násobení oscilující funkce jako  $e^{i\omega t}$  faktorem  $e^{i\vartheta}$  způsobí změnu fáze oscilací o úhel  $\vartheta$ , a to je právě to, co způsobilo zpoždění při průchodu vrstvou tloušťky  $\Delta z$ . Došlo ke zpoždění fáze o hodnotu  $\omega(n-1)\Delta z/c$ . (Ke zpoždění proto, že v exponentu je znaménko minus.)

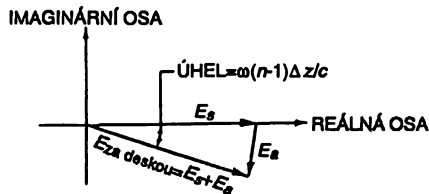
Řekli jsme si, že deska přispěje k původnímu poli  $E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/d)}$  polem  $E_a$ , jež se *přičte* k původnímu poli; ale místo toho jsme zjistili, že působení desky se projeví *vynásobením* faktorem, jež posune jeho fázi. Ve skutečnosti je to však v pořádku, neboť stejného výsledku můžeme dosáhnout přičtením vhodného komplexního čísla. Takové číslo lze zvláště snadno najít, když  $\Delta z$  je malé, neboť si určitě pamatujete, že je-li  $x$  malé číslo,  $e^x$  je přibližně rovno  $(1+x)$ . Proto můžeme psát

$$e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} = 1 - i\omega(n-1)\Delta z/c \quad (31.7)$$

Použitím této rovnosti v (31.6) dostaneme

$$E_{za\ deskou} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-z/d)}}_{E_s} - \underbrace{\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/d)}}_{E_a} \quad (31.8)$$

První člen je pole zdroje a druhý člen musí být roven právě  $E_a$ , poli napravo od desky způsobenému oscilujícími náboji v desce – zde vyjádřenému pomocí indexu lomu  $n$  a závislému na intenzitě vlnění zdroje.



Obr. 31.3 Graf k určení prošlé vlny pro dané  $t$  a  $z$

Co jsme udělali, lze snadno znázornit pomocí komplexních čísel na diagramu na *obr. 31.3*. Nejdříve nakreslíme číslo  $E_s$  (zvolíme nějakou hodnotu pro  $z$  a  $t$ , takže  $E_s$  leží na reálné ose, ale to není nutné). Zpoždění způsobené zpomalením vlny v desce způsobí posunutí fáze čísla  $E_s$ , tj. pootočí  $E_s$  o nějaký záporný úhel. To je ale ekvivalentní přičtení malého vektoru  $E_a$  k vektoru  $E_s$  přibližně pod pravým úhlem. Faktor  $(-i)$  v druhém členu (31.8) znamená totéž. Vyjadřuje to, že je-li  $E_s$  reálné,  $E_a$  je záporné imaginární nebo obecně, že  $E_s$  a  $E_a$  svírají pravý úhel.

### 31.2 POLE V LÁTCE

Nyní se musíme zeptat: „Je pole  $E_a$  v druhém členu rovnice (31.8) takové pole, jaké bychom očekávali od oscilujících nábojů v desce?“ Ukážeme-li, že ano, tak jsme vlastně vypočítali, čemu je roven index lomu  $n$ ! Číslo  $n$  je totiž jediná konstanta v (31.8), jež není zadána. Nyní se pokusíme vypočítat, jaké pole  $E_a$  způsobí náboje v látce. Abychom si zjednodušili sledování mnoha symbolů, jež jsme dosud použili a ještě budeme používat při dalším výpočtu, uvádíme jejich přehled v *tabulce 31.1*.

Tab. 31.1

#### Symboly použité při výpočtu indexu lomu

---

$E_s$	= pole zdroje
$E_a$	= pole vytvořené náboji v desce
$\Delta z$	= tloušťka desky
$z$	= kolmá vzdálenost od desky
$n$	= index lomu
$\omega$	= úhlová frekvence záření
$N$	= počet nábojů na jednotku objemu desky
$\eta$	= počet nábojů na jednotku plochy desky
$q_e$	= náboj elektronu
$m$	= hmotnost elektronu
$\omega_0$	= rezonanční frekvence elektronu vázaného v atomu

---

Je-li zdroj  $S$  (na *obr. 31.1*) ve velké vzdálenosti nalevo od desky, bude mít pole  $E_s$  na celé desce stejnou fázi, takže v blízkosti desky můžeme napsat

$$E_s = E_0 e^{i(\omega t - z/d)}. \quad (31.9)$$

Přímo na desce, kde  $z = 0$ , budeme mít

$$E_s = E_0 e^{i\omega t} \text{ (na desce)}. \quad (31.10)$$

Každý elektron v atomech desky „pocítí“ toto elektrické pole a elektrická síla  $qE$  (předpokládáme, že  $E_0$  je vertikální) jím bude pohybovat nahoru a dolů. Abychom našli očekávaný pohyb elektronů, budeme předpokládat, že atomy jsou malé oscilátory, tj. že elektrony jsou v nich vázány pružnými silami. To znamená, že působí-li na elektron vnější síla, jeho vychýlení z rovnovážné polohy bude úměrné této síle.



Když jste slyšeli o tom, že elektrony v atomu obíhají v oblastech zvaných orbitaly, snad si pomyslíte, že je to směšný model atomu. Je to však jen velmi zjednodušená představa. Správný obraz atomu, který dává vlnová mechanika, nám říká, že pokud jde o problémy spojené se světlem, elektrony se skutečně chovají tak, jakoby byly upevněny na pružinách. Budeme proto předpokládat, že na elektrony působí lineární vratná síla, jež spolu s jejich hmotností  $m$  způsobí, že se chovají jako malé oscilátory s rezonanční frekvencí  $\omega_0$ . Takové oscilátory jsme již studovali a víme, že rovnici jejich pohybu lze napsat jako

$$m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = F, \quad (31.11)$$

kde  $F$  je budicí síla.

V našem případě je budicí síla vyvolána elektrickým polem vlny přicházející od zdroje, takže máme

$$F = q_e E_s = q_e E_0 e^{i\omega t}, \quad (31.12)$$

kde  $q_e$  je náboj elektronu a pro  $E_s$  používáme vztah  $E_s = E_0 e^{i\omega t}$  z rovnice (31.10). Naše pohybová rovnice pro elektron je potom

$$m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = q_e E_0 e^{i\omega t}. \quad (31.13)$$

Tuto rovnici jsme již jednou řešili a víme, že její řešení je

$$x = x_0 e^{i\omega t}. \quad (31.14)$$

Dosazením do (31.13) zjistíme, že

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (31.15)$$

takže

$$x = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}. \quad (31.16)$$

Zjistili jsme tedy, jak probíhá pohyb elektronů v desce. Pro každý elektron je stejný, pouze střední, „nulovou“ polohu má každý elektron jinou.

Nyní jsme připraveni k tomu, abychom mohli najít intenzitu pole  $E_a$  vybuzeného těmito atomy v bodě  $P$ , neboť pole soustavy nábojů rozložených v rovině a pohybujících se současně jsme si odvodili v závěru předešlé kapitoly. Podíváme-li se zpět na rovnici (30.19), vidíme, že pole  $E_a$  v bodě  $P$  je rovno záporně konstantě vynásobené rychlostí nábojů v čase zpožděném o hodnotu  $z/c$ . Zderivujeme-li  $x$  v rovnici (31.16) (abychom dostali rychlost) a zahrneme zpoždění (nebo dosadíme-li prostě za  $x_0$  z (31.15) do (30.18)), dostaneme

$$E_a = -\frac{\eta q_e}{2 \epsilon_0 c} \left[ i\omega \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t-z/c)} \right]. \quad (31.17)$$

## DISPERZE

Jak jsme předpokládali, vybuzené pohyby elektronů vytvořily zvláštní vlnu, jež se šíří doprava (to vyjadřuje člen  $e^{i\omega(t-z/d)}$ ), amplituda je úměrná počtu atomů na jednotkové ploše desky (člen  $\eta$ ) a je úměrná i intenzitě pole zdroje (člen  $E_0$ ). Dále jsou tam členy závislé na vlastnostech atomů ( $q_e$ ,  $m$  a  $\omega_0$ ), podle očekávání.

Nejzajímavější je však to, že vztah (31.17) pro  $E_a$  je velmi podobný vztahu pro  $E_a$ , který jsme dostali v rovnici (31.8), když jsme řekli, že původní vlna se zpozdila při průchodu látkou s indexem lomu  $n$ . Tyto dva výrazy budou identické, když platí:

$$(n - 1) \Delta z = \frac{\eta q_e^2}{2 \varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31.18)$$

Všimněme si, že obě strany jsou úměrné  $\Delta z$ , neboť  $\eta$ , počet atomů připadajících na jednotkovou plochu, je roven  $N\Delta z$ , kde  $N$  je počet atomů připadajících na jednotkový objem desky. Dosazením  $N\Delta z$  za  $\eta$  a krácením  $\Delta z$  dostáváme náš hlavní výsledek, vztah vyjadřující index lomu pomocí vlastností atomů látky a v závislosti na frekvenci světla

$$n = 1 + \frac{N q_e^2}{2 \varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31.19)$$

Tato rovnice „vysvětluje“ index lomu, jak jsme si přáli.

### 31.3 DISPERZE

Všimněme si, že při výpočtu (31.19) jsme dostali něco velmi zajímavého. Nejenže máme pro index lomu číslo, které lze vypočítat ze základních vlastností atomů, ale zjistili jsme, jak se bude index lomu měnit v závislosti na frekvenci světla  $\omega$ . Je to něco, co bychom z jednoduchého výroku „světlo se v průhledném prostředí šíří pomaleji“ nikdy nepochopili. Samozřejmě, že nám ještě zůstal problém, jak se dozvědět, jaký je počet atomů připadajících na jednotkový objem a jaká je jejich vlastní frekvence  $\omega_0$ . To zatím nevíme, protože pro každou látku je to jiné a zatím nemůžeme formulovat obecnou teorii. Takovou teorii vlastností různých látek (jejich vlastních frekvencí apod.) lze vytvořit jen pomocí kvantové mechaniky. Kromě toho různé látky mají různé vlastnosti a různý index lomu a nemůžeme očekávat, že pro index lomu dostaneme vztah platný pro všechny látky.

Podívejme se, jak se vztah (31.19) uplatňuje za různých okolností. Pro nejběžnější plyny (např. vzduch, většina bezbarvých plynů, vodík, hélium atd.) odpovídají vlastní frekvence elektronových oscilátorů ultrafialovému záření. Tato frekvence je mnohem vyšší než frekvence viditelného světla a v prvním přiblížení můžeme zanedbat  $\omega^2$  ve srovnání s  $\omega_0^2$ . V takovém případě vidíme, že index lomu je téměř konstantní. To platí i pro většinu jiných průhledných látek jako je například sklo. Podíváme-li se na náš vztah trochu blíže, všimneme si, že jak se  $\omega$  zvětšuje, jmenovatel se zmenšuje a index lomu roste; takže  $n$  se s rostoucí frekvencí pomalu zvětšuje. Index lomu pro modré světlo je větší než pro červené. Proto optický hranol ohýbá víc paprsky modré než červené.

Jev závislosti indexu lomu na frekvenci se nazývá *disperze*, neboť to je příčina toho, že se světlo při průchodu hranolem rozptyluje, disperguje ve spektrum. Rovnice pro index lomu jako funkce

frekvence se nazývá *disperzní vztah*. Dostali jsme vztah pro disperzi světla. V šedesátých letech našly vztahy pro disperzi nové uplatnění v teorii elementárních částic.

Vztah pro disperzi popisuje i další jevy. Kdyby vlastní frekvence  $\omega_0$  ležela v oblasti viditelného světla nebo kdybychom index lomu skla nebo podobného materiálu měřili v ultrafialové oblasti, kde  $\omega$  je blízké  $\omega_0$ , zjistili bychom, že pro frekvence blízké vlastní frekvenci může index lomu prudce vzrůst, protože jmenovatel se bude blížit nule. Dále předpokládejme, že  $\omega$  je větší než  $\omega_0$ . To nastane například tehdy, kdy materiál, jako např. sklo, ozáříme rentgenovými paprsky. Opravdu, vzhledem k tomu, že mnoho látek, které jsou neprůhledné pro viditelné světlo, jako například tuha, jsou průhledné pro rentgenové paprsky, můžeme mluvit také o indexu lomu tuhy pro rentgenové záření. Všechny vlastní frekvence uhlíkových atomů budou mnohem nižší než frekvence rentgenových paprsků, neboť rentgenové záření má velmi vysokou frekvenci. Index lomu je tehdy určen naším vztahem pro disperzi, v němž  $\omega_0$  položíme rovno nule (zanedbáme  $\omega_0^2$  ve srovnání s  $\omega$ ).

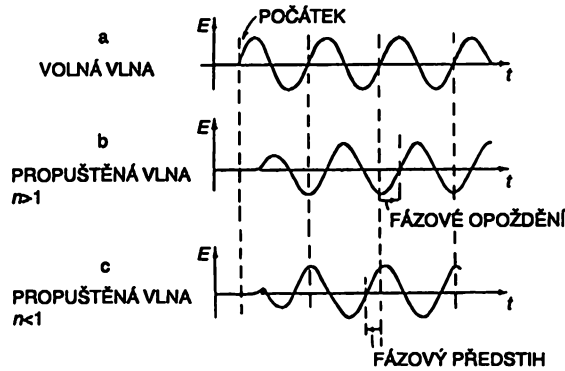
Podobná situace nastane, nasměrujeme-li rádiové vlny (nebo světlo) na plyn volných elektronů. Ve vrchní atmosféře jsou elektrony uvolňovány vlivem ultrafialového záření ze svých atomů a jsou tam ve volném stavu. Pro volné elektrony  $\omega_0 = 0$  (elastická vratná síla neexistuje). Položíme-li  $\omega_0 = 0$  v našem vztahu pro disperzi, dostáváme správný vztah pro index lomu rádiových vln ve stratosféře, kde  $N$  nyní představuje hustotu volných elektronů (počet připadajících na jednotkový objem). Ale podívejme se znovu na naši rovnici. Ať už nasměrujeme rentgenové paprsky na látku nebo rádiové vlny nebo jakékoliv elektromagnetické vlny na volné elektrony, člen  $\omega_0^2 - \omega^2$  se stává *záporným* a dostáváme, že  $n$  je menší než jedna. To znamená, že efektivní rychlost světla v prostředí je *větší než  $c$* . Může to být správně?

Je to správně. Přesto, že signály se nemohou šířit rychleji než rychlostí světla, přece platí, že index lomu látky pro danou frekvenci může být větší nebo menší než jedna. Znamená to tolik, že *fázový posun* způsobený rozptýleným světlem může být buď kladný nebo záporný. Lze však ukázat, že rychlost, kterou lze poslat *signál*, není určena indexem lomu pro jednu frekvenci, ale závisí na hodnotách indexu lomu pro *mnoho* frekvencí. Index lomu určuje rychlost, jíž se pohybuje vrch (nebo důl) vlny. Vrch vlny není sám o sobě signálem. O dokonalé vlně, jež není žádným způsobem modulována, tj. jež představuje nepřetržité oscilace, nemůžeme ve skutečnosti říct, kdy „začíná“, takže nelze použít jako časovaný signál. K vyslání signálu je třeba vlnu nějak změnit, udělat na ní značku, udělat jí o něco silnější nebo slabší. To znamená, že vlna musí obsahovat více než jednu frekvenci a lze ukázat, že rychlost šíření signálu nezávisí jen na indexu lomu, ale na tom, jak se index mění v závislosti na frekvenci. Toto téma musíme také odložit na pozdější dobu (48. kapitola). Tam vypočítáme skutečnou rychlost signálu v kousku skla a uvidíte, že není větší než rychlost světla, i když vrchy (což jsou matematické body) se skutečně pohybují větší rychlostí než světlo.

Abychom alespoň trochu naznačili, jak k tomu dochází, poznamenejme, že skutečný problém je v tom, že reakce nábojů má směr protichůdný k poli, tj. znaménko se mění na opačné. Tak v našem vztahu (31.16) je výchylka náboje pro  $x$  opačná vzhledem k budicí síle, neboť  $\omega_0^2 - \omega^2$  je pro malé  $\omega_0$  záporné. Tento vztah říká, že působí-li elektrické pole jedním směrem, náboj se pohybuje opačným směrem.

Jak se může stát, že se náboj pohybuje opačným směrem? Určitě to tak ihned není od začátku po příchodu elektrického pole. Na začátku pohybu nastává přechodový jev, který se po čase ustálí a pouze pak je fáze oscilací náboje opačná k budicí síle. Tehdy se může jevit, že fáze přenášeného pole předbíhá pole zdroje. Řekneme-li, že „fázová rychlost“ nebo rychlost vrchů je větší než  $c$ , rozumíme tím toto předbíhání fáze. Na obrázku 31.4 je schématicky znázorně-

no, jak to může vypadat v případě, kdy zdroj vlny v určitém okamžiku zapneme (abychom vytvořili signál). Z diagramu je vidět, že signál (tj. začátek vlny) pro vlnu, jež se ustálil s předstihem fáze, není v časovém předstihu.



Obr. 31.4 Vlnové signály

Podívejme se znovu na náš vztah pro disperzi. Měli bychom poznamenat, že naše analýza indexu lomu dává o něco jednodušší výsledek než to, co skutečně nacházíme v přírodě. Pro úplnost musíme dodat některá upřesnění. Za prvé, můžeme očekávat, že náš model atomového oscilátoru by měl mít nějaké tlumení (jinak by zůstal oscilovat navždy a to nepředpokládáme). Pohyb tlumeného oscilátoru jsme odvodili již dříve (rovnice (23.8)) a výsledek je, že jmenovatel v rovnici (31.16) a tedy i (31.19) se změní z  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  na  $(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$ , kde  $\gamma$  je koeficient útlumu.

Druhou modifikací, kterou musíme vzít v úvahu, je skutečnost, že daný atom má několik rezonančních frekvencí. Náš disperzní vztah lze snadno upravit, představíme-li si, že máme několik různých oscilátorů, jež jsou navzájem nezávislé, takže jejich příspěvky prostě sčítáme. Dejme tomu, že máme  $N_k$  elektronů v jednotkovém objemu s vlastní frekvencí  $\omega_k$  a koeficientem útlumu  $\gamma_k$ . Náš vztah pro disperzi pak bude

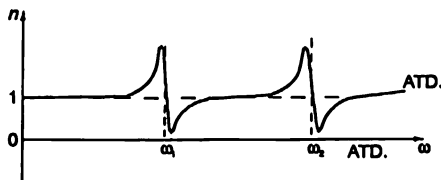
$$n = 1 + \frac{q_e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}. \quad (31.20)$$

Tak dostáváme úplný výraz pro popis indexu lomu, jak ho pozorujeme u mnohých látek.<sup>40)</sup> Index lomu popsany tímto vztahem se mění v závislosti na frekvenci zhruba podle křivky znázorněné na obr. 31.5.

Je vidět, že pokud  $\omega$  není příliš blízko k některé z rezonančních frekvencí, je náklon křivky kladný. Takový náklon se nazývá „normální“ disperzi (protože se vyskytuje nejčastěji). Blízko rezonančních frekvencí se však nachází malý rozsah frekvencí  $\omega$ , pro něž je náklon křivky

<sup>40)</sup> I když vztah (31.20) platí i v kvantové mechanice, jeho interpretace je trochu odlišná. V kvantové mechanice má dokonce i atom s pouze jedním elektronem, jako vodík, více rezonančních frekvencí. Proto  $N_k$  není ve skutečnosti počet atomů s frekvencí  $\omega_k$ , ale je třeba ho zaměnit za  $Nf_k^2$ , kde  $N$  je počet atomů v jednotkovém objemu a  $f_k$  (nazývaný síla oscilátoru) je faktor, jenž říká, jak silně se u atomu projevuje každá jeho rezonanční frekvence  $\omega_k$ .

záporný. Ten odpovídá tomu, čemu se často říká „anomální“ disperze, neboť se zdála nezvyklá, když ji poprvé pozorovali. To bylo dávno předtím než byla objevena existence elektronů. Z našeho hlediska jsou oba náklony celkem „normální“!



Obr. 31.5 Index lomu jako funkce frekvence

### 31.4 ABSORPCE

Snad jste si všimli v našem posledním vztahu pro disperzi (31.20) něčeho neobvyklého. Protože jsme tam vložili člen  $i\gamma$  vyjadřující tlumení, vychází index lomu jako komplexní číslo! Co to znamená? Výpočtem reálné i imaginární části  $n$  můžeme napsat

$$n = n' - i n'' \quad (31.21)$$

kde  $n'$  a  $n''$  jsou reálná čísla. (Před  $i n''$  jsme použili záporné znaménko, protože  $n''$  pak vychází kladné, jak se můžeme snadno přesvědčit.)

Co znamená takový komplexní index lomu, to zjistíme, když se vrátíme k rovnici (31.6), jež popisuje vlnu po průchodu deskou s indexem lomu  $n$ . Když tam dosadíme naše komplexní  $n$ , po krátkém výpočtu máme

$$E_{\text{za deskou}} = \underbrace{e^{-\omega n'' \frac{\Delta z}{c}}}_A \underbrace{e^{-i\omega(n' - 1) \frac{\Delta z}{c}} E_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{c})}}_B \quad (31.22)$$

Poslední činitel v rovnici (31.22) označený jako  $B$ , je to, co jsme měli již předtím a opět popisuje vlnu, jejíž fáze se průchodem látkou opozdila o úhel  $\omega(n' - 1) \Delta z/c$ . První činitel  $A$  je nový. Je to exponenciální činitel s reálným exponentem. Exponent je záporný, takže celý činitel je roven reálnému číslu menšímu než jedna. Popisuje pokles intenzity pole a jak bychom očekávali, pokles je tím větší, čím větší je  $\Delta z$ . Průchodem látkou se vlna zeslabuje, látka část vlny pohlcuje, absorbuje. Vlnění vycházející na druhé straně má menší energii. To by nás nemělo překvapit, neboť tlumení, jež jsme zavedli pro oscilátory, představuje sílu tření, která musí způsobovat ztrátu energie. Vidíme, že imaginární část  $n''$  komplexního indexu lomu představuje absorpci vlnění, proto se někdy nazývá index absorpce.

Upozorňujeme i na to, že imaginární část indexu lomu  $n$  souvisí se sklonem šipky  $E_a$  na obr. 31.3 směrem k počátku. Odtud je zřejmé, proč se přenesená vlna oslabila.

Obvykle je absorpce světla velmi malá, jako například ve skle. Lze to očekávat na základě našeho vztahu (31.20), neboť imaginární část jmenovatele  $i\gamma_k \omega$  je mnohem menší než člen  $(\omega_k^2 - \omega^2)$ . Ale když se frekvence světla hodně blíží k  $\omega_k$ , rezonanční část  $(\omega_k^2 - \omega^2)$  může být

malá v porovnání s  $\gamma_k \omega$  a index se stává téměř zcela imaginárním. Absorpce světla se stává dominantním jevem. Je to jev, jenž způsobuje tmavé čáry ve světelném spektru Slunce. Světlo ze slunečního povrchu proniklo sluneční atmosférou (stejně tak i zemskou) a bylo silně absorbováno na rezonančních frekvencích atomů ve sluneční atmosféře.

Pozorování takových spektrálních čar ve slunečním světle nám dovoluje určit rezonanční frekvence atomů, a tedy i chemické složení sluneční atmosféry. Pozorování tohoto druhu nám řeknou něco i o složení hvězd. Z těchto měření víme, že chemické prvky na Slunci a na hvězdách jsou stejné jako ty, jež nacházíme na Zemi.

### 31.5 ENERGIE PŘENÁŠENÁ ELEKTROMAGNETICKOU VLNOU

Viděli jsme, že imaginární část indexu lomu znamená absorpci. Nyní to využijeme k určení energie přenášené světelnou vlnou. Již dávno jsme uvedli důvod, proč je energie přenášená světlem úměrná  $E^2$ , tj. časové střední hodnotě druhé mocniny intenzity elektrického pole vlny. Pokles  $E$  způsobený absorpcí musí znamenat ztrátu energie, která, jak se můžeme domnívat, se nějakým třením elektronů přemění na teplo v materiálu.

Představme si světlo dopadající na jednotkovou plochu naší desky na *obr. 31.1*, řekněme jeden centimetr čtvereční. Pak můžeme napsat tuto energetickou rovnici (předpokládáme, že platí zákon zachování energie):

Energie dopadající za sekundu = energie vyletující za sekundu + práce vykonaná za sekundu. (31.23)

První člen můžeme napsat jako  $\alpha \overline{E_i^2}$ , kde  $\alpha$  je zatím neznámá konstanta úměrnosti dávající do souvislosti střední hodnotu  $E^2$  a přenášenou energii. V druhém členu musíme zahrnout část od vyzařujících atomů látky, takže musíme psát  $\alpha(\overline{E_i^2} + \overline{E_a^2})$  nebo po umocnění  $\alpha(\overline{E_i^2} + 2\overline{E_i E_a} + \overline{E_a^2})$ .

Všechny naše výpočty jsme prováděli pro tenkou vrstvu materiálu s indexem lomu ne příliš odlišným od jedné, takže  $E_a$  bude vždy mnohem menší než  $E_i$  (ulehčí se nám tím výpočet). V souladu s naší aproximací proto můžeme zanedbat člen  $\overline{E_a^2}$ , neboť je mnohem menší než  $\overline{E_i E_a}$ . Snad řeknete: „Pak bychom měli zanedbat i  $\overline{E_i E_a}$ , protože je mnohem menší než  $\overline{E_i^2}$ .“  $\overline{E_i E_a}$  je sice mnohem menší než  $\overline{E_i^2}$ , ale  $\overline{E_i E_a}$  si musíme ponechat, protože jinak by šlo o aproximaci, při níž zcela zanedbáme přítomnost materiálu! Jeden způsob, jak se můžeme přesvědčit, že naše výpočty jsou konzistentní, je ten, že nikdy zanedbáme členy úměrné  $N\Delta z$ , což je hustota atomů v látce, ale zanedbáme členy úměrné  $(N\Delta z)^2$  a vyšším mocninám  $N\Delta z$ . Naše přiblížení můžeme tedy nazvat „přiblížením malé hustoty.“

V duchu naší aproximace jsme v naší rovnici pro energii zanedbali odraženou vlnu. To je v pořádku, neboť takový člen je úměrný  $(N\Delta z)^2$ , protože amplituda odražené vlny je úměrná  $N\Delta z$ .

Pro poslední člen v (31.23) chceme vypočítat, jakou práci vykonává dopadající vlna na elektronech za jednotku času. Víme, že práce je rovna součinu síly a vzdálenosti, takže práce vykonaná za jednotku času (nazývaná též výkon) je rovna součinu síly a rychlosti. Ve skutečnosti je rovna  $F \cdot v$ , ale jsou-li síla a rychlost rovnoběžné, jako je to tady, nemusí nás znepokojovat skalární součin (až na možnost opačného znaménka). Takže pro střední výkon vezmeme pro každý atom  $q_e \overline{E_i v}$ . Protože na jednotkové ploše je  $N\Delta z$  atomů, bude poslední člen v rovnici (31.23)  $N\Delta z q_e \overline{E_i v}$ . Naše energetická rovnice je nyní

$$\alpha \overline{E_i^2} = \alpha \overline{E_i^2} + 2 \alpha \overline{E_i E_a} - N\Delta z q_e \overline{E_i v}. \quad (31.24)$$

Členy  $\alpha \overline{E_s^2}$  se ruší a máme

$$2 \alpha \overline{E_s E_a} = N \Delta z q_s \overline{E_s v}. \quad (31.25)$$

Nyní se vrátíme k rovnici (30.19), podle níž pro velké  $z$  platí

$$E_a = \frac{N \Delta z q_s}{2 \varepsilon_0 c} v \left( \text{zpožděné o } \frac{z}{c} \right) \quad (31.26)$$

(připomeňme, že  $\eta = N \Delta z$ ). Dosazením (31.26) do levé strany (31.25) dostaneme

$$2 \alpha \frac{N \Delta z q_s}{2 \varepsilon_0 c} \overline{E_s(z) \cdot v(\text{zpožděné o } z/c)}$$

ale  $E_s(z)$  je  $E_s$  (v atomech) zpožděné o  $z/c$ . Protože střední hodnota nezávisí na čase, je to nyní stejná hodnota jako v čase zpožděném o  $z/c$  neboli  $E_s$  je stejná střední hodnota, která je i na pravé straně (31.25). Obě strany jsou si proto rovny, je-li

$$\frac{\alpha}{\varepsilon_0 c} = 1 \text{ nebo } \alpha = \varepsilon_0 c. \quad (31.27)$$

Zjistili jsme, že má-li se energie zachovávat, musí být energie přenášená elektromagnetickou jednotkovou plochou za jednotku času (což jsme nazývali intenzitou záření) dána vztahem  $\varepsilon_0 c \overline{E^2}$ . Označíme-li ji jako  $\overline{S}$ , máme

$$\overline{S} = \left\{ \begin{array}{l} \text{intenzita záření} \\ \text{nebo} \\ \text{energie / (plocha} \cdot \text{čas)} \end{array} \right\} = \varepsilon_0 c \overline{E^2}, \quad (31.28)$$

kde čára nad označením veličiny znamená časovou střední hodnotu. Z naší teorie indexu lomu máme tak pěkný výsledek navíc!

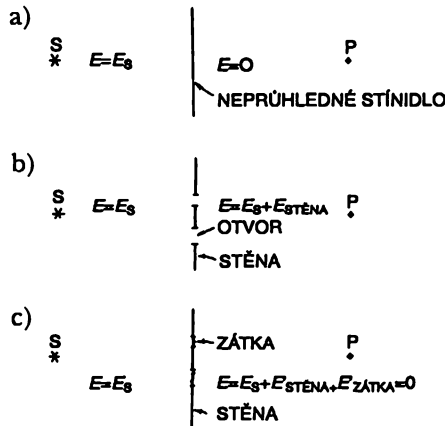
## 31.6 DIFRAKCE SVĚTLA NA CLONĚ

Nyní je vhodná chvíle, abychom se trochu věnovali jiné záležitosti, kterou můžeme zvládnout s aparátem této kapitoly. V předcházející kapitole jsme řekli, máme-li nepropustnou clonu a světlo může pronikat jen nějakými otvory, rozložení intenzity – difrakční obraz – můžeme dostat, když si místo toho představíme, že otvory jsou nahrazeny zdroji (oscilátory) rovnoměrně rozloženými v otvorech. Jinými slovy, difraktovaná vlna je stejná, jako kdyby otvory byly novými zdroji. To musíme odůvodnit, protože otvor je právě místo, kde nejsou žádné zdroje, kde nejsou žádné urychlované náboje.

Nejdříve se zeptejme: „Co je nepropustná clona?“ Předpokládejme, že mezi zdrojem  $S$  a pozorovatelem  $P$  máme úplně nepropustnou clonu jako na *obr. 31.6a*). Je-li clona nepropustná, není v bodě  $P$  žádné pole. Proč tam není pole? Podle základních principů dostaneme pole v bodě  $P$  jako pole  $E$ , zdroje retardované o příslušný čas plus pole od všech nábojů okolo. Ale, jak jsme

## DIFRAKCE SVĚTLA NA CLONĚ

si již ukázali, pole  $E_s$  rozkmitá náboje v cloně a tento pohyb vytváří nové pole, které, je-li clona nepropustná, se musí *úplně rušit* polem  $E_s$  na její druhé straně. Řeknete: „Jaký div, že se přesně ruší! Co když se neruší přesně?“ Kdyby se přesně nerušily, pole u zadní strany stínítka (pamatujme, že stínítko má určitou tloušťku) by pak nebylo přesně nulové. Kdyby nebylo nulové, rozkmitalo by náboje ve stínítku a tím by se vytvořilo další pole rušící původní pole. Takže, je-li clona dostatečně silná, neexistuje žádné zbytkové pole, neboť je dostatek možnosti, aby se vše vyrušilo. Ve smyslu našich vzorců bychom řekli, že stínítko má velký a imaginární index lomu, takže, jak jsem vlna postupuje, exponenciálně se pohlcuje. Víme, že dostatečně tenký plátek i toho nejneprůhlednějšího materiálu, dokonce i zlata, je průsvitný.



Obr. 31.6 Difrakce na stínítku

Nyní se podívejme, co se stane s nepropustným stínítkem, jež má otvory, jaké jsou zobrazeny na obr. 31.6b). Jaké očekáváme, že bude pole v bodě  $P$ ? Můžeme ho napsat jako součet dvou částí – pole vytvořené zdrojem  $S$  plus pole vytvořené stěnou, tj. pohybem nábojů ve stěně. Můžeme předpokládat, že pohyby nábojů ve stěně budou složité, ale pole, které vytvářejí, můžeme najít dost jednoduchým způsobem.

Předpokládejme, že máme stejné stínítko, jen jsme v něm ucpali otvory, jak je znázorněno na obr. 31.6c). Představme si, že zátky jsou ze stejného materiálu jako stínítko. Připomínáme, že zátky budou na místě otvorů, jež jsme měli v případě b). Nyní vypočítejme pole v bodě  $P$ . V případě c) je určité nulové, ale také je rovno součtu pole zdroje a pole vytvořeného pohyby atomů ve stěně a v zátkách. Můžeme napsat rovnice:

$$\begin{aligned} \text{Případ b):} & \quad E_P = E_s + E_{\text{stěny}} \\ \text{Případ c):} & \quad E'_P = 0 = E_s + E'_{\text{stěny}} + E'_{\text{zátek}} \end{aligned}$$

kde čárkou označujeme pole v případě zavřených otvorů, ale pole  $E_s$  je samozřejmě stejné v obou případech. Odečteme-li nyní obě rovnice, dostaneme

$$E_P = (E_{\text{stěny}} - E'_{\text{stěny}}) - E'_{\text{zátek}}$$



Nejsou-li otvory příliš malé (řekněme na šířku mnoha vlnových délek), lze očekávat, že přítomnost zátek nezmění pole dopadající na stěny, snad kromě malé změny podél okrajů otvorů. Zanedbáme-li tuto malou změnu, můžeme položit  $E_{\text{stěny}} = E'_{\text{stěny}}$  a dostáváme

$$E_P = - E'_{\text{zátek}}.$$

Dostali jsme tedy následující výsledek: Jsou-li ve stínítku otvory (případ b), intenzita pole v bodě  $P$  je stejná (až na znaménko) jako intenzita pole vytvořená tou částí neprůhledné stěny, jež je umístěna *v místech, kde jsou otvory!* (Znaménko není příliš zajímavé, protože obvykle nás zajímá světelný tok, který je úměrný druhé mocnině intenzity pole.) Zdá se, že je to podivná argumentace v kruhu, ale nejen že je to pravda (v přiblížení pro ne příliš malé otvory), ale má to i svůj užitek a je to potvrzení platnosti teorie difrakce.

Pole  $E'_{\text{zátky}}$  se vypočítá v každém konkrétním případě, za předpokladu, že pohyby všech nábojů ve stínítku jsou právě takové, že vyruší pole  $E_s$  na druhé straně stínítku. Když jednou tyto pohyby známe, přidáme radiační pole v  $P$  vytvořené právě náboji zátek.

Opět poznamenejme, že tato teorie difrakce je pouze přibližná a bude dobrá jen, když otvory nejsou příliš malé. Pro příliš malé otvory bude člen  $E'_{\text{zátek}}$  příliš malý a rozdíl mezi  $E'_{\text{stěny}}$  a  $E_{\text{stěny}}$  (který jsme položili rovný nule) může být srovnatelný nebo dokonce větší než malý člen  $E'_{\text{zátek}}$  a naše aproximace již nebude platit.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 31.1 ■ Určete index lomu hliníku pro rentgenové záření o vlnové délce  $1,56 \cdot 10^{-8}$  cm za předpokladu, že elektrony v hliníku kmitají s vlastní frekvencí mnohem menší než je frekvence rentgenového záření.
- 31.2 ■ Index lomu ionosféry pro rádiové vlny o frekvenci  $100 \mu\text{s}^{-1}$  je  $n = 0,90$ . Určete koncentraci elektronů v ionosféře.
- 31.3 ■ Elektrické pole  $E$  světelných vln, jež procházejí prostředím s indexem lomu  $n$ , je  $E_0 e^{i\omega(t - nzc)}$ .
- a) Ukažte, že je-li  $n = n' - i n''$ , platí  $E = E_0 e^{-n''\omega z/c} e^{i\omega(t - n'zc)}$ .
- b) S použitím výrazu  $n - 1 = \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$ , najděte zákon poklesu intenzity světelné vlny, jejíž frekvence je přesně rovna atomové frekvenci  $\omega_0$ .
- 31.4 ■ Je známo, že okamžitá hustota toku energie elektromagnetické vlny je  $S = \epsilon_0 c E^2 \text{Wm}^{-2}$ .
- a) Určete celkovou energii, kterou za jednotku času vyzařuje elektron kmitající s amplitudou  $x_0$  a úhlovou frekvencí  $\omega$ .
- b) Porovnejte energii vyzařenou během jednoho kmitu s nahromaděnou energií  $1/2 m\omega^2 x^2$  a určete konstantu útlumu  $\gamma_R$ . Je to tzv. radiační útlum.
- c) Vybuzený atom vyzařuje fotony určité vlnové délky  $\lambda$ . Vypočítejte očekávané rozšíření spektrální čáry  $\Delta\lambda$ , je-li způsobeno pouze radiačním útlumem. Považujte přitom atom za malinký tlumený oscilátor.

# Radiační útlum.

## Rozptyl světla

---

- 32.1 RADIČNÍ ODPOR
- 32.2 RADIČNÍ VÝKON
- 32.3 RADIČNÍ ÚTLUM
- 32.4 NEZÁVISLÉ ZDROJE
- 32.5 ROZPTYL SVĚTLA

### 32.1 RADIČNÍ ODPOR

V předcházející kapitole jsme se dozvěděli, že když systém osciluje, vydává energii a odvodili jsme vzorec pro energii vyzářenou oscilujícím systémem. Známe-li intenzitu elektrického pole, střední hodnota druhé mocniny intenzity vynásobená  $\epsilon_0 c$  dává množství energie, jež projde za sekundu čtverečným metrem plochy kolmé na směr, jímž se záření šíří

$$P = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle. \quad (32.1)$$

Každý oscilující náboj vyzařuje energii; například i buzená anténa vyzařuje energii. Vyzařuje-li systém energii, je mu třeba energii dodávat, například dráty vedoucími k anténě, neboť platí zákon o zachování energie. Na napájecí obvod tedy anténa působí jako *odpor* nebo jako místo, kde se může energie „ztrácet“ (energie se ve skutečnosti neztrácí, vyzařuje se, ale vzhledem k napájecímu obvodu se ztrácí). V obyčejném odporu se „ztracená“ energie mění v teplo. V tomto případě „ztracená“ energie uniká do prostoru. Z hlediska teorie obvodů, bez ohledu na to, kam se energie poděje, je výsledný efekt v obvodu stejný – energie se z obvodu „ztrácí“. Proto je anténa pro generátor odporem, i kdyby byla zhotovena z čisté mědi. Skutečně, je-li dobře konstruována, jeví se jako téměř čistý odpor s velmi malou induktancí nebo kapacitancí, protože chceme, aby se z antény vyzářilo co nejvíce energie. Tento odpor antény se nazývá *radiační odpor*.

Napájí-li se anténa proudem  $I$ , je střední výkon dodávaný do antény roven střední hodnotě druhé mocniny proudu vynásobené odporem. Výkon *vyzařený* anténou je úměrný druhé

mocnině proudu v anténě, neboť všechna pole jsou úměrná proudům a uvolněná energie je úměrná druhé mocnině intenzity pole. Koeficient úměrnosti mezi vyzařeným výkonem a  $\langle I^2 \rangle$  je radiační odpor.

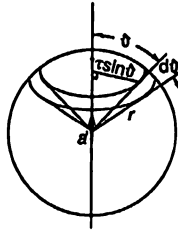
Zajímavá je otázka, odkud se radiační odpor bere. Vezmeme si jednoduchý příklad: Řekněme, že v anténě jsou proudy protékající nahoru a dolů. Zjistíme, že má-li anténa vyzařovat energii, musíme konat práci. Vezmeme-li nabitě těleso a urychlujeme ho směrem nahoru – dolů, vyzařuje energii. Kdyby nebylo nabitě, nevyzařovalo by energii. Vypočítat ze zákona zachování, že se energie ztrácí, je jedna věc, ale druhou věcí je odpovědět na otázku, *proti jaké síle konáme práci*. To je zajímavá a velmi těžká otázka, která nebyla nikdy úplně a uspokojivě zodpovězena pro elektrony, i když byla zodpovězena pro antény. V anténě se děje toto: Pole vytvořená náboji v jedné části antény působí na pohybující se náboje v jiné části antény. Tyto síly můžeme vypočítat, lze zjistit práci, kterou vykonávají a tak najít správný vzorec pro radiační odpor. Když řkáme, že „můžeme vypočítat“, není to úplně pravda – my nemůžeme, neboť jsme zatím nestudovali zákony elektřiny na krátkých vzdálenostech. Víme jen, čemu je rovno elektrické pole na velkých vzdálenostech. Viděli jsme vztah (28.3), ale výpočet pole uvnitř vlnové zóny je pro nás zatím příliš komplikovaný. Jelikož však platí zákon zachování energie, správný výsledek můžeme vypočítat aniž bychom znali pole na krátkých vzdálenostech. Naopak odtud plyne, že známe-li pole na velmi velkých vzdálenostech můžeme pomocí zákona zachování energie najít vztah pro síly na krátkých vzdálenostech. Zde se tím však nebudeme zabývat.

U jednotlivého elektronu je takový problém: Je-li pouze jeden náboj, jak může sám na sebe působit? Ve staré, klasické teorii byl předložen návrh, že elektron je malá kulička a že jedna část náboje působí na druhou část. Při časovém zpoždění v působení síly napříč malinkým elektronem není síla úplně ve fázi s pohybem. Je-li elektron v klidu, víme, že „akce je rovna reakci“, takže různé vnitřní síly se vyrovnávají a výsledná síla je nulová. Zrychluje-li však elektron, není z důvodu časového zpoždění síla, jež působí zezadu na přední část přesně stejná jako síla působící zepředu na jeho zadní část. Tak časové zpoždění naruší rovnováhu, takže výsledný efekt je ten, že elektron sám sebe přibrzdí jakoby tahal za tkaničky svých vlastních bot. Tento model vzniku odporu proti zrychlení, model radiačního odporu pohybujícího se náboje, narazil na mnoho těžkostí, neboť náš současný pohled na elektron je takový, že to není „malá kulička“. Je to problém, který zatím nebyl vyřešen. Přesto můžeme přesně vypočítat, jaká musí být výsledná síla radiačního odporu, tj. jak velké musí být ztráty při urychlování náboje i přesto, že mechanismus působení této síly neznáme.

## 32.2 RADIČNÍ VÝKON

Nyní vypočteme celkovou energii vyzařovanou zrychlovaným nábojem. Aby byla naše diskuze obecná, vezmeme si případ náboje pohybujícího se s libovolným zrychlením, ale nerelativisticky. V okamžiku, kdy je zrychlení, dejme tomu, vertikální, víme, že intenzita vytvářeného elektrického pole je rovna náboji vynásobenému průmětem retardovaného zrychlení vyděleného vzdáleností. Takže elektrické pole známe v každém bodě, a proto známe i druhou mocninu intenzity pole, a tedy i energii  $\epsilon_0 c E^2$  unikající jednotkovou plochou za sekundu.

Veličina  $\epsilon_0 c$  se ve vztazích pro šíření rádiových vln vyskytuje dost často. Její převrácená hodnota se nazývá *impedance vakua* a lze si ji snadno zapamatovat. Má hodnotu  $1/\epsilon_0 c = 377$  ohmů. Takže výkon ve watttech na čtvereční metr je roven střední hodnotě druhé mocniny intenzity pole dělené 377.


 Obr. 32.1 Plocha kulového pásu je  $2\pi r \sin \vartheta \cdot r d\vartheta$ 

Použijeme-li pro intenzitu pole náš vztah (29.1), najdeme, že

$$S = \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \vartheta}{16 \pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \quad (32.2)$$

je rovno výkonu vyzářenému plochou jednoho čtverečného metru ve směru  $\vartheta$ . Všimněme si, že závisí na převrácené hodnotě druhé mocniny vzdálenosti, jak jsme si řekli už předtím. Předpokládejme, že bychom chtěli znát celkovou energii vyzářenou všemi směry. Pak musíme integrovat (32.2) přes všechny směry. Nejdříve násobíme plochou, abychom našli velikost toku ve směru malého úhlu  $d\vartheta$  (obr. 32.1). Potřebujeme znát plochu kulového pásu. Lze ji zjistit takto: Je-li  $r$  poloměr kulové plochy, je úhlová šířka pásu  $r d\vartheta$  a obvod je  $2\pi r \sin \vartheta$ , protože  $r \sin \vartheta$  je poloměr kružnice, takže plocha malé části koule je  $2\pi r \sin \vartheta$  krát  $r d\vartheta$

$$dA = 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta. \quad (32.3)$$

Vynásobením toku (32.2) plochou v čtverečních metrech připadajících na malý úhel  $d\vartheta$  dostaneme část energie uvolněné v tomto směru mezi úhlem  $\vartheta$  a  $\vartheta + d\vartheta$ . Potom integrujeme přes všechny úhly  $\vartheta$  od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ :

$$P = \int S dA = \frac{q^2 a'^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta. \quad (32.4)$$

Použitím vztahu  $\sin^3 \vartheta = (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta$  není těžké ukázat, že  $\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = 4/3$ . Použitím tohoto faktu konečně dostáváme

$$P = \frac{q^2 a'^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}. \quad (32.5)$$

Tento výraz si zaslouží několik poznámek. Za prvé, protože vektor  $a'$  má určitý směr, výraz  $a'^2$  v (32.5) bude druhou mocninou vektoru  $a'$ , tj.  $a' \cdot a'$ , což je druhá mocnina délky vektoru  $a'$ . Za druhé, tok (32.2) byl vypočítán pomocí retardovaného zrychlení, tj. pomocí zrychlení v čase, v němž byla vyzářena energie procházející nyní povrchem koule. Snad by se nám líbilo říct, že tato energie se uvolnila v dřívějším čase. To není přesné, je to jen aproximace. Přesný čas uvolnění energie nelze přesně definovat. Skutečně přesně můžeme vypočítat jen to, co se děje během celkového pohybu jako například při uzavřeném cyklu oscilací, kde zrychlení nakonec přestává. Tak zjistíme, že celkový tok energie na jednu periodu je dán druhou mocninou střední hodnoty zrychlení za tuto periodu. Ve vztahu (32.5) by měla být tato hodnota. Nebo v případě

## RADIAČNÍ ÚTLUM

pohybu, při němž je zrychlení na začátku a na konci rovno nule, celková energie, která se uvolnila, je rovna integrálu podle času  $z$  (32.5).

Pro ilustraci důsledků vztahu (32.5) pro oscilující systém se podívejme, co se stane, když výchylka  $x$  náboje osciluje tak, že zrychlení  $a = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$ . Pro střední hodnotu druhé mocniny zrychlení za jednu periodu (pamatujeme, že při umocňování komplexních výrazů musíme být velmi opatrní – je to skutečně kosinus a střední hodnota  $\cos^2 \omega t$  je jedna polovina) tedy platí

$$\langle a^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega^4 x_0^2.$$

Proto

$$P = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2}{12 \pi \epsilon_0 c^3}. \quad (32.6)$$

Vztahy, o nichž nyní mluvíme, jsou relativně náročné a poměrně moderní. Pocházejí z začátku dvacátého století a jsou velmi známé. Pro nás je důležité, abychom o nich uměli číst i ve starších knihách, kde se používal systém jednotek odlišný od systému SI. To je možno vzít v úvahu ve výsledných vztazích platných pro elektrony podle následujícího pravidla. Veličina  $q_e^2/4\pi\epsilon_0$ , kde  $q_e$  je náboj elektronu (v coulombech) se v minulosti psala jako  $e^2$ . Velmi snadno lze vypočítat, že  $e$  je v systému SI číselně rovno  $1,5188 \cdot 10^{-14}$ , protože víme, že  $q_e = 1,60206 \cdot 10^{-19}$  a  $1/4\pi\epsilon_0 = 8,98748 \cdot 10^9$ . Proto budeme často používat zkrácené označení

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (32.7)$$

Když ve starších vztazích použijeme uvedenou hodnotu pro  $e$  a zacházíme s nimi jako by byly zapsány v systému SI, dostaneme správné výsledky. Například starší forma vztahu (32.5) je  $P = 2/3 e^2 a^2 c^{-3}$ . Potenciální energie protonu a elektronu ve vzdálenosti  $r$  je

$$\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ nebo } \frac{e^2}{r} \text{ s hodnotou } e = 1,51188 \times 10^{-14} \text{ SI.}$$

### 32.3 RADIAČNÍ ÚTLUM

Fakt, že oscilátor ztrácí určitou energii, znamená, že kdybychom měli náboj umístěný na konci pružiny (nebo elektron v atomu) s vlastní frekvencí  $\omega_0$  a kdybychom ho rozkmitali, nebudou oscilovat stále i kdyby se nacházel v prázdném prostoru vzdálen od čehokoliv na milióny kilometrů. I kdyby kmital bez tření, nepotřeboval mazání, nepůsobila by na něho žádná vazkost prostředí, přece by nekmital věčně, je-li elektricky nabitý, vyzařuje energii, a oscilace tedy pomalu zaniknou. Jak pomalu? Čemu je rovna kvalita  $Q$  takového oscilátoru způsobená elektromagnetickými jevy, tj. radiační odpor nebo *radiační útlum* oscilátoru? Pro jakýkoliv oscilační systém je  $Q$  rovno celkové energii oscilátoru dělené energetickou ztrátou na radián

$$Q = \frac{W}{dW/d\phi}.$$

Protože  $\frac{dW}{d\varphi} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{\omega}$ , můžeme  $Q$  zapsat též ve tvaru

$$Q = \frac{\omega W}{\left| \frac{dW}{dt} \right|}. \quad (32.8)$$

Pro dané  $Q$  nám tento vztah říká, jak rychle se energie oscilací vytratí, neboť  $dW/dt = -(\omega/Q)W$  a řešením je  $W = W_0 e^{-\omega t/Q}$ , kde  $W_0$  je počáteční energie (v čase  $t=0$ ).

Abychom našli  $Q$  zářiče, vraťme se opět k (32.8) a pro  $dW/dt$  použijme vztah (32.6).

Co nyní vezmeme za energii oscilátoru  $W$ ? Kinetická energie oscilátoru je  $1/2 mv^2$  a střední kinetická energie je  $1/4 m\omega^2 x_0^2$ . Pamatujeme si však, že z celkové energie oscilátoru v průměru připadá polovina na kinetickou energii a polovina na potenciální energii, proto náš výsledek zdvojnásobíme a zjistíme, že celková energie oscilátoru je rovna

$$W = \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2. \quad (32.9)$$

Co použijeme jako frekvenci v těchto vztazích? Vezmeme vlastní frekvenci  $\omega_0$ , neboť to je frekvence, kterou z praktického hlediska vyzařuje náš atom a za  $m$  dáme hmotnost elektronu  $m_e$ . Po jednoduchých úpravách dostáváme

$$\frac{1}{Q} = \frac{4\pi e^2}{3\lambda m_e c^2}. \quad (32.10)$$

(Abychom tento vztah viděli lépe v jeho historické podobě, použili jsme naše zkrácené označení  $q_e^2/4\pi\epsilon_0 = e^2$  a zbývající člen  $\omega_0/c$  jsme zapsali jako  $2\pi/\lambda$ .)  $Q$  je bezrozměrná veličina, kombinace  $e^2/m_e c^2$  musí být jen vlastností náboje a hmotnosti elektronu, jeho vnitřní vlastností a musí mít rozměr *délky*. Dostala název *klasický poloměr elektronu*, neboť v prvních atomových modelech snažících se vysvětlit radiační odpor elektronu na základě síly působící jednou částí elektronu na jiné části bylo třeba, aby elektron měl řádově rozměr takové velikosti. Tato veličina však neznamená, že nadále věříme tomu, že elektron skutečně takový poloměr má. Číselná hodnota poloměru je

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (32.11)$$

Pojďme nyní vypočítat  $Q$  pro atom vyzařující světlo – dejme tomu pro atom sodíku. Vlnová délka je pro sodíkový atom rovna přibližně 6 000 angströmů<sup>41)</sup> ve žluté části viditelného světla a je to typická vlnová délka. Platí

$$Q = \frac{3\lambda}{4\pi r_0} \approx 5 \cdot 10^7, \quad (32.12)$$

<sup>41)</sup> Dříve používaná délková jednotka angström  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ . (Pozn. red.)

takže  $Q$  pro atom je řádově rovno  $10^8$ . Znamená to, že atomový oscilátor bude oscilovat  $10^8$  rádiánů nebo  $10^7$  oscilací než se ztlumí o faktor  $1/e$ . Frekvence světla odpovídající 6 000 angströmům je  $f = c/\lambda$ , což je řádově  $10^{15}$  cyklů za sekundu, takže doba života, tj. čas za který se energie vyzařujícího atomu zmenší o faktor  $1/e$ , je řádově  $10^{-8}$  s. Volně vyzařující atomy září za normálních okolností asi tak dlouho. Platí to pro atomy nacházející se v prázdném prostoru, kde nejsou nijak rušeny. Je-li elektron v pevné látce, kde se musí srážet s jinými atomy nebo elektrony, přistoupí ještě další síly odporu a tlumení je jiné.

Efektivní odpor  $\gamma$  v zákoně pro útlum oscilátoru můžeme najít ze vztahu  $1/Q = \gamma/\omega_0$  a víme, že velikost  $\gamma$  určuje, jaká bude šířka rezonanční křivky (obr. 23.2). Tak jsme právě vypočetali šířku spektrálních čar pro volně zářící atomy! Jestliže  $\lambda = 2\pi c/\omega$ , pak máme

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c\Delta\omega}{\omega^2} = 2\pi c \frac{\gamma}{\omega_0^2} = \frac{2\pi c}{Q\omega_0} = \frac{\lambda}{Q} = \frac{4\pi r_0}{3} = 1,18 \times 10^{-14} \text{ m.} \quad (32.13)$$

## 32.4 NEZÁVISLÉ ZDROJE

Jako přípravu na naše další téma – rozptyl světla, musíme probrat určitou stránku interference, jíž jsme se zatím nezabývali. Je otázkou, kdy interference *nenastane*. Máme-li zdroje  $S_1$  a  $S_2$  s amplitudami  $A_1$  a  $A_2$  a pozorujeme z místa, do něž oba signály přijdou s fázemi  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  (jsou to kombinace vlastních oscilací a časového zpoždění, jež závisí na poloze pozorovatele), tok energie, kterou dostaneme, lze najít složením dvou komplexních vektorů  $A_1$  a  $A_2$  pod úhly  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  (jak jsme dělali v 30. kapitole). Zjistíme, že výsledná energie je úměrná

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (32.14)$$

Kdyby zde nebyl smíšený člen  $2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ , celková energie by se prostě rovnala součtu energií  $A_1^2 + A_2^2$  uvolněných každým zdrojem zvlášť, což je výsledek, který obvykle očekáváme. Takže výsledná intenzita světla, přicházejícího ze dvou zdrojů, je rovna součtu intenzit obou světél. Máme-li smíšený člen, výsledek není roven takovému součtu, neboť je zde ještě interference. V případě, že tento člen se dá zanedbat, můžeme říct, že se interference ztratila. Je jasné, že v přírodě je vždy přítomná, jen my jí nemusíme být schopni postřehnout.

Podívejme se na některé příklady. Nejprve předpokládejme, že máme dva zdroje vzdálené 7 000 000 000 vlnových délek, což není nemožné. Je pravda, že pak fázový rozdíl nabývá v daném směru nějakou konkrétní hodnotu. Ale když se posuneme jen o vlásek v jednom směru, několik vlnových délek, což je zanedbatelná vzdálenost (už jen naše oko má takový otvor, že středuje účinky ve velmi velké oblasti ve srovnání s jednou vlnovou délkou), relativní fáze se změní a funkce kosinus se změní velmi prudce. Vezmeme-li průměrnou intenzitu malé oblasti, při malém pohybu se kosinus střídavě mění na kladný a záporný a v průměru dává nulovou hodnotu.

Středujeme-li tedy přes oblasti, kde se fáze mění velmi prudce v závislosti na poloze, nedostáváme interference.

Další příklad. Předpokládejme, že našimi dvěma zdroji jsou dva nezávislé zdroje rádiových vln – ne jeden oscilátor se dvěma anténami, což by zabezpečovalo, že fáze jsou stále stejné, ale dva nezávislé zdroje. Dále nechť tyto zdroje nejsou naladěny *přesně* na tutéž frekvenci (je velmi těžké je vyladit na stejnou frekvenci, aniž by byly vzájemně propojeny). V tomto případě mluvíme o dvou *nezávislých zdrojích*. Protože frekvence si nejsou přesně rovny, i když vlny byly



zpočátku ve fázi, jedna trochu předběhne druhou a brzy už nebudou ve fázi. Tento proces stále pokračuje, až se vlny opět dostanou do fáze. Takže fázový rozdíl mezi zdroji se postupně mění v závislosti na čase. Není-li však naše pozorování natolik přesné, abychom mohli tyto rychlé časové změny pozorovat a středujeme-li přes mnohem delší čas přestože se intenzita zvětšuje a zmenšuje jako při rázech zvukových vln, interferenční člen v průměru opět vymizí.

Proto můžeme říct, že v každém případě, kdy interferenční člen při vystředování vymizí, interferenci nemáme!

Je mnoho knih, v nichž se tvrdí, že dva rozdílné zdroje nikdy neinterferují. To není fyzikální tvrzení, ale pouhé vyjádření stupně citlivosti experimentálníhoho zařízení v době, kdy byla kniha napsána. Ve světelném zdroji září nejprve jeden atom, pak druhý atd. a právě jsme viděli, že atom září spojitě jen asi  $10^{-8}$  sekundy. Po tomto čase září další atom, pak zase další atd. takže fáze mohou být skutečně stejné jen  $10^{-8}$  sekundy. Proto, když středujeme přes mnohem delší čas než  $10^{-8}$  sekundy, nevidíme interferenci od dvou nezávislých zdrojů, neboť jejich fáze se nemohou udržet déle než  $10^{-8}$  sekundy. S fotobuňkami lze provést velmi rychlou detekci a ukázat, že existuje interference, která kolísá v závislosti na čase po dobu asi  $10^{-8}$  sekundy. Většina detekčních zařízení neregistruje tak krátké časové intervaly, a proto žádnou interferenci nezaznamenává. Lidské oko, které vystředovává děje v intervalu jedné desetiny sekundy, nemá určitě žádnou možnost uvidět interferenci mezi dvěma obyčejnými zdroji.

Nedávno se podařilo sestrojít takové zdroje světla, jež se vypořádávají s tímto jevem tak, že nutí všechny atomy zářit současně. Zařízení, jímž toho lze dosáhnout, je velmi komplikované a můžeme ho pochopit pouze pomocí kvantové mechaniky. Nazývá se *laser*. Pomocí laseru lze sestrojít zdroj, jehož interferenční čas, po který je fáze konstantní, je mohem delší než  $10^{-8}$  sekundy. Může být řádově setina, desetina nebo dokonce jedna sekunda, takže frekvenci dvou různých laserů lze zachytit pomocí obyčejných fotobuněk. Snadno lze zaznamenat pulzování rázů mezi dvěma laserovými zdroji. Bezpochyby se brzy někomu podaří se dvěma zdroji svítcími na stěnu ukázat tak pomalé rázy, že bude vidět, jak se stěna osvětluje a tmavne!

Další propad, kdy se interferenční člen v průměru ruší, nastává tehdy, máme-li ne dva ale mnoho zdrojů. V takovém případě napíšeme výraz pro  $A_R^2$  jako součet velkého počtu amplitud (komplexních čísel) umocněných na druhou a smíšených členů mezi každým párem amplitud. Když smíšené členy v průměru vymizí, interferenční jev nenastane. Může se stát, že zdroje jsou umístěny tak náhodně, že i když je fázový rozdíl mezi  $A_2$  a  $A_3$  určitý, silně se liší od fázového rozdílu  $A_1$  a  $A_2$  atd. Takže budeme mít mnoho kosinových členů, kladných i záporných, jež se navzájem v průměru ruší.

Situace je tedy taková, že v mnoha případech interferenci nepozorujeme, ale vidíme pouze celkovou intenzitu rovnající se součtu všech intenzit.

## 32.5 ROZPTYL SVĚTLA

Naše předcházející téma nás vede k jevu, jenž nastává ve vzduchu jako důsledek nepravidelných poloh atomů. Při probírání indexu lomu jsme viděli, že dopadající světlo způsobí vyzařování atomů. Elektrické pole dopadajícího paprsku rozkmitá elektrony a ty začnou v důsledku svého zrychlení vyzařovat. Rozptýlené světlo se zkombinuje s původním a ve stejném směru jako bylo původní světlo vznikne paprsek s odlišnou fází, což způsobuje vznik indexu lomu.

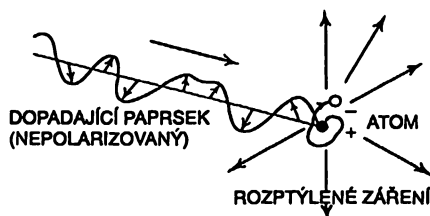
Co však můžeme říct o intenzitě světla, jež je vyzařováno v jiných směrech? Obyčejně, jsou-li atomy hezky pravidelně geometricky uspořádány, lze snadno ukázat, že v ostatních směrech nedostáváme nic, neboť sčítáme mnoho vektorů, jejichž fáze se stále mění, a výsledek bude

nulový. Jsou-li však atomy rozmístěny *náhodně*, výsledná intenzita v každém směru je rovna součtu intenzit rozptýlených každým atomem, jak jsme o tom právě hovořili. Navíc, v plynu se atomy neustále pohybují, takže relativní fáze dvou atomů se mění v čase, a proto každý kosinový člen v průměru vymizí. Ke zjištění, kolik světla se rozptýlí v plynu do určitého směru, stačí zjistit, kolik se ho rozptýlí od jednoho atomu a intenzitu záření vynásobit počtem atomů.

Již dříve jsme poznamenali, že takový rozptyl světla je příčinou modré barvy oblohy. Sluneční světlo prochází vzduchem, a když se podíváme stranou od Slunce – řekněme kolmo k paprskům – vidíme modré světlo. Nyní musíme vypočítat množství světla, které vidíme a zjistit, proč je modré.

Je-li v bodě, kde se nachází atom, intenzita elektrického pole dopadajícího světla  $E = E_0 e^{i\omega t}$ , víme, že elektron v atomu začne pod jejím vlivem kmitat (obr. 32.2). Z rovnice (23.8) máme pro amplitudu

$$\hat{x} = \frac{q_e \hat{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}. \quad (32.15)$$



Obr. 32.2 Svazek záření dopadá na atom a uvádí do pohybu náboje (elektrony), které jsou v něm. Pohybující se elektrony vzápětí vyzařují v různých směrech

Mohli bychom zahrnout tlumení i možnost, že se atom chová jako několik oscilátorů s různou frekvencí a sčítat přes tyto frekvence, ale pro jednoduchost si vezměme jen jeden oscilátor a tlumení zanedbáme. Potom výsledná reakce na vnější elektrické pole, kterou jsme brali v úvahu již při výpočtu indexu lomu, je prostě

$$\hat{x} = \frac{q_e \hat{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (32.16)$$

Použitím vztahu (32.2) a zrychlení odpovídajícímu tomuto  $\hat{x}$  bychom mohli nyní snadno vypočítat intenzitu světla, které atom emituje v různých směrech.

Místo toho, abychom ušetřili čas, vypočítáme prostě celkové množství světla rozptýleného do *všech* směrů. Celkové množství světelné energie rozptýlené jedním atomem do všech směrů za sekundu je samozřejmě dáno rovnicí (32.6). Takže po dosazení a úpravě máme pro celkový rozptýlený výkon vyzařený do všech směrů

$$\begin{aligned} P &= \frac{q_e^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \frac{q_e^2 E_0^2}{m_e^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \cdot \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{q_e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 c^4} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} = \\ &= \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \cdot \frac{8\pi r_0^2}{3} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \end{aligned} \quad (32.17)$$

Výsledek jsme napsali v tomto tvaru, neboť takto si ho lze snadno zapamatovat: Za prvé, celková rozptýlená energie je úměrná druhé mocnině původního pole. Co to znamená? Druhá mocnina intenzity dopadajícího pole je samozřejmě úměrná energii dopadající za sekundu. Skutečně, množství energie dopadající na metr čtverečný za sekundu je rovno  $\epsilon_0 c$  násobené střední hodnotou druhé mocniny intenzity elektrického pole ( $E^2$ ) a je-li  $E_0$  maximální hodnota  $E$ ,  $\langle E^2 \rangle = 1/2 E_0^2$ . Znamená to, že celková rozptýlená energie je úměrná energii dopadající na metr čtverečný. Čím je sluneční světlo osvětlující oblohu jasnější, tím bude obloha jasnější.

Dále, jaká část dopadajícího světla se rozptýlí? Představme si svazek paprsků a „terč“ (ne skutečný, hmotný terč, protože ten by způsobil difrakci světla apod., jde nám jen o myšlenou plochu, nakreslenou někde v prostoru) plochy  $\sigma$ . Celková energie, která projde plochou  $\sigma$ , je, za daných okolností, úměrná dopadající intenzitě záření i ploše  $\sigma$  a bude

$$P = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \sigma. \quad (32.18)$$

Nyní přistoupíme k našemu problému trochu jinak: řekneme, že atom rozptyluje všechnu energii, jež dopadá na určitou plochu, a určíme velikost této plochy. Naše odpověď pak nebude záviset na intenzitě dopadajícího záření; bude to poměr energie rozptýlené k energii dopadající na jeden metr čtverečný. Jinými slovy poměr

$$\frac{\text{celková energie rozptýlená za sekundu}}{\text{energie dopadající na metr čtverečný za sekundu}} \text{ se rovná } \textit{ploše}.$$

Tato plocha má ten význam, že když se všechna energie, která na ní dopadá, rozptýlí do všech směrů, udává podíl energie, jež se rozptýlí na jednom atomu.

Této ploše se říká *účinný průřez rozptylu*. Účinný průřez se běžně používá při popisu jevů, kde nějaká veličina závisí na intenzitě dopadajícího svazku. V těchto případech se pravděpodobnost daného jevu popisuje tak, že se určí efektivní plocha, jež by byla zapotřebí k zachycení odpovídající části svazku. To však neznamená, že oscilátor má takovou plochu! Kdyby tam nebylo nic jiného než volně kmitající elektrony, fyzikálně by to neodpovídalo žádné skutečné ploše. Je to jen způsob, jak lze vyjádřit odpověď na některé problémy; říká nám, na jak velkou plochu by musel dopadat původní svazek, abychom dostali příslušné množství vycházející energie. V našem případě to je

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (32.19)$$

(kde index  $s$  znamená rozptyl).

Podívejme se na některé případy. Nejdříve přejdeme k velmi malé vlastní frekvenci  $\omega_0$  nebo ke zcela volným elektronům, pro které  $\omega_0 = 0$ . Úhlová frekvence  $\omega$  se pak vykrátí a účinný průřez je konstantní. Tato nízkofrekvenční limita čili účinný průřez volných elektronů je znám jako *účinný průřez Thomsonova rozptylu*. Je to plocha, čtverec o délce strany rovné přibližně  $10^{-15}$  metru, tj.  $10^{-30}$  čtverečního metru, což je dost malá plocha!

Na druhé straně, když si vezmeme světlo ve vzduchu, pamatujeme si, že vlastní frekvence oscilátorů pro vzduch jsou vyšší než frekvence viditelného světla. Znamená to, že v prvním přiblížení můžeme zanedbat  $\omega^2$  ve jmenovateli a vidíme, že rozptyl je úměrný čtvrté mocnině

frekvence. Proto se světlo dejme tomu, dvakrát vyšší frekvence rozptyluje šestnáctkrát intenzivněji, co je dost velký rozdíl. Modré světlo, jehož frekvence je přibližně dvakrát vyšší než frekvence červeného světla, se rozptyluje šestnáctkrát intenzivněji než červené světlo, a to už je značný rozdíl. Proto, když se podíváme na nebe za jasného počasí, vypadá tak nádherně modře!

K těmto výsledkům je třeba dodat několik poznámek. Jedna zajímavá otázka zní: Proč vůbec vidíme *mraky*? Odkud se vzaly? Každý ví, že to je kondenzovaná vodní pára, ale vodní pára je v atmosféře už i *předtím* než se kondenzuje, tak proč ji nevidíme už tehdy? Že ji vidíme, když je zkondenzovaná, to je celkem zřejmé. Předtím tam mraky nebyly a najednou tam *jsou*, takže záhada, odkud se berou mraky, není dětskou otázkou jako: „Tatínku, kde se vzala voda?“, ale je třeba jí pořádně vysvětlit.

Právě jsme si vysvětlili, že každý atom rozptyluje světlo, takže je jasné, že vodní pára ho bude rozptylovat také. Záhadou je, proč voda, když je zkondenzovaná do mraků, rozptyluje takové obrovské množství světla?

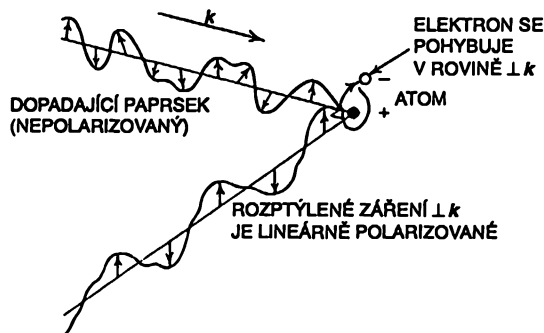
Zamysleme se nad tím, co se stane, když místo jednoho atomu budeme mít seskupení atomů, řekněme dvou, jež jsou velmi blízko ve srovnání s vlnovou délkou světla. Vzpomeňme si, že atomy mají průměr přibližně jeden angström, zatímco vlnová délka světla je asi 5 000 angströmů, takže, když se vytvoří shluk několika atomů, mohou být ve srovnání s vlnovou délkou světla velmi blízko sebe. Když na ně začne působit elektrické pole, *oba atomy se začnou pohybovat společně*. Intenzita rozptýleného elektrického pole bude pak dána součtem intenzit obou polí ve fázi, tj. amplituda bude dvojnásobná ve srovnání s jediným atomem a energie, jež se rozptýlí, bude proto ne dvakrát, ale čtyřikrát větší než s jedním atomem! Takže shluky atomů vyzařují nebo rozptylují více energie než jednotlivé atomy. Náš argument o nezávislosti fází je založen na předpokladu, že mezi dvěma atomy je skutečně velký fázový rozdíl, což je pravda, jen když jsou od sebe vzdáleny několik vlnových délek a nepravidelně uspořádány nebo když se pohybují. Je-li však jeden atom těsně vedle druhého, nevyhnutně rozptylují světlo ve fázi a koherentně interferují, což způsobuje růst rozptylu.

Máme-li ve shluku  $N$  atomů, malinkou kapičku vody, každý z nich bude buzen elektrickým polem stejně jako předtím (vzájemný účinek atomů můžeme zanedbat, jde nám jen o princip) i amplituda rozptylu bude od každého stejná, takže celkové rozptýlené pole bude  $N$ -krát silnější. *Intenzita* rozptýleného světla bude proto  $N^2$ -krát větší. Snad bychom očekávali, že to bude pouze  $N$ -krát víc ve srovnání s tím, když jsou atomy prostorově rozptýleny, ale ono je to  $N^2$ -krát víc. Lze tedy říct, že pro shluk  $N$  molekul vody je rozptyl  $N^2$ -krát silnější než je rozptyl na jednotlivých atomech. Jak se voda sráží, rozptyl narůstá. Narůstá až *do nekonečna*? Ne! Kdy začne selhávat tato analýza? Pro jak velký shluk atomů již nebude platit taková argumentace? Odpověď zní: Když se vodní kapka zvětší natolik, že její rozměry jsou přibližně rovny vlnové délce. Pak už všechny atomy nejsou ve fázi, protože jsou od sebe příliš vzdálené. Zvětšuje-li se velikost kapek, rozptyl stále roste, dokud kapka nenabude rozměru vlnové délky. Pak se rozptyl s narůstáním kapky už zdaleka tak rychle nezvětšuje. Navíc se ztratí modrá barva, protože než se dosáhne této limity pro velké vlnové délky, kapky mohou být již příliš velké pro malé vlnové délky. I když se krátké vlny na atomu rozptylují víc než dlouhé vlny, jakmile jsou všechny kapky větší než vlnová délka, dochází k většímu zvýraznění červeného konce spektra než modrého konce, takže barva se posune od modré směrem k červené.

Ukážeme si to pokusem. Můžeme vytvořit částice, jež jsou na začátku velmi malé a pak se zvětšují. Použijeme roztok thiosíranu sodného s kyselinou sírovou, v němž se vylučují drobná zrnka síry. Zrníčka síry jsou na začátku velmi malá a rozptylové světlo je trochu namodralé. Dalším vylučováním rozptyl zintenzivní, a když částice narůstají, zbarví se do běla. Navíc světlo,

které pronikne roztokem, bude ochuzeno o modrou složku. To je také důvod, proč je zapadající slunce zbarveno červeně. Světlo, jež přichází do oka silnou vrstvou vzduchu, ztratilo rozptylem mnoho ze své modré složky, takže je žlutě-červené.

Je ještě další důležitá věc, která už vlastně patří do následujících kapitol o polarizaci, ale je tak zajímavá, že na ni upozorníme již nyní. Jde o to, že elektrické pole dopadajícího světla má tendenci kmitat v určitém směru. Elektrické pole dopadajícího světla osciluje nějakým způsobem a jím buzený oscilátor se pohybuje v též směru. Díváme-li se pod pravým úhlem k paprsku, uvidíme *polarizované světlo*, to jest světlo, v němž intenzita elektrického pole má jen jeden směr. Atomy mohou obecně kmitat v libovolném směru pod pravým úhlem ke směru paprsku, ale když kmitají ve směru přímo k nám nebo od nás, kmity nevidíme. Proto, když se elektrické pole dopadajícího světla mění a kmitá v libovolném směru, je nepolarizované, ale světlo rozptýlené pod úhlem  $90^\circ$  k paprsku, kmitá jen v jednom směru! (viz obr. 32.3).



Obr. 32.3 Znárodnění vzniku polarizace záření rozptýleného pod pravým úhlem k původnímu svazku

Existuje látka nazvaná polaroid, jež má tu vlastnost, že když jí prochází světlo, projde jen ta část elektrického pole, jež má směr podél jedné dané osy. Můžeme ji použít k testování polarizace a opravdu zjistíme, že světlo rozptýlené roztokem thiosíranu sodného je silně polarizované.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 32.1 ■ Ukažte, že má-li pohybová rovnice nabitého oscilátoru tvar

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^2 m} \cdot \frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{F(t)}{m},$$

pak člen obsahující třetí derivaci a odpovídající tzv. radiační síle tření správně popisuje rychlost ztráty energie zářením (radiační odpor) pro libovolnou frekvenci. Nechť  $F(t) = A \cos \omega t$ . Najděte práci, kterou vykonává radiační síla tření.

- 32.2 ■ Svazek světla prochází oblastí, obsahující  $N$  rozptylových center v jednotce objemu. Srážkový průřez rozptylu na každém z nich je roven  $\sigma$ . Ukažte, že intenzita světla závisí na prošlé vzdálenosti  $x$  vztahem  $I = I_0 e^{-N\sigma x}$ .

- 32.3 ■ Použijte výraz pro srážkový průřez  $\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$

a vzorec pro index lomu plynu a ukažte, že veličina  $N\sigma$  může být zapsána ve tvaru

$$N\sigma = \frac{2}{3\pi} \frac{(n-1)^2}{N} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4.$$

(Tímto způsobem byla poprvé vypočítána Avogadrova konstanta z pokusů s rozptýleným světlem.)

- 32.4 ■ Jaké množství modrého světla ( $\lambda = 450$  nm) vyzařovaného Sluncem prochází atmosférou a) je-li Slunce v zenitu, b) je-li Slunce  $10^\circ$  nad obzorem?

- 32.5 ■ Když byly objeveny nové paprsky (rentgenové paprsky neboli paprsky X, s tehdy ještě neznámými a udivujícími vlastnostmi), byla vyslovena domněnka, že jsou to, podobně jako světlo, příčné elektromagnetické vlny. Pak bylo zpozorováno, že se tyto paprsky rozptylují na elektronech v látce. Jak by bylo možné dokázat, že jsou to skutečně příčné vlny? Lze rentgenové paprsky polarizovat?

- 32.6 ■ Vnitřní sluneční koróna (nazývaná  $K$  koróna) je tvořena slunečním světlem rozptýleným na volných elektronech. Zdánlivý jas této  $K$  koróny ve vzdálenosti jednoho slunečního poloměru od okraje slunečního disku představuje  $10^{-8}$  jasu slunečního (na jednotku plochy). Určete počet volných elektronů v  $1 \text{ cm}^3$  v prostoru v blízkosti Slunce.

- 32.7 ■ Ukažte, že veličina  $(\epsilon_0 c)^{-1}$  má rozměr odporu a odhadněte jeho číselnou hodnotu.

- 32.8 ■ Mezihvězdný prostor je zaplněn oblaky tvořenými nepatrnými zrnky prachu skládajících se z uhlíku, ledu a velmi malého množství jiných prvků. Jaká musí být nejmenší hmotnost takových zrněk připadajících na jednotku plochy (v  $\text{g cm}^{-2}$ ), aby zhoršila viditelnost námi pozorovaných hvězd řekněme 100krát (o pět hvězdných veličin). Nezapomeňte, že světlo se na zrnkách prachu může nejen rozptylovat, ale může být jimi i pohlcováno.

- 32.9 ■ Krátký přímý úsek drátu rozptyluje elektromagnetické vlny vyzařované radiolokátorem. Elektrické pole dopadající vlny interaguje s pohybujícími se elektrony v drátu a nastává rozptyl. Je-li délka drátu mnohem menší než je vlnová délka elektromagnetických vln, můžeme předpokládat, že střední posunutí elektronů podél osy drátu je úměrné složce intenzity elektrického pole  $E_{\parallel}$  vlny rovnoběžné s drátem. Je-li v drátu  $N$  elektronů a označíme-li jejich střední posunutí  $d$ , platí  $d = \chi E_{\parallel}$ . Máme zjistit, v závislosti na  $\chi$  a  $N$ , a) čemu je roven srážkový průřez rozptylu drátu, b) jak závisí srážkový průřez rozptylu na orientaci drátu.

# 33

# Polarizace

## 33.1 ELEKTRICKÝ VEKTOR SVĚTLA

## 33.2 POLARIZACE ROZPTÝLENÉHO SVĚTLA

## 33.3 DVOJLOM

## 33.4 POLARIZÁTORY

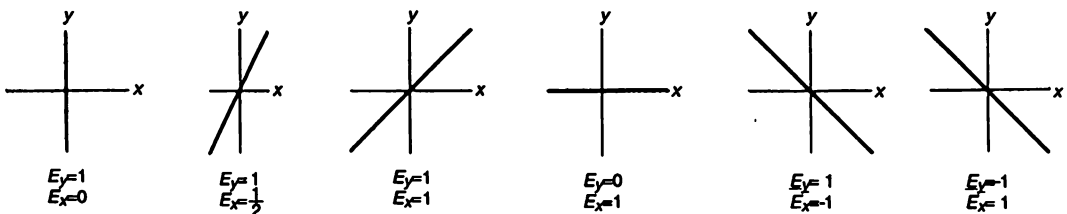
## 33.5 OPTICKÁ AKTIVITA

## 33.6 INTENZITA ODRAŽENÉHO SVĚTLA

## 33.7 ANOMÁLNÍ LOM SVĚTLA

### 33.1 ELEKTRICKÝ VEKTOR SVĚTLA

V této kapitole se budeme zabývat jevy, jež souvisí s tím, že intenzita elektrického pole popisujícího světlo je vektor. V předcházejících kapitolách jsme se nezajímali o směr oscilací intenzity elektrického pole; pouze jsme poznamenali, že vektor intenzity elektrického pole leží v rovině kolmé ke směru šíření světla. Konkrétní směr, který v této rovině má, nás už nezajímá. Nyní si probereme jevy, jejichž hlavním rysem je právě konkrétní směr oscilací elektrického pole.



Obr. 33.1 Skládání kmitů ve směru os  $x$  a  $y$  ve fázi

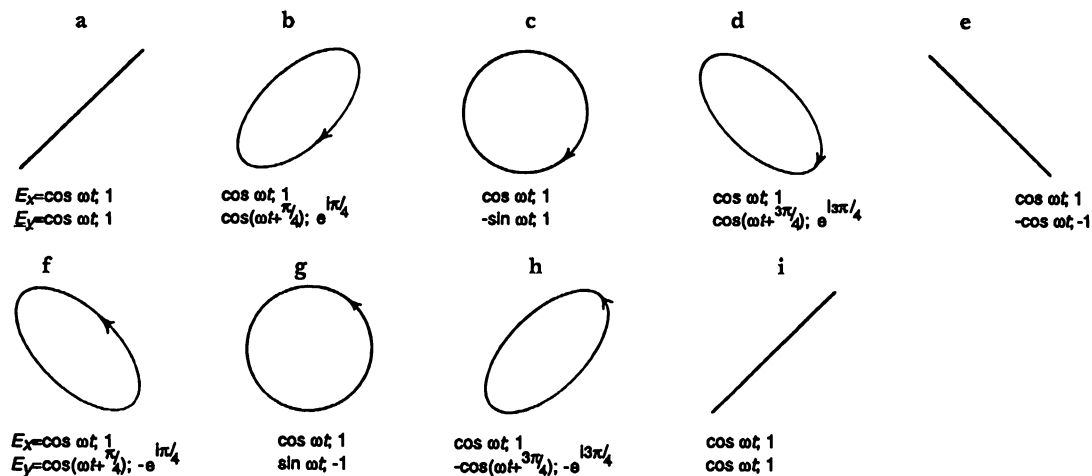
V ideálním monochromatickém světle musí elektrické pole oscilovat s přesnou frekvencí, ale protože složka  $x$  a složka  $y$  oscilují nezávisle, musíme se podívat, co vznikne skládáním dvou nezávislých vzájemně kolmých oscilací. Jaké pole vznikne, kmitají-li složka  $x$  i  $y$  se stejnou frekvencí? Probíhá-li kmitání ve směru osy  $x$  a k němu se přidá další kmitavý pohyb se stejnou fází ve směru osy  $y$ , budou výsledné kmity probíhat v novém směru v rovině  $xy$ . Na obr. 33.1 jsou

## ELEKTRICKÝ VEKTOR SVĚTLA

znázorněny superpozice pro různé amplitudy kmitů  $x$  a  $y$ . Výsledky znázorněné na *obr. 33.1* nejsou jediné možné. Ve všech těchto případech jsme předpokládali, že kmity  $x$  a  $y$  jsou ve fázi, ale nemusí tomu tak být. Může se však stát, že kmity  $x$  a  $y$  nejsou ve fázi.

Nejsou-li kmity  $x$  a  $y$  ve fázi, opisuje konec vektoru intenzity elektrického pole elipsu. Lze to znázornit známým způsobem. Zavěsíme-li kuličku na dlouhé vlákno tak, že se může volně kývat v horizontální rovině, bude vykonávat sinusoidální oscilace. Když umístíme počátek souřadnic  $x$  a  $y$  v klidové poloze kuličky, může kulička kmitat ve směru  $x$  nebo ve směru  $y$  se stejnou frekvencí kyvadla. Výběrem vhodné počáteční polohy a rychlosti můžeme docílit toho, že kulička kmitá buď podél osy  $x$  nebo podél osy  $y$  nebo podél libovolné přímky v rovině  $xy$  procházející počátkem. Tyto pohyby kuličky jsou analogické s oscilacemi vektoru intenzity elektrického pole znázorněnými na *obr. 33.1*. Protože kmity  $x$  a  $y$  nabývají současně svá maxima a minima, jsou obě oscilace v každém okamžiku ve fázi. Víme však, že nejobecnější pohyb kuličky je pohyb po elipse; to odpovídá oscilacím, kdy pohyby  $x$  a  $y$  nejsou ve fázi. Superpozice kmitů  $x$  a  $y$ , jež nejsou ve fázi, je znázorněna pro různé úhly mezi fázemi těchto kmitů na *obr. 33.2*. Obecný výsledek je takový, že vektor intenzity elektrického pole opisuje elipsu. Pohyb po přímce je zvláštním případem pohybu po elipse, jenž odpovídá nulovému fázovému rozdlu (nebo celočíselnému násobku  $\pi$ ). Pohyb po kružnici odpovídá stejným amplitudám s fázovým rozdlsem  $90^\circ$  (nebo lichým celočíselným násobkům  $\pi/2$ ).

Na *obr. 33.2* jsme označili vektory intenzity elektrického pole ve směrech  $x$  a  $y$  komplexními čísly, jež jsou vhodným způsobem pro vyjádření fázového rozdlu. Nezaměňujme přitom v tomto zápisu reálnou a imaginární složku komplexního elektrického vektoru se složkami pole  $x$  a  $y$ . Složky  $x$  a  $y$  znázorněné na *obr. 33.1* a *obr. 33.2* jsou skutečná elektrická pole, která můžeme měřit. Reálná a imaginární složka komplexního vektoru intenzity elektrického pole jsou pouze vhodným matematickým vyjádřením a nemají fyzikální význam.



Obr. 33.2 Skládání kmitů ve směru os  $x$  a  $y$  se stejnými amplitudami, ale s různými relativními fázemi. Složky  $E_x$  a  $E_y$  jsou vyjádřeny v reálném i komplexním tvaru

Nyní trochu terminologie. Říkáme, že světlo je *lineárně polarizované* (někdy též rovinně polarizované), osciluje-li vektor intenzity elektrického pole podél přímky. Obrázek 33.1 znázorňuje lineární polarizaci. Pohybuje-li se konec vektoru intenzity elektrického pole po elipse, je



světlo *elipticky polarizované*. Pohybuje-li se konec vektoru intenzity elektrického pole po kružnici, máme *kruhovou polarizaci*. Letí-li světlo přímo proti nám a konec vektoru elektrického pole se otáčí proti směru hodinových ručiček, jde o pravotočivou polarizaci. Obrázek 33.2g znázorňuje pravotočivou kruhovou polarizaci a obrázek 33.2c znázorňuje levotočivou kruhovou polarizaci. V obou případech světlo vychází kolmo ven z papíru. Naše konvence označování levotočivé a pravotočivé kruhové polarizace je konzistentní s označováním, které se dnes používá ve fyzice pro všechny další částice, jež projevují polarizaci (například elektrony). V některých knihách o optice se však používá opačná konvence, takže je třeba jisté opatrnosti.

Uvažovali jsme světlo polarizované lineárně, kruhově a elipticky, čímž jsme vyčerpali vše kromě případu *nepolarizovaného světla*. Jak může být světlo nepolarizované, když víme, že musí kmitat po některé elipse? Není-li světlo dokonale monochromatické nebo když poměr fází  $x$  a  $y$  není dokonale ustálený, takže vektor intenzity elektrického pole zpočátku kmitá v jednom směru a pak v druhém, tehdy se polarizace neustále mění. Vzpomeňme si, že jeden atom vyzařuje po dobu  $10^{-8}$  sekundy, a vyzařuje-li jeden atom světlo s určitou polarizací a pak další atom vyzařuje zase s jinou polarizací, polarizace se bude měnit každých  $10^{-8}$  sekundy. Mění-li se polarizace rychleji, než jsme schopni ji detekovat, nazýváme světlo nepolarizovaným, neboť všechny jevy polarizace se v průměru ruší. U nepolarizovaného světla se žádný polarizační interferenční jev neprojevuje. Jak je však vidět z definice, je světlo nepolarizované jen tehdy, když my nejsme schopni zjistit, zda je polarizované nebo ne.

### 33.2 POLARIZACE ROZPTÝLENÉHO SVĚTLA

První příklad jevu polarizace, který jsme uvedli, je rozptyl světla. Představme si svazek světla, například slunečního, dopadající na vrstvu vzduchu. Elektrické pole způsobí oscilace nábojů ve vzduchu a jejich pohyb vyvolá vyzařování světla s největší intenzitou v rovině kolmé ke směru oscilací nábojů. Světelný paprsek je nepolarizovaný, takže směr polarizace se neustále mění a také se neustále mění směr oscilací nábojů ve vzduchu. Všimněme-li si světla rozptýleného pod úhlem  $90^\circ$ , vysílají kmitající náboje světlo k pozorovateli pouze tehdy, jsou-li kmitky kolmé ke směru, jímž se dívá pozorovatel a tehdy bude světlo polarizované podél směru kmitů. Takže rozptyl je jedním z příkladů, jak lze získat polarizaci.

### 33.3 DVOJLOM

Dalším zajímavým jevem souvisejícím s polarizací je fakt, že existují látky, jež mají jiný index lomu pro světlo lineárně polarizované v jednom směru a jiný pro světlo lineárně polarizované v druhém směru. Představme si, že bychom měli látku skládající se z dlouhých, nesférických molekul, jejichž podélná osa by byla značně delší než příčná, a jež by byly v látce uloženy rovnoběžně. Co se stane, prochází-li oscilující elektrické pole takovou látkou? Předpokládejme, že vzhledem ke struktuře molekul se elektrony, které jsou v látce, rozkmitají pod vlivem elektrického pole snáze ve směru podélné osy molekul než ve směru příčném. Pak můžeme očekávat rozdílné chování látky vůči světlu polarizovanému podél směru molekul a světlu polarizovanému příčně. Nazvěme směr podélné osy molekul *optickou osou*. Pro světlo polarizované ve směru optické osy je jiný index lomu než pro světlo polarizované pod pravým úhlem k optické ose. Taková látka se nazývá *dvojlomnou*, tj. má dva indexy lomu, závislé na směru polarizace uvnitř látky. Jaká látka může být dvojlomná? V dvojlomné látce musí být nějakým způsobem seřazeny

nesymetrické molekuly. Krystal, který má krychlovou symetrii, určitě nemůže být dvojlomný, ale dlouhé krystaly v podobě jehlic nepochybně obsahují nesymetrické molekuly a lze u nich pozorovat výrazný dvojlom.

Podívejme se, co můžeme očekávat, prosvítíme-li desku z dvojlomné látky polarizovaným světlem. Je-li světlo polarizováno podél optické osy, projde deskou určitou rychlostí; je-li polarizováno kolmo, přenáší se jinou rychlostí. Zajímavá situace nastane, je-li světlo polarizováno pod úhlem  $45^\circ$  k optické ose. Před chvílí jsme si řekli, že polarizace pod úhlem  $45^\circ$  znamená superpozici polarizací  $x$  a  $y$  se stejnou amplitudou a fází, jak je na *obr. 33.2a*. Protože polarizace  $x$  a  $y$  se v látce šíří různou rychlostí, jejich fáze se při průchodu látkou mění nestejně. Takže, i když jsou oscilace  $x$  a  $y$  na začátku ve fázi, v látce je fázový rozdíl mezi nimi úměrný tloušťce vrstvy. S postupem světla látkou se mění jeho polarizace, jak je znázorněno na sérii obrázků (*obr. 33.2*). Je-li tloušťka desky taková, že mezi polarizacemi  $x$  a  $y$  vznikne fázový rozdíl  $90^\circ$  jako na *obr. 33.2c*, vyjde světlo jako kruhově polarizované. Taková destička se nazývá čtvrtvlnová, protože posune polarizace  $x$  a  $y$  fázově o čtvrtinu periody. Projde-li lineárně polarizované světlo čtvrtvlnovými destičkami, vyjde opět jako lineárně polarizované, ale pod pravým úhlem k původnímu směru, jak je vidět z *obr. 33.2e*.

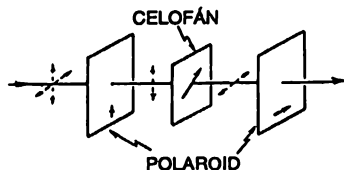
Tento jev lze snadno znázornit kouskem celofánu. Celofán se skládá z dlouhých vláknitých molekul a není izotropní, neboť vlákna leží většinou v jednom směru. K demonstraci dvojlomu potřebujeme svazek lineárně polarizovaného světla; můžeme ho získat tak, že necháme procházet nepolarizované světlo vrstvou polaroidu. Polaroid (podrobně si ho probereme později) má tu užitečnou vlastnost, že propouští světlo lineárně polarizované podél osy polaroidu, zatímco světlo polarizované ve směru kolmém na osu polaroidu silně absorbuje. Propustíme-li polaroidem nepolarizované světlo, projde jím pouze ta část nepolarizovaného svazku, která osciluje rovnoběžně s osou polaroidu, takže propuštěný svazek je lineárně polarizován. Tato vlastnost polaroidu je vhodná i k detekci směru polarizace lineárně polarizovaného svazku nebo také k určení toho, zda je svazek lineárně polarizován nebo ne. Světlo necháme prostě procházet polaroidem, přičemž jím otáčíme v rovině kolmé ke svazku. Je-li svazek lineárně polarizován, neprojde destičkou polaroidu, pokud je jeho osa kolmá ke směru polarizace. Otočíme-li polaroid o  $90^\circ$ , projde svazek jen málo oslaben. Nezávisí-li intenzita procházeného světla na orientaci polaroidu, znamená to, že svazek není lineárně polarizován.

K demonstraci dvojlomu celofánu použijeme dva polaroidy, jak je znázorněno na *obr. 33.3*. První polaroid nám dává lineárně polarizovaný svazek, jenž prochází celofánem a pak druhým polaroidem, který nám ukáže, jak celofán ovlivnil jím procházející polarizované světlo. Nastavíme-li osy obou polaroidů zpočátku vzájemně kolmo a celofán odstraníme, neprojde druhým polaroidem žádné světlo. Vložíme-li nyní mezi polaroidy celofán a začneme jím otáčet kolem osy svazku, zjistíme, že část světla druhým polaroidem prochází. Existují však dva navzájem kolmé směry orientace celofánu, kdy druhým polaroidem neprojde žádné světlo. Tyto směry, při nichž celofán neovlivní jím procházející lineárně polarizované světlo, musí být rovnoběžné a kolmé na optickou osu celofánu.

Předpokládáme, že při těchto dvou orientacích celofánu má světlo různou rychlost, ale směr jeho polarizace se nezmění. Po pootočení celofánu do střední polohy mezi těmito dvěma směry, jak je ukázáno na *obr. 33.3*, vidíme, že druhým polaroidem prochází jasné světlo.

Shodou okolností má celofán, jenž se běžně používá k balení, tloušťku, která je přibližně rovna polovině vlnové délky pro většinu barev bílého světla. Svírá-li dopadající lineárně polarizované světlo s optickou osou úhel  $45^\circ$ , otočí takový celofán jeho polarizaci o  $90^\circ$  a svazek vyletující z celofánu pak kmitá ve správném směru, aby mohl projít druhým polaroidem.

## POLARIZACE



Obr. 33.3 Experimentální demonstrace dvojlomu celofánu. Vektory intenzity elektrického pole světla jsou znázorněny čárkovaně. Směr propustnosti polaroidu a optická osa celofánu jsou naznačeny šipkami. Dopadající paprsek není polarizovaný.

Provedeme-li pokus s bílým světlem, bude mít celofán správnou půlvlnovou tloušťku jen pro některou složku bílého světla a vyletující svazek bude mít barvu této složky. Barva světla bude záviset na tloušťce celofánu, jíž světlo prošlo. Tuto tloušťku můžeme snadno měnit jeho nakláněním, takže světlo celofánem prochází šikmo, a tedy podél delší dráhy. S náklonem celofánu se mění barva procházejícího světla. Pomocí celofánu různých tloušťek lze zkonstruovat filtry, které propouštějí různé barvy. Tyto filtry mají zajímavou vlastnost, že jsou-li osy polaroidů na sebe kolmé, propouštějí jednu barvu a jsou-li navzájem rovnoběžné, propouštějí doplňkovou barvu.

Také další využití látek s uspořádanými molekulami má praktický význam. Některé plastické hmoty se skládají z velmi dlouhých, komplikovaných a navzájem propletených molekul. Nechá-li se plastická hmota opatrně ztvrdnout, uspořádají se všechny molekuly tak, že v jednom i druhém směru je jich stejný počet a plastická hmota není příliš dvojlomná. Při tvrdnutí působí na hmotu obvykle tlaky a mechanická napětí, takže materiál není zcela homogenní. Působíme-li na takovou plastickou hmotu mechanickým napětím, jako bychom tahali celou spleť vláken a ve směru působícího napětí bude uspořádáno více vláken než v jiných směrech. Proto, když se na určité plastické látky působí tlakem, stávají se dvojlomnými, jak můžeme zjistit, když je prosvítíme polarizovaným světlem. Při pozorování světla polaroidem je vidět soustava tmavých a světlých proužků, (barevných, když jsme použili bílé světlo). Při změně mechanického napětí se soustava proužků mění a z jejich tvaru a hustoty lze určit, jak je vzorek namáhán. V inženýrské praxi se tento jev používá k určování namáhání součástí složitých tvarů, jež by bylo možné těžko vypočítat.

Jiná zajímavá možnost jak vyvolat dvojlom je použití tekutých látek. Mějme tekutinu složenou z dlouhých asymetrických molekul, které mají na koncích kladný nebo záporný náboj, takže se chovají jako elektrické dipóly. Za normálních okolností jsou molekuly v důsledku srážek orientovány náhodně a se stejným počtem molekul natočených tím nebo jiným směrem. Přiložíme-li elektrické pole, budou mít molekuly tendenci se uspořádat a v tom okamžiku se tekutina stane dvojlomnou. Se dvěma polaroidy a s průhlednou nádobkou obsahující takovou polarizovanou tekutinu můžeme sestavit zařízení, které bude propouštět světlo jen tehdy, bude-li zapnuto elektrické pole. Získáme tak elektrickou uzavěrku světla, jíž se také říká *Kerrův článek*. Je, že elektrické pole může v určitých tekutinách vyvolat dvojlom, se nazývá *Kerrův jev*.

### 33.4 POLARIZÁTORY

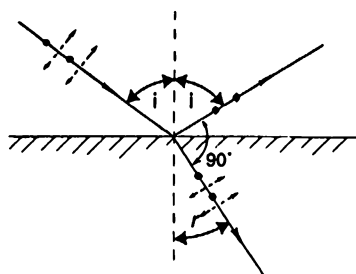
Zatím jsme uvažovali látky, jež mají rozdílné indexy lomu pro světlo polarizované v různých směrech. Velký praktický význam mají také krystaly a jiné látky, jež mají nejen rozdílné indexy lomu pro světlo polarizované v různých směrech, ale i koeficienty absorpce. Na základě stejných důvodů, které jsme uvedli u dvojlomu, je pochopitelné, že v anizotropní látce se i absorpce může měnit podle směru, v němž jsou náboje nuceny kmitat. Dávno známým příkladem je turmalín a dalším je polaroid. Polaroid je tvořen tenkou vrstvou malých, rovnoběžně uložených krystalků

herapathitu (jodosulfátu chininu). Tyto krystaly absorbují světlo oscilující v jednom směru a téměř neabsorbují světlo oscilující v druhém směru.

Předpokládejme, že polaroid osvětlíme světlem lineárně polarizovaným pod úhlem  $\vartheta$  k propustnému směru. Jaká bude intenzita světla, které jde polaroidem? Dopadající světlo lze rozložit na složku kolmou k propustnému směru, úměrnou  $\sin \vartheta$  a na složku rovnoběžnou s propustným směrem, úměrnou  $\cos \vartheta$ . Polaroidem projde jen složka amplitudy  $\cos \vartheta$ , složka  $\sin \vartheta$  se absorbuje. Amplituda světla, jež prošlo polaroidem, je menší než amplituda dopadajícího světla o faktor  $\cos \vartheta$ . Energie, tj. intenzita světla, je úměrná druhé mocnině  $\cos \vartheta$ . Tedy intenzita propuštěného světla, je-li dopadající světlo polarizováno pod úhlem  $\vartheta$ , je úměrná  $\cos^2 \vartheta$ . Intenzita absorbovaného světla je, samozřejmě úměrná  $\sin^2 \vartheta$ .

Zajímavý paradox nastane za takovéto situace: Víme, že dvěma zkříženými polaroidy, jejichž osy svírají pravý úhel, svazek světla neprochází. Vsuneme-li však *mezi* oba polaroidy destičku třetího polaroidu s osou propustnosti pod úhlem  $45^\circ$  k osám zkřížených polaroidů, nějaké světlo projde. Víme, že polaroid světlo nevytváří, ale absorbuje ho. Přesto přidání třetího polaroidu pod úhlem  $45^\circ$  umožní nějakému světlu proletět. Analýzu tohoto jevu ponecháme čtenáři jako cvičení.

Jeden z nejzajímavějších příkladů polarizace nenastává u komplikovaných krystalů nebo složitých látek, ale při jednom z nejnámějších a nejjednodušších jevů – při odrazu světla od povrchu. Věřte nebo ne, světlo odražené od povrchu skla může být polarizované a lze to velmi snadno fyzikálně vysvětlit. Brewster experimentálně zjistil, že světlo odražené od povrchu je úplně polarizované, svírají-li odražený a lomený paprsek v látce pravý úhel. Tato situace je znázorněna na obr. 33.4. Je-li dopadající paprsek polarizován v rovině dopadu, odraz vůbec nenastane. Paprsek se odrazí pouze tehdy, je-li dopadající paprsek polarizován kolmo k rovině dopadu. Důvod lze velmi snadno pochopit. V látce je světlo polarizováno příčně a víme, že jsou to právě pohyby nábojů, jež generují vnořující se paprsek, který nazýváme odraženým. Zdrojem tohoto odraženého světla není prostě odraz dopadajícího paprsku. Hlubší analýza tohoto jevu nám říká, že dopadající paprsek rozkmitá v látce náboje, které pak generují odražený paprsek. Z obr. 33.4 je jasné, že jen kmity kolmé na rovinu papíru mohou vyzařovat ve směru odrazu a proto odražený paprsek bude polarizován kolmo na rovinu dopadu. Je-li dopadající paprsek polarizován v rovině dopadu, žádné světlo se neodrazí.

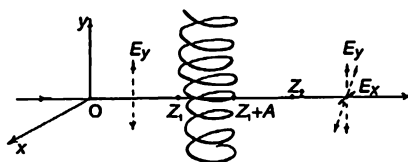


Obr. 33.4 Odraz lineárně polarizovaného světla pod Brewsterovým úhlem. Směr polarizace je naznačen pomocí čárkovaných šipek. Kroužky znázorňují polarizaci kolmou na směr papíru

Tento jev lze jasně ukázat na odrazu lineárně polarizovaného světla dopadajícího na kousek plochého skla. Nastavením skla pod různými úhly dopadu pro polarizovaný paprsek je možné zjistit náhlý pokles intenzity odraženého světla právě při dopadu pod *Brewsterovým úhlem*. Tento pokles je vidět jen tehdy, leží-li rovina polarizace v rovině dopadu. Je-li kolmá k rovině dopadu, pozorujeme obvyklou intenzitu odraženého světla ve všech směrech.

### 33.5 OPTICKÁ AKTIVITA

Další velmi zajímavý polarizační jev můžeme pozorovat v látkách složených z molekul bez zrcadlové symetrie: u molekul ve tvaru vývrtky nebo ve tvaru rukavice či jakéhokoliv jiného tvaru, který se v zrcadle zobrazuje tak, jako když levá rukavice přechází v pravou. Předpokládejme, že všechny molekuly v látce jsou stejného typu, tj. žádná není zrcadlovým obrazem druhé. U takové látky se může projevovat zvláštní jev, nazvaný *optická aktivita*, kdy lineárně polarizované světlo, které touto látkou prochází, stáčí směr polarizace kolem osy paprsku.



Obr. 33.5 Tvar molekuly, která nemá zrcadlovou symetrii. Na molekulu dopadá světelný paprsek lineárně polarizovaný ve směru osy  $y$ .

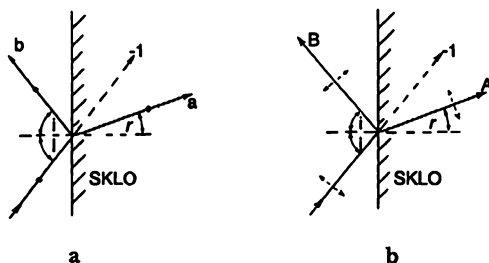
K pochopení optické aktivity jsou potřebné určité výpočty, ale i bez nich můžeme kvalitativně ukázat, jak tento jev vzniká. Vezmeme asymetrickou molekulu spirálovitého tvaru, jaká je znázorněna na obr. 33.5. K tomu, aby se u látky projevila optická aktivita, není nutné, aby její molekuly měly tvar vývrtky, ale tento jednoduchý tvar si vezmeme jako typický příklad pro molekuly bez zrcadlové symetrie. Dopadá-li na molekulu světlo lineárně polarizované ve směru osy  $y$ , jeho elektrické pole rozkmitá náboje podél závitů spirály, čímž vytvoří proud ve směru osy  $y$  a náboje budou vyzařovat elektrické pole  $E_y$ , polarizované v ose  $y$ . Jsou-li elektrony při kmitání nuceny se pohybovat podél spirály, musí se pohybovat také ve směru osy  $x$ . Proud procházející podél spirály vtéká v bodě  $z = z_1$  do roviny papíru a v bodě  $z = z_1 + A$  ven z papíru ( $A$  je průměr naší spirálové molekuly). Lze předpokládat, že proud ve směru osy  $x$  nevyvolá žádné výsledné záření, neboť na protilehlých stranách spirály teče opačným směrem. Vezmeme-li však složku pole  $x$  v bodě  $z = z_2$ , vidíme, že pole vyzářené proudem z bodu  $z = z_1 + A$  a pole z bodu  $z = z_1$  se dostanou do bodu  $z_2$  s časovým rozdílem  $A/c$ , takže jejich fázový posun je  $\pi + \omega A/c$ . Protože tento fázový rozdíl není roven přesně  $\pi$ , tato dvě pole se úplně neruší a zůstane nám malá složka  $x$  elektrického pole vytvořeného pohybem elektronů v molekule, zatímco budí elektrické pole mělo jen složku  $y$ . Součet této malé složky  $x$  a velké složky  $y$  vytváří výsledné pole, jež je mírně skloněno vzhledem k ose  $y$ , tj. k původnímu směru polarizace. Jak světlo postupuje látkou, směr jeho polarizace se otáčí kolem osy paprsku. Pomocí několika dalších příkladů a analýzou proudů indukovaných dopadajícím elektrickým polem lze ukázat, že existence optické aktivity a znaménko rotace jsou nezávislé na orientaci molekul.

Běžnou látkou, jež se vyznačuje optickou aktivitou, je glukosa. Lze to snadno ukázat pomocí polaroidové destičky, která vytvoří lineárně polarizovaný paprsek, průhledné nádoby obsahující glukosu a druhé destičky, jíž se zjistí pootočení směru polarizace při průchodu světla glukosou.

### 33.6 INTENZITA ODRAŽENÉHO SVĚTLA

Nyní se podíváme na koeficient odrazu jako na funkci úhlu. Obrázek 33.6a. znázorňuje dopad světelného paprsku na povrch skla, kde se částečně odráží a částečně láme směrem do skla. Necht' je dopadající paprsek jednotkové amplitudy lineárně polarizovaný kolmo na rovinu papíru. Amplitudu odraženého světla označíme  $b$  a amplitudu lomeného paprsku  $a$ . Samozřejmě, že odražený i lomený paprsek budou lineárně polarizované a vektory intenzit elektrického pole dopadající, budou odražené a lomené vlny navzájem rovnoběžné. Obrázek 33.6b znázorňuje stejnou situaci, ale teď předpokládáme, že dopadající vlna jednotkové amplitudy je polarizována v rovině papíru. Amplitudy odražené a lomené vlny si nyní označme jako  $A$  a  $B$ .

Chceme vypočítat, jak silný je odraz v těchto dvou případech znázorněných na obr. 33.6a a na obr. 33.6b. Už víme, že když je úhel mezi odraženým a lomeným paprskem roven pravému úhlu, na obr. 33.6b nebude odražený paprsek, ale zkusme, zda by se nám nepodařilo získat i kvantitativní řešení problému – exaktní vztah pro  $B$  a  $b$  jako funkce úhlu dopadu  $i$ .



Obr. 33.6 Odraz a lom vlny s jednotkovou amplitudou dopadající na povrch skla.

- Dopadající vlna je lineárně polarizovaná kolmo na rovinu papíru.
- Dopadající vlna je lineárně polarizovaná ve směru znázorněném čárkovaným vektorem intenzity elektrického pole.

Princip, který musíme pochopit, je takový: Proudů vyvolané ve skle vytvářejí dvě vlny. První je odražená vlna. Navíc víme, že kdyby ve skle nebyly indukované proudy, dopadající vlna by pokračovala přímočaře do skla. Pamatujeme, že výsledné pole je vytvořeno všemi zdroji na světě. Zdroj dopadajícího světla vytváří pole jednotkové amplitudy, jež by se pohybovalo ve skle podél přerušované čáry na obrázcích. Takové pole nepozorujeme, a proto proudy indukované ve skle musí vytvářet pole s amplitudou  $-1$ , jež postupuje podél přerušované čáry. Na základě toho vypočítáme amplitudy odražených vln  $a$  a  $A$ .

Na obrázku 33.6a vidíme, že pole s amplitudou  $b$  vzniká pohybem nábojů ve skle, jež buď pole s amplitudou  $a$  uvnitř skla, a proto je  $b$  úměrné  $a$ . Protože naše dva obrázky jsou úplně stejné až na směr polarizace, mohli bychom předpokládat, že poměr  $B/A$  bude stejný jako poměr  $b/a$ . To neplatí úplně, neboť na obr. 33.6b nejsou směry všech polarizací navzájem rovnoběžné, jak to bylo na obr. 33.6a. Při vytváření  $B$  se uplatní jen složka  $A$ , která je kolmá k  $B$ ,  $A \cos(i + r)$ . Správný vztah úměrnosti je pak

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A \cos(i + r)}. \quad (33.1)$$

Nyní použijeme trik. Víme, že na obou obrázcích 33.6a i b musí elektrické pole ve skle vyvolávat oscilace nábojů, které generují pole s amplitudou  $-1$ , polarizované rovnoběžně s polarizací dopadajícího světla a šířící se podél směru přerušované čáry. Z části b našeho obrázku je zřejmé, že správnou polarizaci má jen ta složka A, která je kolmá na přerušovanou čáru, zatímco na obr. 33.6a se uplatní celá amplituda  $a$ , neboť polarizace vlny  $a$  je rovnoběžná s polarizací vlny s amplitudou  $-1$ . Proto můžeme napsat

$$\frac{A \cos(i - r)}{a} = \frac{-1}{-1}, \quad (33.2)$$

neboť každá z obou amplitud na levé straně rovnice (33.2) vytváří vlnu s amplitudou  $-1$ . Dělením rovnice (33.1) rovnicí (33.2) dostaneme výsledek

$$\frac{B}{b} = \frac{\cos(i + r)}{\cos(i - r)}, \quad (33.3)$$

kteřý si můžeme ověřit tím, co už víme. Položíme-li  $(i + r) = 90^\circ$ , dává rovnice (33.3)  $B = 0$ . To je podle Brewstera správně, takže zatím naše výsledky, aspoň na první pohled, nejsou špatně.

Pro dopadající vlny jsme předpokládali jednotkové amplitudy, takže koeficient odrazu pro vlny polarizované v rovině dopadu je  $|B|^2/1^2$  a koeficient odrazu pro vlny polarizované kolmo na rovinu dopadu je  $|b|^2/1^2$ . Poměr těchto dvou koeficientů je dán vztahem (33.3).

Nyní uděláme malý zázrak, neboť vypočítáme nejen poměr těchto koeficientů, ale dokonce každý koeficient  $|B|^2$  i  $|b|^2$  samostatně! Ze zákona zachování energie víme, že energie lomeného paprsku musí být rovna rozdílu energie dopadající vlny a energie odražené vlny: v jednom případě  $1 - |B|^2$  a v druhém  $1 - |b|^2$ . Navíc, poměr energií, které vniknou do skla na obr. 33.6b a na obr. 33.6a, je roven poměru druhých mocnin amplitud lomených paprsků, tj.  $|A|^2/|a|^2$ . Někdo se může zeptat, zda opravdu víme, jak se má vypočítat energie, která je ve skle, vždyť kromě energie elektrického pole je tam ještě energie pohybu atomů. Je však jasné, že všechny různé příspěvky k celkové energii budou úměrné druhé mocnině amplitudy elektrického pole, a proto můžeme psát

$$\frac{1 - |B|^2}{1 - |b|^2} = \frac{|A|^2}{|a|^2}. \quad (33.4)$$

Nyní použijeme rovnici (33.2), abychom z tohoto vztahu vyloučili  $A/a$  a B vyjádříme pomocí prostřednictvím rovnice (33.3):

$$\frac{1 - |b|^2 \frac{\cos^2(i + r)}{\cos^2(i - r)}}{1 - |b|^2} = \frac{1}{\cos^2(i - r)}. \quad (33.5)$$

Tato rovnice obsahuje jen jednu neznámou  $b$ . Řešením dostáváme

$$|b|^2 = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)}, \quad (33.6)$$

a pomocí (33.3) najdeme

$$|B|^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(i - r)}{\operatorname{tg}^2(i + r)}. \quad (33.7)$$

Našli jsme koeficient odrazu  $|b|^2$  pro dopadající vlnu polarizovanou kolmo na rovinu dopadu a také koeficient odrazu  $|B|^2$  pro dopadající vlnu polarizovanou v rovině dopadu!

Takovými argumenty lze dále ukázat, že koeficient  $b$  je reálný. K tomu je třeba uvážit případ, kdy světlo dopadá na povrch skla z obou stran současně. Toho lze sice obtížně dosáhnout experimentálně, ale je zajímavé to analyzovat teoreticky. Analýzou tohoto obecného případu můžeme dokázat, že  $b$  musí být reálné, a proto  $b = \pm \sin(i - r) / \sin(i + r)$ . Provedeme-li rozbor odrazu světla z obou stran velmi tenké destičky a vypočítáme množství odraženého světla, můžeme dokonce určit i znaménko. Víme, kolik světla by se mělo odrazit od tenké vrstvy, neboť víme, jaké proudy se generují a dokonce jsme odvodili, jaké pole je vytvářeno takovými proudy.

Pomocí těchto argumentů lze ukázat, že

$$b = -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}, \quad B = -\frac{\operatorname{tg}(i - r)}{\operatorname{tg}(i + r)}. \quad (33.8)$$

To jsou známé *Fresnelovy vztahy*. Vyjadřují koeficienty odrazu jako funkce úhlu dopadu a úhlu lomu.

V limitě, když se úhly  $i$  i  $r$  blíží k nule, tj. pro kolmý dopad, máme pro obě polarizace  $B^2 \approx b^2 \approx (i - r)^2 / (i + r)^2$ , protože jak siny, tak i tangenty jsou prakticky rovny svým argumentům. Víme však, že  $\sin i / \sin r = n$  a pro malé úhly  $i/r \approx n$ , takže lze snadno ukázat, že pro kolmý dopad platí

$$B^2 = b^2 = \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2}.$$

Zajímavé je například zjistit, kolik světla se odráží od povrchu vody při kolmém dopadu. Index lomu vody je  $n = 4/3$ , takže koeficient odrazu je  $1/7^2 \approx 2\%$ . Při kolmém dopadu se od povrchu vody odráží jen dvě procenta světla.

### 33.7 ANOMÁLNÍ LOM SVĚTLA

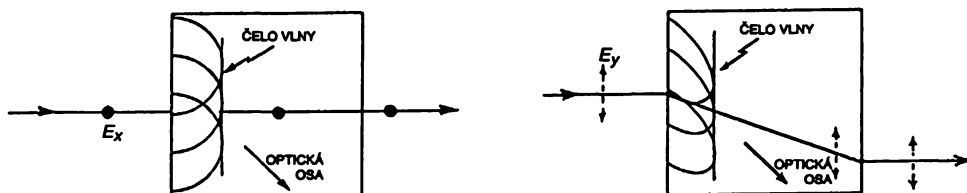
Poslední polarizační jev, jímž se budeme zabývat, byl ve skutečnosti objeven jako jeden z prvních – je to anomální lom. Námořníci, kteří navštívili Island, přivezli do Evropy krystaly islandského vápence ( $\text{CaCO}_3$ ), který měl zajímavou vlastnost, že vše, na co se člověk tímto krystalem podíval, viděl dvojmo, tj. jako dva obrazy. To mezi jiným zaujalo i Huygense a hrálo důležitou roli při objevu polarizace. Jak to obvykle bývá, jevy, které jsou objeveny jako první, lze nejobtížněji vysvětlit. Nejdříve je třeba důkladně pochopit fyzikální princip a až pak pečlivě vybrat ty jevy, u nichž se tento princip projevuje co nejjednodušeji.

Anomální lom je zvláštním případem dvojlomu, jímž jsme se již zabývali. Anomální lom vzniká tehdy, když optická osa, tj. dlouhá osa našich asymetrických molekul, není rovnoběžná s povrchem krystalu. Na obr. 33.7, jsou nakresleny dva kousky dvojlomného materiálu s vyznačenými optickými osami. Na obrázku vlevo je dopadající paprsek lineárně polarizovaný ve směru kolmém na optickou osu materiálu. Když tento paprsek dopadne kolmo na povrch materiálu,



každý bod povrchu se stane zdrojem vlnění, jež postupuje krystalem rychlostí  $v_{\perp}$ , tj. rychlostí světla v krystalu, když je polarizace kolmá na optickou osu. Čelo vlny, které je obálkou těchto všech malých kulových vln, se pohybuje přímo krystalem až vyletí na druhé straně ven. To je normální chování, jaké se dalo očekávat a takový paprsek se nazývá *řádny paprsek*.

Na obrázku vpravo je směr lineární polarizace světla otočen o  $90^{\circ}$ , takže optická osa krystalu leží v rovině polarizace. Podíváme-li se nyní na malé vlny vznikající v libovolném místě povrchu krystalu, vidíme, že se nešíří jako kulové vlny. Světlo, které se šíří podél optické osy, má rychlost  $v_{\parallel}$ , neboť směr polarizace je kolmý na optickou osu krystalu, zatímco světlo, které se šíří kolmo na optickou osu krystalu, má rychlost  $v_{\perp}$ , protože jeho polarizace je rovnoběžná s optickou osou krystalu. V dvojlomném materiálu máme  $v_{\parallel} \neq v_{\perp}$  a na našem obrázku  $v_{\parallel} < v_{\perp}$ . Podrobnější analýzou lze ukázat, že vlny se šíří po povrchu elipsoidu, jehož hlavní osa má směr optické osy krystalu. Obálka všech těchto elipsoidálních vln tvoří vlnu postupující krystalem ve směru vyznačeném na obrázku. Na zadní stěně krystalu nastane lom paprsku stejně jako na přední stěně, takže světlo vyletí rovnoběžně s dopadajícím paprskem, jen trochu posunuté. Tento paprsek se neláme podle Snellova zákona lomu, ale šíří se jakýmsi zvláštním směrem, proto se nazývá *mimořádný paprsek*.



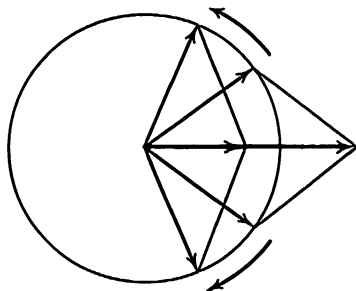
Obr. 33.7 Obrázek vlevo znázorňuje dráhu řádného paprsku při průchodu dvojlomným krystalem. Mimořádný paprsek je znázorněn na obrázku vpravo. Optická osa leží v rovině papíru.

Když na krystal vykazující anomální lom dopadne nepolarizovaný paprsek, rozdělí se na řádný paprsek, který prostupuje krystalem normálně, přímo, a na mimořádný paprsek, který se při průchodu krystalem posune. Tyto dva vystupující paprsky jsou lineárně polarizované pod pravým úhlem jeden k druhému. Lze to ukázat pomocí polaroidu, jímž můžeme určit polarizace vycházejících paprsků. Správnost naší interpretace tohoto jevu můžeme dokázat i tak, že krystal osvětlíme lineárně polarizovaným světlem. Vhodnou orientací směru polarizace dopadajícího paprsku můžeme dosáhnout toho, že světlo projde krystalem bez rozdělení, a to buď přímo nebo s posunutím.

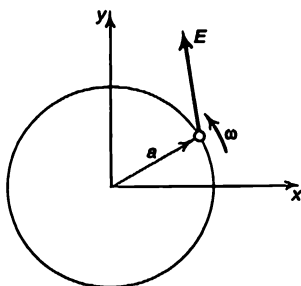
Na obrázcích 33.1 a 33.2 jsme znázornili všechny různé případy polarizace jako superpozici dvou zvláštních případů polarizace ve směru osy  $x$  a osy  $y$  při různých amplitudách a fázích. Mohli bychom použít i jiné páry polarizovaných paprsků. Stejně dobře by nám posloužily polarizace podél libovolných dvou kolmých os  $x'$  a  $y'$  pootočených vzhledem k  $x$  a  $y$ . (Například libovolné polarizace lze dosáhnout superpozicí případu a) a případu e) na obr. 33.2). Je zajímavé, že tuto myšlenku lze rozšířit ještě i na další případy. Například libovolné lineární polarizace lze dosáhnout superpozicí vhodné velikosti pravotočivé a levotočivé kruhové polarizace při vhodných fázích (případy c) a g) na obr. 33.2), neboť součtem dvou vektorů rotujících v opačných směrech dostaneme vektor oscilující po přímce (obr. 33.8). Když se fáze jednoho vzhledem k druhému o něco posune, změní se směr přímky. Takže všechny obrázky na obr. 33.1 můžeme označit jako „superpozici pravotočivé a levotočivé kruhově polarizovaného světla téže intenzity při různých vzájemných fázích“. Když se levotočivě polarizované světlo ve fázi opozdí

## ANOMÁLNÍ LOM SVĚTLA

za světlem polarizovaným pravotočivě, směr lineární polarizace se změní. Proto jsou opticky aktivní látky vlastně dvojlomné. Jejich vlastnosti lze popsat různými indexy lomu pro pravotočivě a levotočivě kruhově polarizované světlo. Superpozicí pravotočivě a levotočivě kruhově polarizovaného světla různé intenzity vzniká elipticky polarizované světlo.



Obr. 33.8 Součet dvou vektorů se stejnou amplitudou rotujících v opačných směrech dává vektor oscilující podél pevné přímky.



Obr. 33.9 Pohyb náboje po kružnici vyvolaný kruhově polarizovaným světlem.

Kruhově polarizované světlo má další zajímavou vlastnost – přenáší moment hybnosti ve směru šíření světla. Pro ilustraci si představme, že takové světlo dopadne na atom, který může kmitat jako harmonický oscilátor v libovolném směru v rovině  $xy$ . Pak bude výchylka elektronu ve směru osy  $x$  způsobená složkou  $E_x$  intenzity pole, zatímco výchylka  $y$  bude způsobena složkou pole  $E_y$ , ale s fázovým zpožděním o  $90^\circ$ . Točivé elektrické pole světla způsobí, že se elektron bude pohybovat po kružnici s úhlovou rychlostí  $\omega$  (obr. 33.9). Směr posunutí elektronu  $a$  a směr síly  $q_e E$  nemusí být stejné, závisí to na útlumových charakteristikách oscilátoru, ale oba směry rotují současně.  $E$  může mít složku kolmou k  $a$ , takže se může projevit moment síly  $\tau$  a vykoná se práce. Práce vykonaná za sekundu je rovna  $\tau\omega$ . Po dobu periody  $T$  se absorbuje energie rovnající se  $\tau\omega T$ , zatímco  $\tau T$  je velikost momentu hybnosti předaného objemu látky, v němž se pohlcuje energie. Vidíme tedy, že pravotočivě kruhově polarizovaný světelný paprsek, který přenáší celkovou energii  $\mathcal{E}$  má moment hybnosti  $\mathcal{E}/\omega$  (jeho vektor směřuje ve směru šíření světla). Když se takový paprsek pohlcuje, předává přitom i moment hybnosti. Levotočivě kruhově polarizované světlo má moment hybnosti  $-\mathcal{E}/\omega$ .

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 33.1 ■ Dvě polaroidové destičky jsou umístěny tak, že jejich osy polarizace svírají pravý úhel. Mezi nimi leží třetí destička, jejíž osa polarizace svírá úhel  $\vartheta$  s osou první destičky. Jaká bude intenzita světla procházejícího takovou soustavou, jsou-li všechny polaroidy ideální, bezztrátové?
- 33.2 ■ Předpokládejme, že svazek lineárně polarizovaného světla intenzity  $I_0$  dopadá na polaroidovou destičku, jejíž osa je rovnoběžná se směrem polarizace, a přitom je intenzita procházejícího světla  $\alpha^2 I_0$ . Bude-li osa destičky kolmá ke směru polarizace, bude destičkou procházet jen  $\varepsilon^2 I_0$  část dopadajícího světla, kde  $\varepsilon \ll 1$ . (Kdyby byl polaroid ideální, měli bychom  $\alpha^2$  rovno jedné a  $\varepsilon^2$  rovno nule.) Nechť nepolarizované světlo intenzity  $I_0$  prochází soustavou dvou takových destiček, přičemž jejich osy svírají úhel  $\vartheta$ . Jaká bude intenzita prošlého světla. Odrazové jevy zanedbejte.
- 33.3 ■ Ukažte, že pro Brewsterův úhel  $\vartheta_B$  platí vztah  $\operatorname{tg} \vartheta_B = n$ .
- 33.4 ■ Odhadněte intenzitu a polarizaci záření vydávaného elektronem, jenž se pohybuje konstantní rychlostí po kruhové dráze, v bodech ležících a) na ose procházející středem kružnice, b) v rovině kružnice.
- 33.5 ■ Index lomu krystalického křemene pro světlo o vlnové délce 600 nm je roven  $n_o = 1,544$  pro řádný a  $n_e = 1,553$  pro mimořádný paprsek. V krystalu křemene vyříznutém rovnoběžně s krystalovou osou bude rozdíl rychlostí řádného a mimořádného paprsku největší, budou-li kolmé k rovině krystalu. Jaká musí být tloušťka krystalu, aby se fáze obou paprsků uvažovaného světla při jeho průchodu posunula o  $90^\circ$ ?
- 33.6 ■ Student prvního ročníku Caltechu na procházce s dívkou vidí Měsíc pod úhlem  $10^\circ$  nad obzorem a jeho zobrazení na klidné hladině jezera. S nostalgií vzpomíná na přednášky, kapitulu 33, a pokouší se vypočítat, jaký bude jas obrazu Měsíce ve srovnání s jasnem Měsíce na obloze. Přitom předpokládá, že měsíční světlo je nepolarizované (téměř) a zapomíná, že jeho přítelkyně pravděpodobně odejde.  
Jaký bude výsledek? Ukažte, že relativní intenzita tečných paprsků (odražených pod úhlem blízkým k pravému) se blíží 100 % .
- 33.7 ■ Světlo dopadá kolmo na jednu ze stěn krystalu diamantu ( $n = 2,40$ ). a) Jaká část dopadajícího světla se odráží? b) Čemu je roven Brewsterův úhel pro diamant?
- 33.8 ■ Vraťte se k podmínkám úlohy 33.5 a předpokládejme, že indexy lomu křemene pro světlo o vlnové délce  $\lambda_1 = 410$  nm jsou rovny  $n_o = 1,557$  a  $n_e = 1,567$  a že krystal křemene tvoří čtvrtvlnovou destičku pro světlo o vlnové délce  $\lambda_2 = 600$  nm. Popište stav polarizace světla o vlnové délce  $\lambda_1$ , jež prošlo krystalem, jestli dopadající paprsky byly lineárně polarizovány.
- 33.9 ■ Dostali jste vyleštěnou destičku, například z černého obsidiánu. Máte změřit index lomu tohoto materiálu. Jak budete postupovat?

# Relativistické jevy a záření

---

## 34.1 POHYBUJÍCÍ SE ZDROJE

## 34.2 „ZDÁNĹIVÝ“ POHYB

## 34.3 SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ

## 34.4 KOSMICKÉ SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ

## 34.5 BRZDNÉ ZÁŘENÍ

## 34.6 DOPPLERŮV JEV

## 34.7 VLNOVÝ ČTYŘVEKTOR

## 34.8 ABERACE

## 34.9 HYBNOST SVĚTLA

### 34.1 POHYBUJÍCÍ SE ZDROJE

V této kapitole popíšeme několik různorodých jevů souvisejících se zářením, a tím uzavřeme klasickou teorii šíření světla. V naší analýze světla jsme se dostali dost daleko, až do pozoruhodných detailů. Jedinou významnou otázkou související s elektromagnetickým zářením, kterou jsme neprobali, je otázka, co se stane, když jsou rádiové vlny uzavřeny v krabici o rozměrech srovnatelných s vlnovou délkou a s odražejiícími stěnami, nebo když jsou přenášeny podél dlouhé trubice. K *dutinovým rezonátorům* a k *vlnovodům* se vrátíme ještě později. Nejdříve použijeme jiný fyzikální příklad, zvuk, a potom se vrátíme k tomuto tématu. S touto výjimkou představuje tato kapitola naše poslední úvahy o klasické teorii světla.

Všechny jevy, o nichž zde bude nyní řeč, spojuje to, že nějak souvisí s efekty spojenými s *pohybujícími se zdroji*. Dále už nepředpokládáme, že zdroj je lokalizován a že všechny jeho pohyby se odehrávají v okolí pevného bodu relativně malými rychlostmi.

Připomínáme základní zákon elektrodynamiky, který říká, že na velkých vzdálenostech od pohybujícího se náboje je intenzita elektrického pole dána vztahem

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{r}'_0}{dt^2}. \quad (34.1)$$

Elektrické pole je určeno druhou derivací podle jednotkového vektoru  $\mathbf{r}'_0$ , který směřuje ke zdánlivé poloze náboje. Tento jednotkový vektor nesměřuje k současné poloze náboje, ale spíše k poloze, kde by byl náboj, kdyby informace letěla od náboje k pozorovateli konečnou rychlostí  $c$ .

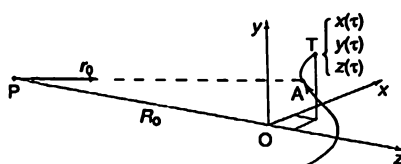
S elektrickým polem je spojeno magnetické pole, vždy pod pravým úhlem k elektrickému poli a pod pravým úhlem ke směru, v němž se jeví být zdroj, podle vztahu

$$\mathbf{B} = -\mathbf{r}'_0 \times \frac{\mathbf{E}}{c}. \quad (34.2)$$

Dosud jsme se zabývali pouze případem, kdy pohyby byly, co se týká rychlosti, nerelativistické, takže nebylo třeba uvažovat o nějakém pohybu ve směru zdroje. Nyní se budeme zabývat obecnějším případem, kdy pohyb může probíhat libovolnou rychlostí, a uvidíme, jaké jevy můžeme očekávat za těchto okolností. Dovolíme, aby rychlost pohybu byla libovolná, ale nadále budeme předpokládat, že detektor je velmi daleko od zdroje.

Z naší diskuze v kapitole 28 už víme, že to co je ve výrazu  $d^2 \mathbf{r}'_0 / dt^2$  nejdůležitější, jsou změny směru vektoru  $\mathbf{r}'_0$ . Necht' souřadnice náboje jsou  $(x, y, z)$ , přičemž  $z$  měříme ve směru k pozorovateli (obr. 34.1). V daném okamžiku, dejme tomu  $\tau$ , má náboj tři složky polohy náboje  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  a  $z(\tau)$ . Vzdálenost  $R$  je rovna dost přesně  $R(\tau) = R_0 + z(\tau)$ . Směr vektoru  $\mathbf{r}'_0$  závisí hlavně na  $x$  a na  $y$ , na  $z$  závisí málo. Příčné složky jednotkového vektoru  $\mathbf{r}'_0$  jsou  $x/R$  a  $y/R$ , a když tyto složky derivujeme, dostaneme člen s  $R^2$  ve jmenovateli:

$$\frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{dt} = \frac{dx}{R dt} - \frac{dz}{dt} \frac{x}{R^2}$$



Obr. 34.1 Dráha pohybujícího se náboje. Skutečná poloha v čase  $\tau$  je v T, ale retardovaná poloha je v A.

Jsmo-li dostatečně daleko od zdroje, jediné, čím se musíme zabývat, jsou změny  $x$  a  $y$ . Činitel  $1/R_0$  můžeme vytknout a máme

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 x'}{dt^2} \\ E_y &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 y'}{dt^2}, \end{aligned} \quad (34.3)$$

kde  $R_0$  je přibližně rovno vzdálenosti náboje  $q$ , vezměme ji jako vzdálenost  $OP$  k počátku souřadnicové soustavy  $(x, y, z)$ . Elektrické pole tak lze velmi jednoduše vypočítat. Je to násobek konstanty a velmi jednoduchých výrazů – druhých derivací souřadnic  $x$  a  $y$ . (Mohli bychom to vyjádřit matematicky tak, že  $x$  a  $y$  bychom nazvali příčnými složkami polohového vektoru náboje  $r$ , ale to by nepřidalo nic na jasnosti výkladu.)

Uvědomujeme si, že souřadnice se musí měřit ve zpožděném, retardovaném čase a tady zjistíme, že  $z(\tau)$  toto zpoždění ovlivní. Čemu je roven retardovaný čas? Je-li čas pozorování  $t$  (to je čas v bodě  $P$ ), čas  $\tau$ , který tomu odpovídá v bodě  $A$ , není roven času  $t$ , ale je to čas zpožděný o podíl celkové vzdálenosti, kterou musí světlo proletět a rychlosti světla. V prvním přiblížení je toto zpoždění rovno  $R_0/c$ , což je konstanta a nepřináší to nic zajímavého. Ale v dalším přiblížení musíme zahrnout vlivy závislosti polohy ve směru osy  $z$  na čase  $\tau$ , neboť, když je  $q$  o trochu dále, retardace je o něco větší. Dosud jsme to zanedbávali, a je to jediná změna, kterou musíme provést, aby naše výsledky platily pro všechny rychlosti.

Musíme zvolit určitou hodnotu  $t$  a z ní vypočítat  $\tau$  a tak zjistit, jaké jsou  $x$  a  $y$  v čase  $\tau$ . To budou potom retardovaná  $x$  a  $y$ , jež označíme jako  $x'$  a  $y'$  a jejichž druhá derivace určuje pole. Čas  $\tau$  se určí pomocí vztahu

$$t = \tau + \frac{R_0}{c} + \frac{z(\tau)}{c}$$

a

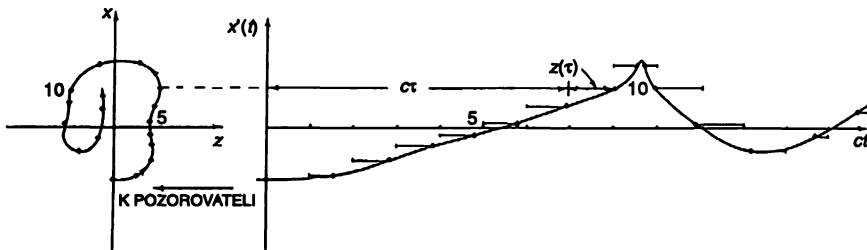
$$x'(\dot{t}) = x(\tau), \quad y'(\dot{t}) = y(\tau). \tag{34.4}$$

To jsou sice komplikované rovnice, ale jejich řešení lze snadno popsat geometricky. Geometrický obraz nám poskytne dobrý kvalitativní odhad toho, o čem tu jde, ale k odvození přesných výsledků je třeba mnoha podrobných matematických výpočtů.

### 34.2 „ZDÁNLIVÝ“ POHYB

Rovnice (34.4) můžeme zajímavě zjednodušit. Zanedbáme-li nezajímavý konstantní příspěvek ke zpožděnému času  $R_0/c$ , což znamená, že počátek  $t$  změníme o konstantu, dostaneme

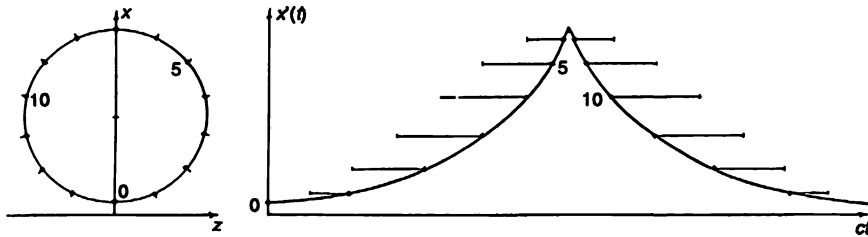
$$ct = c\tau + z(\tau), \quad x' = x(\tau), \quad y' = y(\tau). \tag{34.5}$$



Obr. 34.2 Geometrické řešení  $x'(\dot{t})$  rovnic (34.5)

Nyní potřebujeme určit  $x'$  a  $y'$  jako funkce  $t$  a ne jako funkce  $\tau$ , a to můžeme provést takto: z rovnic (34.5) víme, že ke skutečnému pohybu máme přičíst součin konstanty (rychlosti světla) a  $\tau$ . Je to znázorněno na obr. 34.2. Vezmeme skutečný pohyb náboje (znázorněný vlevo)

a představíme si, že přitom, jak se náboj pohybuje, mění se jeho vzdálenost od bodu  $P$  rychlostí  $c$  (kontrakce délky nebo podobné relativistické efekty se zde neprojeví; je to jen matematický úkon přičítání  $ct$ ). Takto dostaneme nový pohyb, pro nějž je  $ct$  souřadnicí ve směru pohledu. (Na obrázku je výsledek pro dost komplikovaný pohyb v rovině, ale je zřejmé, že pohyb nemusí probíhat v jedné rovině – může být ještě komplikovanější). Vtip je v tom, že horizontální vzdálenost (tj. směr pohledu) není rovna starému  $z$ , ale  $z + ct = ct$ . Tak jsme našli průběh křivky  $x'$  (i  $y'$ ) jako funkce  $t$ ! Je třeba se ještě podívat na zrychlení, tj. druhou derivaci této křivky. Konečná odpověď pak zní: Abychom našli elektrické pole pohybujícího se náboje, je třeba vzít pohyb náboje a posunout ho zpět rychlostí  $c$ , abychom ho „otevřeli“. Takto získaná křivka pak udává závislost  $x'$  a  $y'$  na  $t$ . Zrychlení této křivky určuje elektrické pole jako funkci  $t$ . Můžeme si také představit, že tato celá „pevná“ křivka se pohybuje dopředu rychlostí  $c$  rovinou pohledu, takže průsečík s touto rovinou má souřadnice  $x'$  a  $y'$ . Zrychlení tohoto bodu vytváří elektrické pole. Toto řešení je stejně přesné jako rovnice, z níž jsme vyšli – je to prostě geometrická reprezentace.

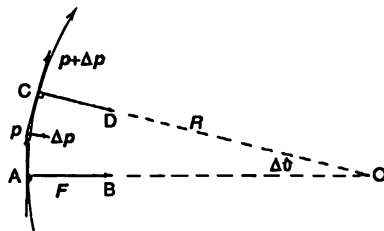


Obr. 34.3 Průběh  $x'(t)$  pro částici pohybující se po kružnici konstantní rychlostí  $v=0,94c$

Je-li pohyb náboje relativně pomalý, například máme-li oscilátor kmitající pomalu nahoru a dolů, a budeme-li tento pohyb přenášet rychlostí světla, dostaneme jednoduchou kosinovou křivku. To nám dá vztah, jímž jsme se již dlouho zabývali – určuje pole vytvořené kmitajícím nábojem. Mnohem zajímavějším příkladem je elektron pohybující se téměř rychlostí světla po kruhové dráze. Při pohledu v rovině dráhy se retardované  $x'(t)$  jeví tak, jak je to znázorněno na obr. 34.3. Jaká je to křivka? Kdybychom polohový vektor ze středu kružnice k náboji prodloužili radiálně, dále za náboj (stačí o málo, pohybuje-li se náboj velmi rychle), dostali bychom se do bodu, který se pohybuje rychlostí světla. Naložíme-li na náboj další, zpětný pohyb rychlostí světla, dostaneme pohyb, který odpovídá pohybu náboje na obvodu kola točícího se bez prokluzování nazpátek rychlostí  $c$ . Tak dostaneme křivku, jež je velmi podobná cykloidě – nazývá se *hypocykloida*. Blíží-li se rychlost pohybu náboje rychlosti světla, hroty křivky jsou skutečně velmi ostré. Kdyby se náboj pohyboval přesně rychlostí světla, hroty by byly „nekonečně ostré“. To je ovšem zajímavé – znamená to, že v blízkosti hrotu je druhá derivace obrovská. V každém cyklu dostaneme ostrý puls elektrického pole. Něco takového bychom nedostali při nerelativistickém pohybu, kde při každém oběhu náboje vznikají stále oscilace stejné intenzity. Zde dostáváme ostré impulzy elektrického pole, jdoucí za sebou v časových intervalech rovnajících se  $T_0$ , kde  $T_0$  je perioda otáček náboje. Tyto silné impulzy elektrického pole jsou vyzařovány v úzkém kuželu ve směru pohybu náboje. Zakřivení dráhy je při pohybu náboje směrem od bodu  $P$  velmi malé a i radiální pole je v tomto směru velmi malé.

### 34.3 SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ

V synchrotronu máme velmi rychlé elektrony pohybující se po kruhových dráhách. Jejich rychlost se těsně blíží rychlosti světla, a záření, o němž jsme právě mluvili, lze vidět jako skutečné světlo! Podívejme se na to podrobněji.



Obr. 34.4 Pohyb nabité částice po kruhové (nebo spirálovité) dráze v homogenním magnetickém poli

V synchrotronu máme elektrony, které se pohybují dokola v homogenním magnetickém poli. Nejprve se podívejme, proč se pohybují po kružnicích. Z rovnice (12.10) víme, že síla působící na částici v magnetickém poli je rovna

$$F = qv \times B \quad (34.6)$$

a její směr je kolmý k magnetickému poli i ke směru rychlosti. Síla je rovna časové změně hybnosti. Na obrázku 34.4 je znázorněna hybnost částice a síla, která na ni působí v magnetickém poli směřující směr vzhůru ven z papíru. Svírá-li síla s rychlostí pravý úhel, kinetická energie, a tedy i rychlost zůstávají konstantní. Jediné, co magnetické pole způsobí, je změna směru pohybu. Za dobu  $\Delta t$  se vektor hybnosti změní o  $\Delta p = F \Delta t$  pod pravým úhlem k  $p$ , takže  $p$  se otočí o úhel  $\Delta \vartheta = \Delta p / p = qvB \Delta t / p$ , protože  $|F| = qvB$ . Za stejnou dobu se částice posune o vzdálenost  $\Delta s = v \Delta t$ . Je vidět, že přímky  $AB$  a  $CD$  se protnou v bodě  $O$ , přičemž  $OA = OC = R$ , kde  $\Delta s = R \Delta \vartheta$ . Dosazením do předcházejících výrazů máme  $R \Delta \vartheta / \Delta t = R \omega = v = qvBR / p$ , odkud

$$p = qBR \quad (34.7)$$

$$\omega = \frac{qvB}{p} \quad (34.8)$$

Stejný argument můžeme použít i v každém dalším okamžiku a z toho můžeme usoudit, že částice se musí pohybovat úhlovou rychlostí  $\omega$  po kruhové dráze s poloměrem  $R$ .

Výsledek, že hybnost částice je rovna součinu náboje, magnetického pole a poloměru, je velmi důležitý zákon, jenž se často používá. Je důležitý pro praxi, protože, máme-li elementární částice se stejným nábojem pohybující se ve známém magnetickém poli, stačí změřit poloměry křivosti jejich drah a určíme tak hybnost částic. Vynásobíme-li obě strany rovnice (34.7) a vyjádříme  $q$  v jednotkách elektronového náboje  $q_e$ , můžeme udávat hybnost v elektronvoltech. V těchto jednotkách dostáváme vztah

$$pc(\text{eV}) = 3 \times 10^8 \left( \frac{q}{q_e} \right) BR, \quad (34.9)$$



kde  $B$ ,  $R$  a rychlost světla (numericky je rovna  $3 \times 10^8$ ) jsou vyjádřeny v jednotkách SI. Jednotka soustavy SI pro magnetické pole  $B$  se nazývá weber na metr čtverečný.<sup>42)</sup> Starší jednotka, jež se ještě používá, se nazývá gauss; jeden  $\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$  je rovna  $10^4$  gaussů. Abychom si představili, jak velká jsou magnetická pole, nejsilnější magnetické pole, jehož lze dosáhnout pomocí železa, je kolem  $1,5 \times 10^4$  gaussů. Za touto hranicí se výhoda použití železa ztrácí. Dnešní elektromagnety, se supervodivým vinutím, dokáží vytvořit stabilní pole více než  $10^5$  gaussů, tj. 10 jednotek SI. Magnetické pole Země dosahuje na rovníku několik desetin gaussu.

Vraťme se k rovnici (34.9) a představme si synchrotron dosahující miliardu elektronvoltů, takže  $pc$  má hodnotu  $10^9$  eV. (K energii se vrátíme za chvíli.) Máme-li  $B$  odpovídající, řekněme 10 000 gaussů (tj. 1 jednotce v SI soustavě), vidíme, že  $R$  bude rovno 3,3 metru. V Kalifornském technickém institutu je skutečný poloměr synchrotronu 3,7 metru, pole je o něco silnější a energie je 1,5 miliard eV. Aspoň máme představu, proč má synchrotron takové rozměry.

Vypočítali jsme hybnost, ale víme, že celková energie, včetně klidové energie, je dána vztahem  $W = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ . Klidová energie elektronu odpovídající  $mc^2$  je  $0,511 \cdot 10^6$  eV, takže je-li  $pc = 10^9$  eV, můžeme zanedbat  $mc^2$  a pro všechny praktické účely brát  $W = pc$  pro relativistické rychlosti. Prakticky je jedno, řekněme-li že energie elektronu je miliarda elektronvoltů nebo že součin hybnosti a  $c$  je miliarda elektronvoltů. Snadno lze ukázat, že pro  $W = 10^9$  eV se rychlost elektronu liší od rychlosti světla pouze o jednu osmimilióntinu!

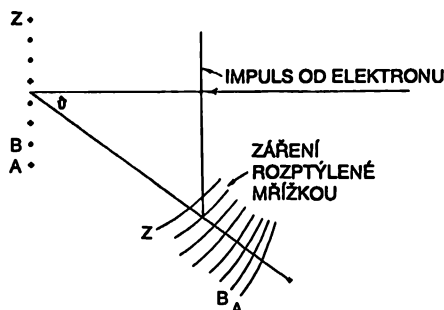
Nyní se podívejme na záření, jež tato částice vyzařuje. Částice pohybující se po kružnici s poloměrem 3,3 metru nebo s obvodem 20 metrů projde tuto dráhu asi za stejnou dobu, za jakou proletí světlo vzdálenost 20 metrů, takže vlnová délka záření vyzařovaného touto částicí by měla být 20 metrů – tj. v oblasti krátkých radiových vln. Ale vzhledem k efektu transformace vzdáleností, o němž jsme diskutovali (viz obr. 34.3) a protože vzdálenost, o kterou musíme zvětšit myšlený poloměr, abychom dostali rychlost světla je pouze jedna osmimilióntina poloměru dráhy elektronu, hroty hypocykloidy jsou mimořádně ostré ve srovnání se vzdáleností mezi nimi. Zrychlení, druhá derivace dráhy podle času, se bude v blízkosti hrotu měnit ještě prudčeji. Faktor stlačení  $8 \times 10^6$  se uplatní dvakrát, neboť časové měřítko v blízkosti hrotů bude dvakrát stlačeno. Proto můžeme očekávat, že efektivní vlnová délka bude mnohem menší, až  $64 \times 10^{12}$  – krát menší než 20 metrů, což odpovídá rentgenovému záření. (Ve skutečnosti je třeba vzít v úvahu nejen samotný hrot, ale i určitou oblast v jeho okolí. To způsobí, že místo druhé mocniny budeme mít mocninu  $3/2$ , ale ještě stále budeme nad optickou oblastí frekvencí.) Nerelativistický elektron by vyzařoval 20 – metrové radiové vlny a relativistický jev zmenší vlnovou délku natolik, že ji můžeme vidět! Je zřejmé, že světlo musí být polarizované s vektorem intenzity elektrického pole kolmým k homogennímu magnetickému poli.

Abychom lépe pochopili, co budeme pozorovat, předpokládejme, že takové světlo (pro jednoduchost, protože pulzy jsou daleko od sebe, si vezmeme pouze jeden pulz) nasměrujeme na difrakční mřížku, tvořenou mnoha rozptylujícími dráty. Co uvidíme, až se pulz vzdálí od mřížky? (Měli bychom vidět červené světlo, modré světlo apod., pokud vůbec nějaké světlo uvidíme.) Co ale vidíme ve skutečnosti? Impulz dopadne čelem vlny na mřížku a způsobí, že se všechny její oscilátory pohnou najednou prudce nahoru a dolů, právě jednou. Tím vyvolají účinky v různých směrech, jako na obr. 34.5. Bod  $P$  je tady blíž k jednomu konci mřížky než k druhému, takže první tohoto bodu dosáhne elektrické pole z vodiče  $A$ , pak z vodiče  $B$ , atd., až nakonec doletí impulz od posledního vodiče. Zkrátka, výsledný odraz od všech drátů vypadá jako na obr. 34.6a; je to elektrické pole, jež se skládá ze série impulzů a jeho průběh se velmi

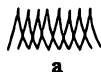
42) Dnes má název tesla a označení T. (Pozn. red.)

## KOSMICKÉ SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ

podobá sinusoidální vlně, jejíž vlnová délka je rovna vzdálenosti mezi impulzy, právě tak, jako by na mřížku dopadalo monochromatické světlo! Takže dostáváme barevné světlo. Nedostali bychom takové světlo od „impulzu“ jakéhokoliv druhu? Ne. Předpokládejme, že křivky by měly mnohem hladší průběh – pak bychom skládali rozptýlené vlny oddělené velmi krátkými časy (obr. 34.6b). Vidíme, že pole nebude vůbec kolísat, bude to velmi hladká křivka, neboť každý impulz se za čas, jenž je mezi nimi, změnil jen velmi málo.



Obr. 34.5 Světlo, jež dopadne na difrakční mřížku ve formě jediného ostrého impulzu se rozptýlí na různé strany jako světlo s různými barvami



a



b

Obr. 34.6 Výsledné elektrické pole způsobené sérií

- ostrých impulzů
- hladkých impulzů

Elektromagnetické záření vyzařované relativistickými nabitými částicemi obíhajícími v magnetickém poli se nazývá *synchrotronní záření*. Původ tohoto názvu je zřejmý, ale tento jev se neomezuje jen na synchrotrony ani na pozemské laboratoře. Vzrušující a zajímavé je to, že se vyskytuje i v přírodě!

### 34.4 KOSMICKÉ SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ

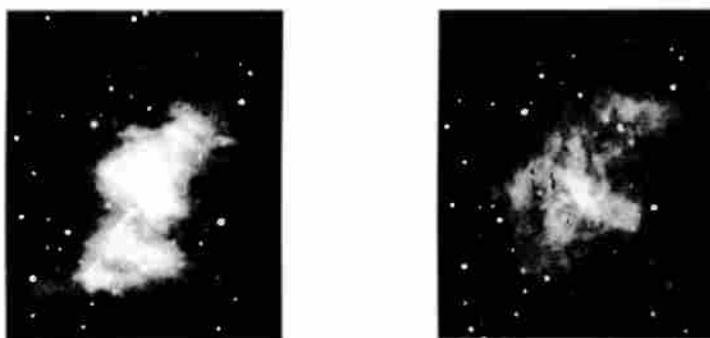
V roce 1054 patřila čínská a japonská civilizace mezi nejvyspělejší na světě. Byly si vědomy existence vesmíru, a co je nejzajímavější, v tomto roce zaznamenaly explodující jasnou hvězdu. (Překvapující je, že žádný z evropských mnichů, kteří napsali všechny knihy středověku, si nedal tu námahu, aby zapsal, že na nebi explodovala hvězda.) Dnes si můžeme tuto hvězdu vyfotografovat; vidíme ji na obr. 34.7. Na vnější straně je mnoho červených vláken, způsobených atomy řídkého plynu, rozkmitanými na svých vlastních frekvencích. Toto světlo má jasné čárové spektrum skládající se z různých frekvencí. Červená čára v tomto případě patří dusíku. Naproti tomu v centrální oblasti je záhadná rozmazaná světlá skvrna se spojitým spektrem, tj. nejsou tam frekvence, jež by souvisely s nějakými atomy. Není to ani prach rozzářený okolními hvězdami, což je jeden způsob, jak by mohlo vzniknout spojitě spektrum. Je to průzračný objekt, můžeme skrz něj vidět hvězdy, ale *vyzařuje světlo*.

Na obr. 34.8 máme pohled na stejný objekt pomocí světla z oblasti spektra, kde nejsou jasné

spektrální čáry, takže vidíme jen centrální oblast. Kromě toho byly na teleskop nasazeny polarizátory a uvedené snímky odpovídají jejich dvěma navzájem kolmým orientacím. Vidíme, že obrázky se liší! Znamená to, že světlo je polarizované. Lze předpokládat, že je tam místní magnetické pole a v něm obsáhá mnoho velmi rychlých elektronů.



Obr. 34.7 Krabí mlhovina ve všech barvách (bez filtru)



Obr. 34.8 Krabí mlhovina při pohledu skrz modrý filtr a polaroid.

- a) vektor intenzity elektrického pole je svislý,
- b) vektor intenzity elektrického pole je vodorovný

Právě jsme si vysvětlovali, jak mohou obíhat elektrony v magnetickém poli po kružnici. K tomuto pohybu můžeme přidat libovolný rovnoměrný pohyb ve směru pole, neboť síla  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  nemá žádnou složku v tomto směru a jak jsme již poznamenali, synchrotronové záření je polarizováno ve směru kolmém k průmětu magnetického pole do roviny pohledu.

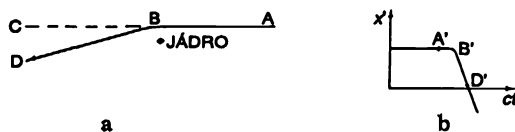
Z těchto dvou skutečností můžeme usoudit, že v oblasti, kde jeden obraz je světlý a druhý tmavý, musí být elektrické pole úplně polarizováno v jednom směru. Znamená to, že je tam

magnetické pole pod pravým úhlem k tomuto směru, zatímco v druhých oblastech, kde je silně vyzařování (na druhém obrázku), musí být směr magnetického pole jiný. Při pozorném studiu obr. 34.8 na nich můžeme vidět soustavu čar, přičemž čáry na jednom obrázku jsou kolmé na čáry na druhém obrázku. Na obrázcích je vidět určitou vláknitou strukturu. Siločáry magnetického pole pravděpodobně sahají do relativně velkých vzdáleností, a tak jsou tu rozsáhlé oblasti, v nichž má pole s kroužčícími elektrony jeden směr, zatímco v jiných oblastech má pole i kroužčící elektrony jiný směr.

Proč si elektrony zachovávají tak vysokou energii tak dlouhou dobu? Vždyť od exploze uplynulo již 900 let; jak to, že si udržují tak velkou rychlost? Příčina toho, proč si elektrony zachovávají svou vysokou energii, a co všechno přitom probíhá, není dosud dostatečně známa.

### 34.5 BRZDNÉ ZÁŘENÍ

Nyní se stručně zmíníme o dalším jevu, který pozorujeme u velmi rychle letících částic vyzařujících energii. Podstata tohoto jevu je velmi podobná tomu, čím jsme se právě zabývali. Předpokládejme, že v látce jsou nabitě částice a že do ní vletí, dejme tomu, velmi rychlý elektron (obr. 34.9). Elektrické pole v blízkosti atomových jader elektron přitahuje, urychluje apod., takže dráha jeho pohybu se mírně zakříví. Jaké elektrické pole vzniká ve směru  $C$ , pohybuje-li se elektron rychlostí blízkou rychlosti světla? Připomeňme si naše pravidlo: Vezmeme skutečný pohyb a posuneme ho zpět rychlostí  $c$  a tak dostáváme křivku, jejíž křivost je mírou elektrického pole. Pro elektron letící rychlostí  $v$  směrem k nám dostaneme zpáteční pohyb a celý obrázek se stlačí na menší rozměry, úměrné tomu, kolikrát je  $c-v$  menší než  $c$ . Když je  $1-v/c \ll 1$ , v bodě  $B'$  je velmi ostré a prudké zakřivení dráhy, a vezmeme-li druhou derivaci, dostaneme velmi silné pole ve směru pohybu. Proto, když velmi energetické elektrony procházejí látkou, vystřelují záření ve směru svého pohybu. Tento jev se nazývá *brzdné záření*. Synchrotron se ve skutečnosti nepoužívá ani tak k získání vysokoenergetických elektronů (kdybychom je uměli vyvést z urychlovače vhodným způsobem, tak bychom takto nemluvíli), jako spíše k získání vysokoenergetických fotonů – paprsků  $\gamma$ . Energetické elektrony se propustí pevným wolframovým terčem a nechají vyzařovat fotony mechanismem brzdného záření.



Obr. 34.9 Rychlý elektron letící blízko jádra vyzařuje energii ve směru svého pohybu

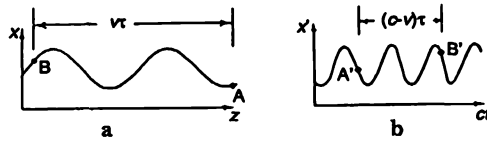
### 34.6 DOPPLERŮV JEV

Pokračujeme ve studiu některých dalších jevů souvisejících s pohybujícími se zdroji. Předpokládejme, že zdrojem je stacionární atom kmitající na některé ze svých vlastních frekvencí  $\omega_0$ . Frekvence pozorovaného světla je pak  $\omega_1$ . Vezmeme si teď podobný oscilátor kmitající na frekvenci  $\omega_1$ , přičemž se současně celý atom, celý oscilátor, pohybuje směrem k pozorovateli rychlostí  $v$ . Skutečný pohyb v prostoru je pak takový, jak je to na obr. 34.10a. Nyní si zahrajeme naši obvyklou hru; přidáme  $c\tau$ , tedy celou křivku posuneme zpět a zjistíme, že osciluje, jako na

## RELATIVISTICKÉ JEVY A ZÁŘENÍ

obr. 34.10b. Když se oscilátor za daný čas posunul o vzdálenost  $v\tau$ , na grafu závislosti  $x'$  na  $ct$  je to vzdálenost  $(c - v)\tau$ . Proto se nyní všechny kmity oscilátoru s frekvencí  $\omega_1$  vykonané za čas  $\Delta\tau$  nacházejí v intervalu  $\Delta t = (1 - v/c)\Delta\tau$ . Jsou stlačeny, a když k nám tato křivka dospěje rychlostí  $c$ , vidíme světlo s frekvencí vyšší s koeficientem stlačení  $(1 - v/c)$ . Takže pozorujeme frekvenci

$$\omega = \frac{\omega_1}{1 - \frac{v}{c}}. \quad (34.10)$$



Obr. 34.10  $x$ - za  $x'$  -  $t$  diagramy pohybujícího se oscilátoru

Tuto situaci bychom mohli analyzovat i různými jinými způsoby. Předpokládejme, že atom by nevyzařoval sinusoidální vlny, ale sérii impulsů „pí, pí, pí, pí...“ s určitou frekvencí  $\omega_1$ . S jakou frekvencí je zachytíme my? První signál k nám dorazí s určitým zpožděním, ale další je opožděn už méně, neboť zatím se atom přiblížil k přijímači. V důsledku pohybu se proto čas mezi signály zkrátí. Pomocí geometrické analýzy zjistíme, že frekvence signálů se zvětší s činitelem  $1/(1 - v/c)$ .

Znamená to, že frekvence, kterou bychom pozorovali, kdybychom měli obyčejný atom kmitající na vlastní frekvenci  $\omega_0$  a pohybující se směrem k přijímači, by byla  $\omega = \omega_0 / (1 - v/c)$ ? Ne! Jak víme, v důsledku relativistické dilatace času není vlastní frekvence pohybujícího se atomu  $\omega_1$  stejná, jakou bychom naměřili, kdyby byl atom v klidu. Je-li  $\omega_0$  skutečná vlastní frekvence, pak modifikovaná vlastní frekvence  $\omega_1$  bude

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (34.11)$$

Proto pozorovaná frekvence je

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}}. \quad (34.12)$$

Takový posun frekvence se nazývá *Dopplerův jev*. Letí-li zdroj směrem k nám, světlo, které vyzařuje, se nám jeví modřejší, a když letí směrem od nás, zdá se červenější.

Uvedeme další dvě odvození tohoto zajímavého a důležitého výsledku. Představme si, že nyní je zdroj vyzařující vlny s frekvencí  $\omega_0$  v klidu, zatímco pozorovatel se pohybuje ke zdroji rychlostí  $v$ . Za nějakou dobu  $t$  se pozorovatel posune do nové polohy vzdálené o  $vt$  od místa, kde byl v čase  $t = 0$ . O kolik radiánů se změnila fáze vlnění, jež kolem něho prošlo? Pro libovolný pevný bod to bylo  $\omega_0 t$ , a navíc pozorovatel v důsledku svého pohybu ještě viděl  $vt k_0$  radiánů (počet radiánů

na metr násobeno vzdáleností). Proto celkový počet radiánů za dobu  $t$ , neboli pozorovaná úhlová frekvence, bude  $\omega_1 = \omega_0 + k_0 v$ . Tuto analýzu jsme provedli z hlediska pozorovatele, jenž je v klidu. Jak to bude vypadat u pohybujícího se pozorovatele? Opět musíme vzít v úvahu rozdíl v rychlosti plynutí času pro tyto dva pozorovatele, což tentokrát znamená, že musíme dělit  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Je-li tedy  $k_0$  vlnové číslo, tj. počet radiánů na metr ve směru pohybu, a  $\omega_0$  je frekvence, sleduje pohybující se pozorovatel frekvenci

$$\omega = \frac{\omega_0 + k_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (34.13)$$

V případě světla víme, že  $k_0 = \omega_0/c$ , takže máme

$$\omega = \frac{\omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (34.14)$$

což není vůbec podobné vztahu (34.12)! Liší se snad frekvence, kterou bychom pozorovali při pohybu směrem ke zdroji od frekvence, kterou bychom pozorovali, kdyby se zdroj pohyboval směrem k nám? Samozřejmě, že ne! Teorie relativity říká, že tyto dvě frekvence musí být *přesně stejné*. Kdybychom byli dostatečně zkušený matematikové, snad bychom si již byli všimli, že tyto dva matematické výrazy jsou přesně stejné. To, že jsou si tyto výrazy nutně rovny, je jeden ze způsobů, jímž někteří lidé rádi dokazují, že relativita vyžaduje dilataci času. Kdybychom nezahrnuli výrazy s odmocninou, frekvence by si nebyly rovny.

Protože známe teorii relativity, provedme analýzu ještě třetím způsobem, který se může zdát obecnější. (Ve skutečnosti je to stejné, neboť na tom, jak to děláme, nezáleží!) Podle teorie relativity existuje vztah mezi polohou a časem, jak je vidí jeden pozorovatel a mezi polohou a časem, jak je vidí druhý pozorovatel, který je v relativním pohybu vzhledem k prvnímu. Tyto vztahy jsme si uvedli již dávno (kapitola 16); jsou to *Lorentzova transformace* a *zpětná Lorentzova transformace*. Připomeneme si je:

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (34.15)$$

Kdybychom byli v klidu, vlny by měly tvar  $\cos(\omega t - kx)$ ; všechny nuly, maxima a minima by sledovaly tento tvar. Co ale uvidí člověk v pohybu, pozoruje-li stejnou fyzikální vlnu? Kde je pole nulové, tam jsou polohy všech nul stejné. Je to relativistický invariant (je-li pole nulové, každý naměří, že je rovno nule). Proto je tvar vlny i pro druhého pozorovatele stejný, jen ho musíme přetransformovat do jeho souřadnicové soustavy

$$\cos(\omega t - kx) = \cos \left[ \omega \frac{t' - \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - k \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right].$$

Po úpravě výrazů v závorce dostaneme

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - kx) &= \cos \left[ \frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t' - \frac{k + \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x' \right] = \\ &= \cos \left[ \omega' t' - k' x' \right]. \end{aligned} \quad (34.16)$$

Je to opět vlna kosinusového tvaru, v níž se určitá konstantní frekvence  $\omega'$  násobí  $t'$  a nějaká jiná konstanta  $k'$  se násobí  $x'$ . Konstantu  $k'$  nazýváme vlnovým číslem nebo počtem vln na metr z hlediska druhého pozorovatele. Druhý pozorovatel proto sleduje novou frekvenci a nové vlnové číslo dané jako

$$\omega' = \frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (34.17)$$

a

$$k' = \frac{k + \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (34.18)$$

Při pohledu na (34.17) vidíme, že je to stejný vztah jako (34.13), který jsme získali fyzikálně názornějším způsobem.

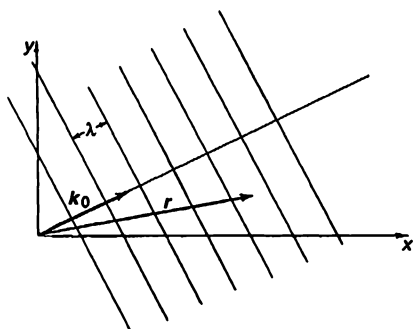
## 34.7 VLNOVÝ ČTYŘVEKTOR

Vztahy zaznamenané rovnicemi (34.17) a (34.18) jsou velmi zajímavé, neboť nám říkají, že nová frekvence  $\omega'$  je kombinací staré frekvence  $\omega$  a starého vlnového čísla  $k$  a že nové vlnové číslo je kombinací starého vlnového čísla a staré frekvence. Vlnové číslo určuje rychlost změny fáze se vzdáleností a frekvence určuje rychlost změny fáze s časem a tyto výrazy velmi připomínají Lorentzovy transformace polohy a času. Podíváme-li se na  $\omega$  jako na  $t$  a na  $k$  jako na  $x$  vydělené  $c^2$ , nové  $\omega'$  bude jako  $t'$  a nové  $k'$  bude jako  $x'/c^2$ . To znamená, že při Lorentzově transformaci se  $\omega$  a  $k$  transformují jako  $t$  a  $x$ . Vytvářejí to, čemu říkáme *čtyřvektor*, když má nějaká veličina čtyři složky, které se transformují jako čas a prostor, je to čtyřvektor. Všechno se zdá být v pořádku až na jednu maličkost. Řekli jsme, že čtyřvektor musí mít čtyři složky. Kde jsou zbývající dvě?

## VLNOVÝ ČTYŘVEKTOR

Viděli jsme, že  $\omega$  a  $k$  jsou jako čas a prostor v jednom prostorovém směru, ale ne ve všech směrech, proto dále musíme studovat problém šíření světla ve třech prostorových směrech a ne pouze v jednom, jak jsme to dělali dosud.

Předpokládejme, že máme souřadnicovou soustavu  $x, y, z$  a vlnění, jehož čela se šíří, jak je znázorněno na obr. 34.11. Vlnová délka vlnění je  $\lambda$ , ale směr pohybu vlny nesouhlasí se směrem některé ze souřadnicových os. Jaký vztah dostaneme pro takovou vlnu? Odpověď je  $\cos(\omega t - k s)$ , kde  $k = 2\pi/\lambda$  a  $s$  je vzdálenost ve směru pohybu vlny – složka polohového vektoru ve směru pohybu. Můžeme to vyjádřit takto: Je-li polohový vektor bodu v prostoru  $r$ ,  $s$  je  $r \cdot e_k$ , kde  $e_k$  je jednotkový vektor ve směru pohybu. Znamená to, že  $s$  je rovno  $r \cdot \cos(r, k_0)$ , tj. složce vzdálenosti ve směru pohybu. Naše vlna je proto  $\cos(\omega t - k k_0 \cdot r)$ .



Obr. 34.11 Rovinná vlna šířící se šikmým směrem

Ukazuje se, že bude velmi vhodné definovat nový vektor  $k$ . Nazveme ho *vlnový vektor*. Jeho velikost je rovna vlnovému číslu  $2\pi/\lambda$  a směřuje ve směru šíření vlnění

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} k_0 = k k_0. \quad (34.19)$$

Pomocí vlnového vektoru můžeme zapsat naši vlnu jako  $\cos(\omega t - k \cdot r)$  nebo jako  $\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$ . Jaký význam má některá složka  $k$ , například  $k_x$ ? Je vidět, že  $k_x$  znamená rychlost změny fáze vzhledem k  $x$ . Na obr. 34.11 vidíme, že fáze se mění se změnou  $x$ , jako by se podél  $x$  šířila vlna, ale s delší vlnovou délkou. „Vlnová délka ve směru osy  $x$ “ je delší než přirozená, skutečná vlnová délka, podle vztahu

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \alpha}, \quad (34.20)$$

kde  $\alpha$  je úhel mezi směrem skutečného šíření vlny a směrem osy  $x$ . Proto je rychlost změny fáze, jež je úměrná převrácené hodnotě  $\lambda_x$ , menší s faktorem  $\cos \alpha$ , tak se bude měnit  $k_x$  – bude to velikost  $k$  krát kosinus úhlu mezi  $k$  a osou  $x$ !

To je podstata vlnového vektoru, který používáme k popisu vlnění ve třech rozměrech. Ve speciální teorii relativity se čtyři složky  $\omega, k_x, k_y, k_z$  transformují jako čtyřvektor, kde  $\omega$  odpovídá času a  $k_x, k_y, k_z$  odpovídají složkám čtyřvektoru  $x, y$  a  $z$ .

V naší předcházející diskusi o speciální teorii relativity (kapitola 17) jsme poznali, že lze ze čtyřvektorů vytvořit relativistický skalární součin. Označíme-li polohový vektor jako  $x_\mu$ , kde  $\mu$



označuje čtyři složky (čas a tři prostorové složky), a vlnový vektor jako  $k_\mu$ , kde  $\mu$  má také čtyři hodnoty, jednu pro čas a tři pro prostor, skalární součin  $x_\mu$  a  $k_\mu$  je  $\sum' k_\mu x_\mu$  (viz kapitola 17). Tento skalární součin je invariant nezávislý na soustavě souřadnic. Čemu je roven? Podle definice čtyřrozměrného skalárního součinu je roven:

$$\sum' k_\mu x_\mu = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z. \quad (34.21)$$

Z vlastností čtyřvektorů plyne, že  $\sum' k_\mu x_\mu$  je invariant vzhledem k Lorentzově transformaci. Ale to je přesně ta veličina, jež vystupuje v kosinu pro rovinnou vlnu, která musí být invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. Nemůžeme mít vztah, jenž by obsahoval něco, co by se měnilo v argumentu kosinu, neboť víme, že fáze vlny se nemůže změnit se změnou souřadnicové soustavy.

### 34.8 ABERACE

Při odvození rovnic (34.17) a (34.18) jsme si vzali jednoduchý příklad, kdy  $k$  leželo ve směru pohybu, ale je jasné, že to můžeme zobecnit i na jiné případy. Například předpokládejme, že máme zdroj, jenž vyzařuje světlo v určitém směru z hlediska nehybného pozorovatele, zatímco my se pohybujeme, řekněme spolu se Zemí (obr. 34.12). Z kterého směru se nám zdá, že přichází světlo? Abychom to zjistili, museli bychom napsat čtyři složky  $k_\mu$  a aplikovat na ně Lorentzovu transformaci. Odpověď lze najít i takto: Abychom uviděli světlo, musíme naklonit náš teleskop. Proč? Protože světlo letí dolů rychlostí  $ca$  my se pohybujeme do strany rychlostí  $v$ , takže teleskop musíme naklonit dopředu, aby dopadající světlo procházelo přímo tubusem. Snadno zjistíme, že je-li vertikální vzdálenost  $ct$ , horizontální vzdálenost bude  $vt$ , a proto pro úhel náklonu  $\vartheta'$  platí  $\text{tg } \vartheta' = v/c$ . To je hezké – až na jednu věc:  $\vartheta'$  není úhel, o který bychom měli naklonit teleskop vzhledem k Zemi, neboť celou analýzu jsme prováděli z hlediska nehybného pozorovatele. Když jsme řekli, že horizontální vzdálenost je  $vt$ , pozemský pozorovatel by našel jinou vzdálenost, neboť měří „zkráceným“ pravítkem. V důsledku kontrakce délky vychází, že

$$\text{tg } \vartheta' = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (34.22)$$

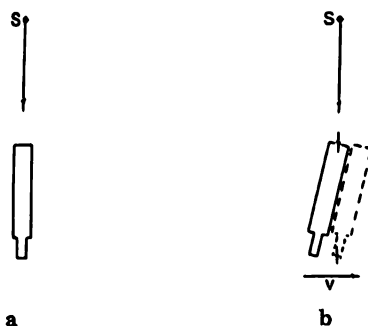
což je ekvivalentní

$$\sin \vartheta' = \frac{v}{c}. \quad (34.23)$$

Pro čtenáře bude poučné odvodit tento výsledek pomocí Lorentzovy transformace.

Skutečnost, že teleskop je třeba naklonit, se nazývá *aberrace* byla experimentálně pozorována. Jak ji můžeme pozorovat? Kdo může říct, kde se má daná hvězda nacházet? Předpokládejme, že k tomu bychom hvězdu viděli, se musíme dívat špatným směrem. Jak potom víme, že je to špatný směr? Protože Země obíhá kolem Slunce. Dnes musíme teleskop nasměrovat jedním směrem a za šest měsíců ho musíme naklonit opačným směrem. To je důvod, proč můžeme říct, že takový jev existuje.

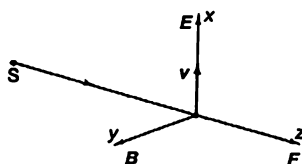
## ABERACE • HYBNOST SVĚTLA



Obr. 34.12 Pohled navzdálený zdroj  $S$   
 a) nehybným teleskopem,  
 b) teleskopem pohybujícím se stranově

### 34.9 HYBNOST SVĚTLA

Nyní přejdeme k dalšímu tématu. V celé naší diskuzi v posledních kapitolách jsme nikdy nic neřekli o účincích magnetického pole, jež je spojeno se světlem. Účinky magnetického pole jsou obvykle velmi malé, ale existuje jeden zajímavý a důležitý jev, jenž je důsledkem magnetického pole. Předpokládejme, že světlo přicházející ze zdroje působí na náboj a rozkmitá ho. Budeme předpokládat, že elektrické pole má směr osy  $x$ , takže náboj se také pohybuje ve směru osy  $x$ ; jeho poloha je  $x$  a jeho rychlost je  $v$ , jak je znázorněno na obr. 34.13. Magnetické pole svírá s elektrickým polem pravý úhel. Jak působí magnetické pole na náboj, jímž elektrické pole kmitá nahoru a dolů? Magnetické pole působí na náboj (řekněme na elektron) jenom, když se náboj pohybuje, ale elektron se přece pod vlivem elektrického pole pohybuje, takže obě pole působí společně. Kmitá-li náboj nahoru a dolů, má nějakou rychlost a působí na něj síla o velikosti součinu  $B$ ,  $v$  a  $q$ . Jaký směr má tato síla? Leží ve směru šíření světla. Proto, když na náboj svítí světlo a náboj se v důsledku toho rozkmitá, působí na něj ještě síla ve směru světelného paprsku. Tomu se říká *radiační tlak* nebo tlak světla.



Obr. 34.13 Síla magnetického pole působící na náboj rozkmitaný elektrickým polem má směr světelného paprsku.

Určíme velikost tohoto radiálního tlaku. Je zřejmé, že  $F = qvB$ , nebo, vzhledem k tomu, že všechno osciluje, je třeba vzít střední časovou hodnotu  $\langle F \rangle$ . Z (34.2) vidíme, že magnetické pole je rovno elektrickému poli dělenému  $c$ , a proto potřebujeme najít střední hodnotu součinu intenzity elektrického pole a rychlosti a vynásobit ji nábojem a  $1/c$ :  $\langle F \rangle = q \langle vE \rangle / c$ . Součin náboje  $q$  a intenzity  $E$  elektrického pole dává sílu působící na náboj a síla působící na náboj násobená rychlostí je rovna výkonu  $dW/dt$  dodanému náboji! Proto síla, tj. hybnost dodaná světlem za sekundu, je rovna  $1/c$  násobeno energií světla absorbovanou za sekundu! To je obecné pravidlo, neboť jsme si nic neřekli o síle oscilátoru nebo zda se některé náboje neruší.

Vždy, když dochází k absorpci světla, působí tlak. Hybnost dodaná světlem za sekundu je vždy rovna absorbované energii dělené  $c$

$$\langle F \rangle = \frac{dW}{c dt}. \quad (34.24)$$

Víme, že světlo přenáší energii. Nyní vidíme, že přenáší i hybnost a navíc, že tato hybnost je rovna  $1/c$ -násobku energie.

Při emisi světla ze zdroje dochází ke zpětnému rázu zdroje – probíhá totéž na opačnou stranu. Vyzáří-li atom některým směrem energii  $W$ , získá zpětnou hybnost  $p = W/c$ . Při kolmém odrazu světla od zrcadla dostaneme dvojnásobek síly.

Až sem jsme se dostali pomocí klasické teorie světla. Víme však, že existuje kvantová teorie a že v mnoha případech se světlo chová jako částice. Energie světla – částice je součin konstanty a frekvence

$$W = h\nu = \hbar\omega. \quad (34.25)$$

Nyní víme, že světlo má také hybnost, jež je rovna podílu energie a  $c$ . Proto platí, že tyto částice světla, fotony mají hybnost

$$p = \frac{W}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k. \quad (34.26)$$

Směr hybnosti je přitom stejný jako směr šíření světla, takže pomocí vektorového zápisu máme

$$W = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (34.27)$$

Také víme, že energie a hybnost částice by měly tvořit čtyřvektor. Právě jsme zjistili, že  $\omega$  a  $\mathbf{k}$  tvoří čtyřvektor. Proto je dobré, že v obou vztazích v (34.27) je *táž* konstanta. Znamená to, že kvantová teorie a teorie relativity jsou vzájemně konzistentní teorie.

Rovnici (34.27) lze elegantněji zapsat jako  $\mathbf{p}_\mu = \hbar k_\mu$ , což je relativistická rovnice pro částici spojenou s vlnou. I když jsme mluvili jen o fotonech, pro něž  $k$  (velikost  $\hbar$ ) je rovno  $\omega/c$  a  $p = W/c$ , je tento vztah mnohem obecnější. V kvantové mechanice projevují vlnové vlastnosti nejen fotony, ale všechny částice, přičemž frekvence a vlnové číslo vln souvisí s energií a hybností částic prostřednictvím (34.27) (de Broglieho vztahy) a to i tehdy, když  $p$  není rovno  $W/c$ .

V poslední kapitole jsme viděli, že paprsek pravotočivě nebo levotočivě kruhově polarizovaného světla přenáší moment hybnosti úměrný energii vlnění  $\mathcal{E}$ . V kvantově mechanickém pojetí se paprsek kruhově polarizovaného světla považuje za proud fotonů, z nichž každý má moment hybnosti podél směru šíření světla rovný  $\pm \hbar$ . Tak je vyjádřena polarizace z korpuskulárního hlediska – fotony mají moment hybnosti, podobně jako rotující kulky vystřelené z pušky. Tato představa o kulkách je ve skutečnosti stejně neúplná jako představa o vlnách a vše si budeme muset podrobněji prodiskutovat později, v kapitole o kvantových vlastnostech.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 34.1 ■ Kotouč o poloměru  $A$  se valí bez prokluzování po vodorovné rovině. Napište rovnici trajektorie, kterou opisuje bod nacházející se ve vzdálenosti  $\vartheta$  od středu kotouče, v závislosti na  $A$ ,  $R$  a úhlu pootočení kotouče. Osa  $x$  míří svisle vzhůru od středu kotouče a osa  $z$  ve směru jeho pohybu. Najděte zrychlení  $d^2x/dt^2$  bodu při  $z = ct$ .
- 34.2 ■ Výraz získaný v předchozí úloze se hodí k vyjádření intenzity vyzařování částice, jež se pohybuje po kruhové trajektorii s poloměrem  $R$ . Vyjádřete výsledek pomocí pozorovaných veličin  $R$ ,  $v$  (rychlost částice) a  $x$  (poloha částice v okamžiku pozorování).
- 34.3 ■ Najděte poměr intenzit vyzařování nabitě částice, jež se pohybuje po kruhové dráze směrem k pozorovateli a od něho.
- 34.4 ■ Odvoďte vzorec pro aberaci  $\vartheta = v/c$  z Lorentzovy transformace.
- 34.5 ■ Ukažte, že rychlost elektronu o energii 1 GeV se liší od rychlosti světla o jednu osmimiliontinu.
- 34.6 ■ Při pozorování čáry  $D$  ve spektru sodíku (její laboratorní vlnová délka je 589,0 nm) bylo zjištěno, že je ve spektru hvězdy posunuta a má vlnovou délku 588,0 nm. Jakou rychlostí se pohybuje hvězda vzhledem k pozorovateli?
- 34.7 ■ Astronom z Caltechu R. Minkowski dospěl k závěru, že nejvzdálenější mlhovina, kterou pozoroval, se od nás vzdaluje rychlostí 0,6  $c$ . Jak velký je dopplerovský posun pro světlo, jež přichází z této mlhoviny? Určete pozorovanou vlnovou délku ve spektru této mlhoviny, je-li tato vlnová délka v soustavě spojené s mlhovinou rovna 300 nm.
- 34.8 ■ Bradley objevil v roce 1728 aberaci světla spočívající v tom, že pozorované hvězdy se jeví na obloze posunuty, protože Země se pohybuje na oběžné dráze kolem Slunce. Proto při pozorování hvězd v blízkosti pólu ekliptiky musíme naklonit osu dalekohledu dopředu (ve směru pohybu Země) o  $20,5''$ . Vezmeme-li rychlost světla rovnou  $3,00 \cdot 10^8$  m s<sup>-1</sup>, jaká bude velikost poloměru zemské dráhy vypočítaná na základě tohoto pozorování?
- 34.9 ■ Budeme předpokládat, že meziplanetární prostor je zaplněn malými zrnky prachu s průměrnou hustotou  $\rho$  a přibližně kulového tvaru s poloměrem  $R$ .
- Ukažte, že pro zrnko libovolného poloměru nezávisí poměr gravitační přitažlivé síly a radiační odpudivé síly na vzdálenosti od Slunce.
  - S použitím údaje, že intenzita slunečního záření na zemské dráze je  $1374$  W m<sup>-2</sup>, a za předpokladu, že srážkový průřez absorpce záření je  $\pi R^2$  určete, při jaké hodnotě poloměru  $R$  budou síly gravitačního přitahování a radiačního odpuzování vyrovnány.
  - Vezmeme-li v úvahu výsledky uvedené v kapitole 32, můžeme usoudit, že srážkový průřez absorpce zrněk může být značně větší než  $\pi R^2$ ?

# Barevné vidění

## 35.1 LIDSKÉ OKO

## 35.2 BARVA ZÁVISÍ NA INTENZITĚ

## 35.3 MĚŘENÍ BAREVNÉHO VJEMU

## 35.4 DIAGRAM BAREVNOSTI

## 35.5 MECHANIZMUS BAREVNÉHO VIDĚNÍ

## 35.6 FYZIOCHEMIE BAREVNÉHO VIDĚNÍ

### 35.1 LIDSKÉ OKO

Existence barev závisí zčásti na fyzikálním světě. O barvách mýdlových bublin a podobných jevech mluvíme jako o výsledku interference. Existence barev, samozřejmě, závisí na oku a na tom, co se děje za okem, v mozku. Fyzika charakterizuje světlo vstupující do oka, ale dále jsou naše vjemy výsledkem fotochemicko – neurologických procesů a psychologické odezvy.

Existuje mnoho zajímavých jevů spojených s viděním, jež zahrnují směs fyzikálních jevů a fyziologických procesů a jejich úplné pochopení musí sahat za hranice fyziky v obvyklém smyslu. Nechceme se omlouvat za takové odbočení do jiných oblastí poznání, neboť rozdělení do různých oblastí je pouhá lidská konvence a nepřirozená věc. Přírodu nezajímá naše dělení a mnoho zajímavých jevů překlenuje mezery mezi různými oblastmi.

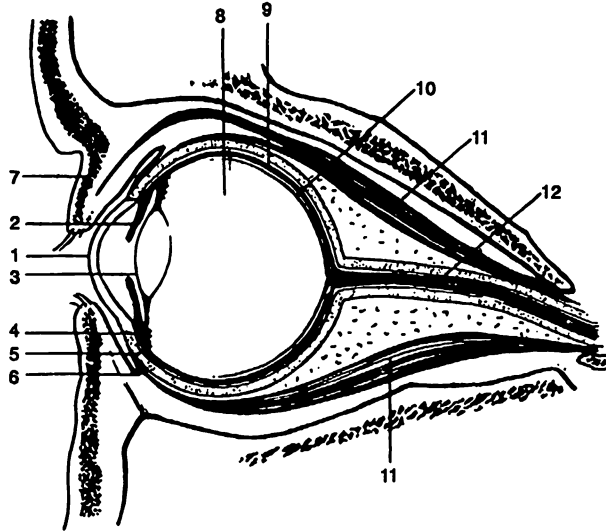
Třetí kapitolu jsme věnovali obecným vztahům mezi fyzikou a jinými vědními obory a nyní se podrobněji podíváme na jednu oblast, v níž mají fyzika a jiné vědy k sobě velice, velice blízko. Tato oblast se týká *vidění*. Přesněji, budeme mluvit o *barevném vidění*. V této kapitole se soustředíme hlavně na pozorovatelné jevy lidského vidění a v následující kapitole na fyziologické aspekty vidění jak u člověka, tak u jiných živočichů.

Vše začíná okem. Abychom pochopili vidění, potřebujeme jisté znalosti o oku. V další kapitole se budeme zabývat tím, jak pracují jednotlivé části oka a jak jsou navzájem propojeny s nervovým systémem. Teď si jen stručně popíšeme funkci oka (*obr. 35.1*).

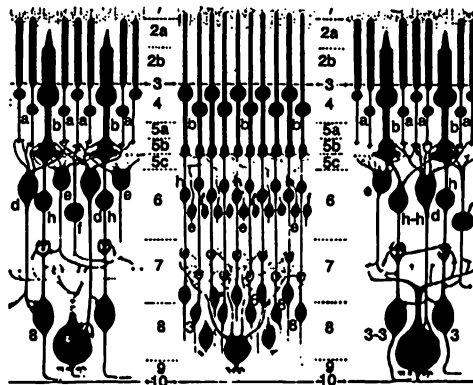
Světlo vstupuje do oka *rohovkou*. Již jsme mluvili o tom, jak se přitom láme a jak se vytváří obraz na sítnici umístěné v zadní části oka, takže na ni dopadá světlo z různých částí vnějšího zorného pole. *Sítnice* není úplně stejnorodá. Existuje na ní místo, jež se nazývá *žlutá skvrna*. Leží ve středu zorného pole, kde vidíme nejostřeji a používáme ji, když si chceme něco důkladně prohlédnout. Z naší zrakové zkušenosti dobře víme, že pro rozeznání detailů jsou okrajové části

## LIDSKÉ OKO

oka podstatně méně účinné než jeho střed. Na sítnici je také místo, odkud vycházejí nervy přenášející zrakové informace; je to *slepá skvrna*. Na ní se nenacházejí žádné citlivé části sítnice. Můžeme se o ní přesvědčit například tak, že když zavřeme levé oko díváme se přímo na nějaký předmět a pak začneme posouvat prst nebo nějaký jiný malý předmět ven ze zorného pole, najednou ho v jisté poloze neuvidíme. Víme o jediném praktickém využití tohoto jevu; jeden fyziolog se stal královým oblíbencem poté, co ho na tento jev upozornil. V průběhu nudných porad, které měl král se svými rádci, se mohl bavit „usekáváním jejich hlav“ tak, že se díval na jednoho a sledoval jak zmizela hlava druhého.



Obr. 35.1 Oko: 1–rohovka, 2–duhovka, 3–čočka, 4–řasnatá vlákna, 5–bělmo, 6–spojivka, 7–kruhový sval, 8–sklivec, 9–sítnice, 10–cévnatka, 11–oční svaly, 12–zrakový nerv



Obr. 35.2 Struktura sítnice (Světlo přichází zdola)

Na obrázku 35.2 je ve zvětšeném měřítku schématicky znázorněn průřez sítnicí. V různých částech má sítnice různou strukturu. Na okraji sítnice je nejvíc buněk, jež se nazývají *tyčinky*.

V blízkosti žluté skvrny najdeme u tyčinek i *čípky*. Jejich strukturu si popíšeme později. Čím blíže k žluté skvrně, tím je větší počet čípků a v samotné žluté skvrně jsou už jen tyto buňky. Jsou tam tak nahuštěny, že jsou mnohem jemnější nebo tenčí než kdekoli v jinde na sítnici. Znamená to, že ve středu zorného pole vidíme pomocí čípků, ale směrem k okraji jsou rozloženy tyčinky. Zajímavé je, že každá buňka sítnice citlivá ke světlu není spojena vláknem přímo s optickým nervem, ale je spojena s mnoha jinými buňkami, jež jsou tak navzájem propojeny. Jsou to v podstatě 4 druhy buněk; některé přenášejí informace na optický nerv, jiné jsou pospojovány hlavně „horizontálně“. Nyní se však nebudeme pouštět do takových detailů. Hlavní, co zdůrazňujeme, je, že světelný signál se již zde zpracovává. Informace z různých buněk se nedostávají přímo do mozku, bod po bodu, ale v sítnici dochází ke zpracování určité části informace pomocí kombinace informací z různých zrakových receptorů. Je důležité, abychom si uvědomili, že určité jevy spojené s mozkovou činností probíhají již v samotném oku.

## 35.2 BARVA ZÁVISÍ NA INTENZITĚ

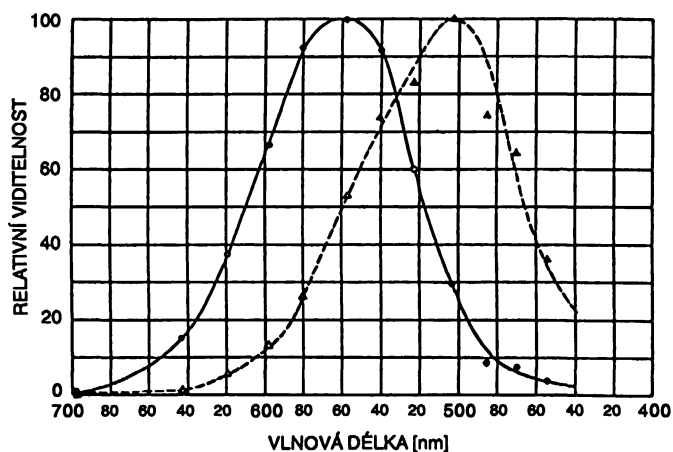
Jednou z nejpřekvapivějších vlastností vidění je adaptace oka na tmu. Když vyjdeme z rozsvíceného pokoje do tmy, vidíme chvíli velmi špatně, ale postupně lépe a lépe, až nakonec vidíme předměty, které jsme předtím vůbec neviděli. Při velmi malé intenzitě osvětlení, věci, které vidíme, nemají barvu. Je známo, že vidění přizpůsobené tmě je téměř zcela zprostředkováno tyčinkami, zatímco vidění v jasném světle je zprostředkováno čípkami. Tak tedy můžeme pochopit mnohé jevy jako důsledek přechodu od společné funkce tyčinek a čípků k samotné funkci tyčinek.

V mnoha případech, kdyby intenzita světla byla větší, bychom viděli barvy a zjistili bychom, že věci, které vidíme, jsou krásné. Například při pohledu teleskopem vidíme obrazy nejasných mlhovin jako černobílé. W. C. Miller v observatořích na Mt. Wilsonu a Mt. Palomaru měl dostatek trpělivosti, aby získal barevné snímky takových objektů. Nikdo nikdy okem tyto barvy neviděl, ale nejsou to umělé barvy, je to prostě dáno tím, že intenzita světla není dostatečná k tomu, abychom ho viděli čípkami v našem oku. Mezi nejokázalejší objekty tohoto druhu patří Prstencová mlhovina a Krabí mlhovina. První má vnitřní část krásně modrou s jasně červeným vnějším kolem a druhá má modrý opar prostoupený jasně červenou – oranžovými vlákny.

V jasném světle mají tyčinky velmi malou citlivost, ale ve tmě se časem jejich schopnost vidět světlo zvětšuje. Změny intenzity světla, na které je možno se adaptovat, jsou ve větším poměru než milion ku jedné. Tato adaptace se v přírodě neděje jen pomocí buněk jednoho druhu, ale funkce vidění se posouvá od buněk citlivých na jasné světlo, vidících barvy, tj. čípků, k tyčinkám – buňkám citlivým k malým intenzitám a přizpůsobivým šeru. Mezi zajímavé důsledky tohoto posunu patří, za prvé, že se vytratí barva a za druhé, že různě zbarvené předměty mají různý relativní jas. Ukazuje se, že tyčinky vidí lépe než čípkami směrem k modré barvě a čípkami vidí například červené světlo, zatímco pro tyčinky to je absolutně nemožné. Proto je červené světlo pro tyčinky černé. Dva barevné papíry, řekněme modrý a červený, přičemž červená barva může být na dobrém světle jasnější než modrá, se budou v přítmí, co se týká jasnosti, jevit zcela naopak. Je to velmi překvapující jev. Když si v tmavé místnosti prohlédneme barevný časopis nebo jiný barevný předmět, můžeme posoudit, které plochy jsou světlejší, a které jsou tmavší, a když ho pak vyneseme na světlo, uvidíme, jak zajímavě se mění jasnost toho, co se zdálo být nejjasnější, a co se nezdálo být tak jasné. Tento jev se nazývá *Purkyňův efekt*.

Na obrázku 35.3 máme křivky citlivosti oka v přítmí; přerušovaná čára odpovídá situaci, kdy používáme tyčinky, zatímco plná čára znázorňuje citlivost oka za světla. Vidíme, že tyčinky jsou

nejcitlivější pro zelenou oblast a čípký pro žlutou oblast. Červeně zabarvený papír (650 nm) vidíme, když je dobře osvětlený, ale ve tmě ho skoro nevidíme.



Obr. 35.3 Spektrální citlivost oka. Přerušovaná čára odpovídá tyčinkám, plná čára odpovídá čípkům.

Dalším projevem toho, že v průměru přebírají funkci vidění tyčinky, a že ty nejsou ve žluté skvrně, je fakt, že díváme-li se v průměru přímo na nějaký předmět, nevidíme ho tak ostře, jako když se na něj podíváme trochu z boku. Nejasnou hvězdu nebo mlhovinu můžeme někdy lépe vidět, když se na ni podíváme mírně ze strany, než když se na ní díváme přímo, protože ve středu žluté skvrny nemáme citlivé tyčinky.

Jiným zajímavým důsledkem toho, že směrem k okraji zorného pole počet čípků klesá, je skutečnost, že dokonce jasné zbarvené předměty přitom ztrácejí svou barvu. Přesvědčit se o tom je možné tak, že se díváme v určitém neměnném směru a necháme, aby se někdo, kdo drží v ruce nějaký barevný předmět, přibližoval do směru našeho pohledu ze strany. Dříve než se dostane přímo před nás, snažme se rozhodnout, jakou barvu má daný předmět. Zjistíme, že předmět vidíme mnohem dřív než jsme schopni určit jeho barvu. Doporučuje se vstupovat do zorného pole z opačné strany než je slepá skvrna, neboť jinak vzniká zmatek; nejdříve už téměř vidíme barvu, pak najednou nevidíme nic a pak opět vidíme barvu.

Další zajímavostí je, že okrajové části sítnice jsou velmi citlivé k pohybu. I když koutkem oka dobře nevidíme, když se na kraji našeho zorného pole pohne nějaký malý brouček, o němž ani nevíme, že tam je, ihned to zaregistrujeme. Všichni jsme stvořeni tak, že ostřeji vnímáme, když se něco pohne na okraji našeho zorného pole.

### 35.3 MĚŘENÍ BAREVNÉHO VJEMU

Nyní přejdeme k vidění za jasného světla, k vidění pomocí čípků a k otázce barvy, jež je pro toto vidění nejcharakterističtější. Jak víme, bílé světlo je možné rozložit pomocí hranolu na celé spektrum vlnových délek, které vnímáme jako různé barvy. Barvy, to jsou naše vjemy. Libovolný zdroj světla lze analyzovat pomocí difrakční mřížky nebo pomocí hranolu a lze určit jeho spektrální složení, tj. „množství“ světla každé vlnové délky. Některé světlo může obsahovat mnoho modré barvy, dost červené, málo žluté atd. Fyzikálně lze vše určit velmi přesně, otázkou však je, jakou barvu budeme vnímat. Je samozřejmé, že různé barvy nějak závisí na spektrálním



složení světla, problém je v tom, jaké spektrální charakteristiky způsobí různé barevné vjemy. Například, co je třeba udělat, abychom viděli zelenou barvu? Všichni víme, že prostě stačí vzít si zelenou část spektra. Je to však jediný způsob, jak lze získat zelenou nebo jakoukoliv jinou barvu?

Existuje více spektrálních rozložení, jež způsobí stejný vizuální efekt? Určitě ano. Jak brzy uvidíme, počet základních vizuálních efektů je velmi omezen, fakticky jsou jen tři, ale existuje nekonečné množství různých spektrálních křivek, jež můžeme nakreslit pro světlo přicházející z různých zdrojů. Potřebujeme vyřešit tuto otázku: Za jakých podmínek se různé rozložení světla jeví oku jako stejná barva?

Nejúčinnější psychofyzikální technikou k určení barev je ta, když se oko používá jako nulový přístroj. Přitom se nesnažíme definovat, co způsobuje, že barvu vnímáme jako zelenou, nebo za jakých okolností k tomu dochází. To by bylo příliš složité. Místo toho studujeme, za jakých podmínek jsou dva vizuální podněty nerozlišitelné. Pak nemusíme rozhodovat, zda dva lidé vidí stejné vjemy za různých okolností, ale spíš jen to, zda budou dva vjemy stejné pro jednu osobu stejně i pro osobu jinou. Nemusíme rozhodnout, zda to, co někdo cítí, když vidí něco zeleného, je stejné jako to, co cítí jiný při pohledu na stejnou věc. O tom stejně nic nevíme.

Pro ilustraci těchto možností můžeme použít čtyři projektory s filtry, jejich jas lze spojitě měnit v širokém rozmezí. Jeden má červený filtr a na plátně vytvoří červenou skvrnu, druhý má zelený filtr a vytváří zelenou skvrnu, třetí má modrý filtr a čtvrtý vytváří bílý kruh s černou skvrnou uprostřed. Zapneme-li nyní červené světlo a dále zelené, vidíme, že část, kde se barvy překrývají, v nás vyvolá vjem, který nenazýváme červenou – zelenou barvou, ale nové, v tomto případě žluté barvy. Změnou proporcí červené a zelené můžeme projít různými odstíny oranžové atd. Nastavíme-li filtry na určitý odstín žluté, můžeme tentýž odstín získat, dostat ne smísením těchto dvou barev, ale smísením některých jiných barev, například žlutého filtru a bílého světla nebo něčeho podobného, co vytváří stejný vjem. Takže různé barvy lze vytvářet nejen jedním způsobem, ale více způsoby, smísením barev z různých filtrů.

Tento náš objev lze vyjádřit analyticky. Například určitou žlutou barvu lze vyjádřit jako nějaký symbol  $Y$ , jenž je součtem určitého množství světla z červeného filtru ( $R$ ) a ze zeleného filtru ( $G$ ). Když k popisu jasu světla ( $R$ ) a ( $G$ ) použijeme písmena  $r$  a  $g$ , máme pro žluté světlo

$$Y = rR + gG. \quad (35.1)$$

Jak můžeme získat všechny různé barvy smísením dvou nebo tří světél různých pevně zvolených barev? Podívejme se, co lze v této souvislosti udělat. Všechny barvy určitě nezískáme jen smísením červené a zelené, neboť tato kombinace například nikdy nedá modrou. Když k nim přidáme modrou, střední část, kde se všechny tři barvy prolínají, lze zbarvit tak, že je skoro bílá. Sledováním střední části při mísení těchto různých barev zjistíme, že změnou jejich proporcí můžeme získat pozoruhodné spektrum barev a není vyloučeno, že smísením těchto tří barev je možné vytvořit všechny barvy. Povíme si, do jaké míry je to pravda; v podstatě je to tak a brzy uvidíme, jak lépe definovat jejich proporce.

Abychom to lépe objasnili, nastavíme projektory tak, aby se všechny skvrny vzájemně překrývaly a pak se pokusíme smísením dostat barvu, kterou bude mít vnější prstenec při zapnutí čtvrté lampy. To, co jsme považovali za bílou barvu čtvrtého projektoru, se teď jeví nažloutlé. Vhodnými změnami intenzity červené, zelené a modré barvy můžeme po několika pokusech najít barvu, která se velmi blíží k tomuto odstínu „krémové“, jakou má prstenec. Proto není těžké uvěřit, že můžeme vytvořit všechny barvy. Za chvíli se pokusíme udělat žlutou barvu, ale nejdřív si řekneme, že existuje barva, jejíž vytvoření může být velmi obtížné. Lidé, kteří přednášejí

o barvách, vytvářejí všechny možné barvy, ale nikdy ne *hnědou* a je dost těžké si vzpomenout, zda jsme vůbec někdy viděli hnědé světlo. Co se toho týká, tato barva se nikdy nepoužívá při vytváření světelných efektů na jevištích, takže se zdá, že vytvořit hnědé světlo může být nemožné. Abychom zjistili, zda lze hnědé světlo vytvořit, poznamenejme, že hnědé světlo je něco, co nejsme zvyklí vidět bez příslušného pozadí. Fakticky ho můžeme sestavit smísením červené a žluté. Na důkaz toho, že se díváme na hnědé světlo, prostě zvýšíme jas pozadí, proti kterému se na světlo díváme a zjistíme, že je to skutečně to, co nazýváme hnědou! Hnědá, to je vždy tmavá barva na světlejším pozadí. Hnědou barvu můžeme snadno měnit. Když dáme například pryč trochu zelené, dostaneme červenohnědou jako je barva čokolády, a když přidáme trochu zelené, dostaneme tu strašnou barvu, jakou mají uniformy americké armády, ale světlo této barvy není tak strašné samo o sobě; když ho vidíme proti světlému pozadí, je žlutavě zelené.

Nyní dejme na čtvrtou lampu žlutý filtr a pokusme se takovou barvu namístit. (Samozřejmě, že intenzita musí být v rozsahu jednotlivých lamp. Nemůžeme namístit příliš jasnou barvu, neboť lampy nemusí mít dostatečný výkon.) Žlutou však namístit můžeme. Použijeme směs zelené a červené a k tomu přidáme špetku modré, aby to bylo perfektní. Snad jsme ochotni věřit, že při dobrých podmínkách můžeme dokonale namístit jakoukoliv danou barvu.

Nyní si proberme zákony mísení barev. V první řadě jsme zjistili, že různá spektrální složení mohou vytvářet stejnou barvu. Dále jsme zjistili, že „libovolnou“ barvu lze vytvořit smísením tří barev – červené, modré a zelené. Nejzajímavější rys mísení barev je tento: Máme-li nějaké barevné světlo, řekněme  $X$ , které je pro oko nerozlišitelné od světla  $Y$  (může mít jiné spektrální složení, ale *jeví se* jako nerozlišitelné), nazýváme tato světla „stejnými“ v tom smyslu, že oko je vnímá jako stejná a píšeme

$$X = Y. \quad (35.2)$$

Zde máme jeden z velkých zákonů barev: Jsou-li dvě spektrální složení nerozlišitelná, a přidáme-li ke každému z nich, řekněme, světlo  $Z$  (zápis  $X + Z$  znamená, že obě světla svítí na stejné místo) a pak vezmeme  $Y$  a přidáme k němu stejné množství stejného světla  $Z$ , nové směsi jsou též navzájem nerozlišitelné

$$X + Z = Y + Z \quad (35.3)$$

Před chvílí jsme namísili žlutou barvu, aby odpovídala předloze. Osvítíme-li ji spolu s předlohou růžovým světlem, nové barvy si budou opět odpovídat. Takže přidání jakéhokoliv světla k barvám, které již jsou stejné, zanechá opět stejné barvy. Mohli bychom to shrnout tak, že máme-li jednu světla, která se barevně rovnají, když je vidíme vedle sebe a za stejných podmínek, jejich rovnost se zachová a jedno světlo můžeme zaměnit druhým při libovolném mísení barev. Fakticky se ukazuje, a je to velmi důležité a zajímavé, že tato rovnost barev světla nezávisí na charakteristikách oka v době pozorování. Víme, že když se dlouho díváme na jasnou červenou plochu nebo do jasného červeného světla, a pak se podíváme na bílý papír, zdá se být zelenavý a i ostatní barvy vidíme pozměněny. Když však máme nyní dvě stejná, řekněme, žlutá světla, jež skutečně vnímáme jako stejná, pak se nadlouho zahledíme na jasnou červenou plochu, a opět se podíváme zpět na naše žluté barvy, už nebudou vypadat jako žluté. Nevím, jak budou vypadat, ale přesto se budou jevit stále stejné. Proto, když se oko přizpůsobuje různě intenzitě světla, rovnost barev stále platí se zřejmou výjimkou, když se dostaneme do oblasti, kde je intenzita světla tak malá, že vidění se přesouvá z čípků na tyčinky. Pak už rovnost barev neplatí, neboť používáme jiný systém.

Druhý princip týkající se mísení barev je tento: Jakoukoliv barvu lze vytvořit ze tří různých barev, v našem případě z červené, zelené a modré. Jejich mísením ve vhodném poměru můžeme

## BAREVNÉ VIDĚNÍ

vytvořit barvu, jakou chceme, jak jsme si ukázali na našich dvou příkladech. Tyto zákony jsou velmi zajímavé i matematicky. A pro ty, jež matematické vyjádření zajímá, je uvedeme. Předpokládejme, že vezmeme naše tři barvy, červenou, zelenou a modrou, označíme je jako  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a budeme je nazývat našimi primárními barvami. Každou barvu pak lze vytvořit smísením těchto tří barev v určitých množstvích; například množství  $a$  barvy  $A$  plus množství  $b$  barvy  $B$  a množství  $c$  barvy  $C$  dává barvu  $X$ .

$$X = aA + bB + cC. \quad (35.4)$$

Předpokládejme, že jinou barvu  $Y$  lze vytvořit ze stejných barev.

$$Y = a' A + b' B + c' C. \quad (35.5)$$

Pak se ukazuje, že smísením těchto dvou světél se získá světlo, jež lze vytvořit tak, že sčítáme složky  $X$  a  $Y$  (je to jeden z důsledků zákonů, o nichž jsme právě mluvili):

$$Z = X + Y = (a + a') A + (b + b') B + (c + c') C. \quad (35.6)$$

Vypadá to jako matematika sčítání vektorů, kde  $(a, b, c)$  jsou souřadnice jednoho vektoru a  $(a', b', c')$  jsou souřadnice druhého vektoru, přičemž nové světlo  $Z$  je „součtem“ těchto vektorů. To je předmět, který vždy přitahoval fyziky i matematiky. Například Schrödinger napsal o barevném vidění nádherný článek, v němž rozvinul tuto teorii vektorů k analýze smísení barev.

Vzniká otázka, které primární barvy jsou správné. Něco takového jako správné primární barvy k smísení světla neexistuje. Z praktického hlediska mohou existovat tři barevné pigmenty, z nichž lze namíchat víc barevných odstínů a jež jsou užitečnější než jiné tři, ale to nás nyní nezajímá. Libovolná tři různě barevná světla<sup>43)</sup> lze vždy smísit ve správném poměru a vznikne jakákoliv jiná barva. Můžeme předvést tento fantastický fakt? Místo červené, zelené a modré použijeme v našich projektech červenou, modrou a žlutou. Můžeme použít červenou, modrou a žlutou k vytvoření dejme tomu zelené?

Mísením těchto tří barev v různých poměrech dostáváme různé barvy v rozsahu téměř celého spektra, ale přes mnohé pokusy zjistíme, že nic z toho se nepodobá zelené. Otázka zní: „Můžeme vytvořit zelenou?“ Ano, ale jak? Když do zelené přimícháme trochu červené, vznikne barva, kterou můžeme vytvořit pomocí určitého poměru žluté a modré! Takže nakonec jsme dosáhli rovnosti barev, jenomže jsme museli udělat malý podvod tím, že jsme přidali červenou na druhou stranu. Protože však máme určitou matematickou představu, chápeme, že jsme vlastně dokázali nikoliv to, že  $X$  lze vždy vytvořit, dejme tomu, z červené, modré a žluté, ale přidáním červené na druhou stranu jsme zjistili, že červená plus  $X$  se dá vytvořit z modré a žluté. Převedení červené na druhou stranu rovnice, můžeme interpretovat jako záporný příspěvek, takže dovolíme-li, aby koeficienty v rovnici, jako je (35.4), byly jak kladné tak i záporné, a interpretujeme-li záporný příspěvek tak, že znamená přidání dané barvy na druhou stranu, můžeme tvrdit, že jakoukoliv barvu lze vytvořit libovolnými třemi barvami a něco takového jako fundamentální primární barvy neexistuje.

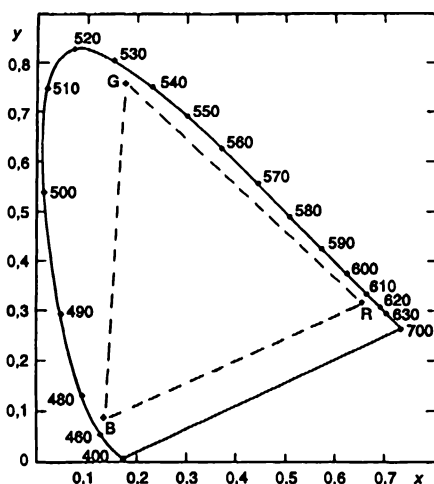
Můžeme se zeptat, zda existují takové tři barvy, z nichž lze získat všechny ostatní jen pomocí kladných příspěvků. Odpověď je, že neexistují. Každá sada tří primárních barev vyžaduje pro některé barvy záporné příspěvky a proto neexistuje jediný způsob, jak definovat primární barvy.

<sup>43)</sup> Samozřejmě s výjimkou případu, kdy barva jednoho z nich vznikne smísením barev druhých dvou.

V základních učebnicích se říká, že jsou to červená, zelená a modrá, ale to je dáno jen tím, že z těchto barev lze získat větší spektrum barev jen pomocí kladných příspěvků než pro některé jiné kombinace.

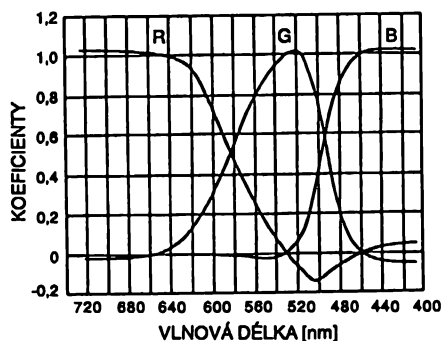
### 35.4 DIAGRAM BAREVNOSTI

Nyní se podívejme na kombinace barev na úrovni matematiky v geometrickém vyjádření. Je-li možné každou barvu reprezentovat rovnicí (35.4), můžeme ji znázornit jako vektor v prostoru, kde na osy barevných souřadnic nanášíme hodnoty  $a$ ,  $b$  a  $c$  a určité barvě odpovídá určitý bod. Odpovídají-li jiné barvě jiné hodnoty ( $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ), odpovídá jí jiný bod. Smísením těchto dvou barev vznikne barva, kterou získáme sčítáním těchto dvou vektorů. Tento diagram lze do roviny zjednodušit na následujícím základě: zdvojnásobíme-li pro nějakou barvu  $a$ ,  $b$  a  $c$ , tj. když je všechny zvětšíme ve stejném poměru, dostaneme stejnou barvu jen jasnější. Proto, rozhodneme-li se všechno zredukovat na stejnou světelnou intenzitu, můžeme použít projekce na rovinu, je to provedeno na obr. 35.4. Z toho vyplývá, že libovolná barva, kterou lze získat smísením dvou barev v libovolném poměru, se bude nacházet někde na čáře spojující tyto dva body. Například pro stejný poměr barev bude výsledná barva ležet ve středu mezi nimi a pro 1/4 jedné a 3/4 druhé bude ležet ve čtvrtině vzdálenosti od první k druhé. Vezmeme-li za primární barvy modrou, zelenou a červenou, vidíme, že všechny barvy, jež z nich můžeme vytvořit pomocí kladných koeficientů, leží uvnitř čárkovaného trojúhelníka, jež obsahuje skoro všechny běžné barvy. Všechny možné viditelné barvy jsou totiž ohraničeny zakřivenou čarou ohraničující divně tvarovanou plochu. Odkud pochází tato plocha? Kdosi jednou velmi pozorně sladil všechny viditelné barvy pomocí tří speciálních barev. Nemusíme ale kontrolovat všechny viditelné barvy, stačí, když si zkontrolujeme čisté spektrální barvy, spektrální čáry. Libovolné světlo můžeme považovat za součet různých kladných příspěvků různých čistých spektrálních barev – čistých z fyzikálního hlediska. Dané světlo bude obsahovat určité množství spektrálních barev – červené, žluté, modré atd. Proto, když víme, kolik je třeba každé naší primární barvy k vytvoření těchto čistých složek, můžeme vypočítat, kolik je jí třeba k vytvoření dané barvy. Najdeme-li tedy barevné koeficienty všech spektrálních barev pro libovolné dané tři primární barvy, můžeme sestavit celou tabulku mísení barev.



Obr. 35.4 Standardní diagram barevnosti

## BAREVNÉ VIDĚNÍ



Obr. 35.5 Barevné koeficienty pro čisté spektrální barvy vyjádřené pomocí určité sady primárních barev. (R – červená, G – zelená, B – modrá)

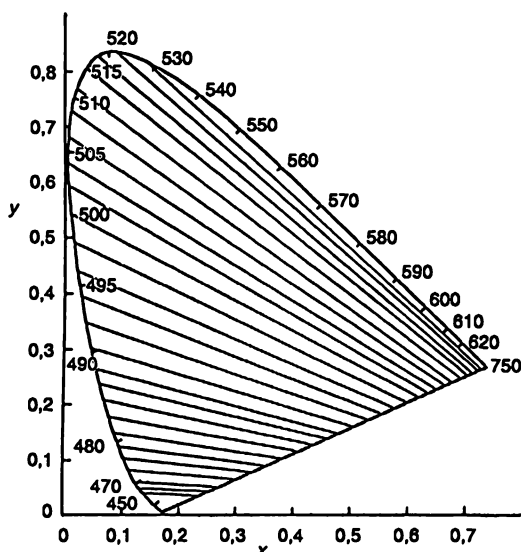
Příklad takového experimentálního mísení barev je na obr. 35.5. Je na něm vidět, jaké množství každé ze tří různých primárních barev, červené, zelené a modré, je třeba k vytvoření všech spektrálních barev. Na levém konci spektra je červená, vedle je žlutá a tak až po modrou. Všimněme si, že v některých bodech jsou nutná záporná znaménka. Na základě takových údajů je pak možné najít polohy všech barev na náčrtku, na němž jsou osy  $x$  a  $y$  dány do souvislosti s množstvím různých použitých primárních barev. Takovým způsobem byly nalezeny zakřivené hraniční čáry. Jsou to polohy čistých spektrálních čar. Každou libovolnou barvu lze vytvořit pomocí sčítání spektrálních čar, proto vše, co lze vytvořit spojením jedné části hraniční čáry s její druhou částí, odpovídá barvám přítomným v přírodě. Přímá čára spojuje krajní fialový bod s krajním červeným bodem spektra. Je to poloha purpurové. Uvnitř hraničních čar jsou barvy, jež lze vytvořit pomocí světla a vně barvy, jež nelze pomocí světla vytvořit, a které nikdo nikdy neviděl (snad jen v halucinacích).

## 35.5 MECHANIZMUS BAREVNÉHO VIDĚNÍ

Další stránka problému souvisí s otázkou, proč se barvy tak chovají. Podle nejjednodušší teorie, kterou navrhl Young a Helmholtz, se předpokládá, že v oku jsou tři různé pigmenty citlivé na světlo, jež mají různá absorpční spektra, takže jeden pigment silně absorbuje, dejme tomu, červené světlo, druhý modré a třetí zelené světlo. Když je osvětíme, nastane v těchto třech oblastech různá absorpce a tyto tři části informace se v mozku nebo v oku, případně někde jinde zpracovávají na výsledný barevný vjem. Snadno lze ukázat, že z těchto předpokladů by vyplývala všechna pravidla mísení barev. O celé věci se mnoho debatovalo, další problém je samozřejmě určit absorpční charakteristiky každého z těchto tří pigmentů. Bohužel se ukazuje, že vzhledem k tomu, že barevné souřadnice lze libovolně transformovat, můžeme při experimentech s mísením barev najít jen všechny možné lineární kombinace absorpčních křivek, ale ne křivky pro jednotlivé pigmenty. Lidé se snažili různými způsoby získat určitou křivku, jež by popsala nějakou fyzikální vlastnost oka. Jedna z nich se nazývá křivka jasu a je na obr. 35.3. Jsou tam dvě křivky, jedna pro vidění za šera, druhá pro vidění za světla – ta je křivkou jasu pro čípky. Měří se tak, že se zjišťuje, jaké je nejslabší barevné světlo, jež jsme ještě schopni zaregistrovat. Určuje míru citlivosti oka v různých spektrálních oblastech. Tu lze změřit i jiným zajímavým způsobem. Vezmeme-li dvě barvy, jimiž budeme střídavě osvětlovat nějakou plochu a bude-li frekvence střídání barev dost nízká, budeme pozorovat blikání. Budeme-li barvy střídát rychleji, při určité

frekvenci, jež závisí na jas světla, blikání ustane. Může to být třeba při 16 opakováních za sekundu. Nyní nastavíme jas nebo intenzitu obou barev tak, aby při 16 cyklech blikání ustalo. Abychom s taktó nastavenou intenzitou světla opět pozorovali blikání barev, musíme frekvenci hodně snížit. Takže při vyšších frekvencích vzniká blikání jasu a při nižších frekvencích blikání barev. Pomocí techniky blikání lze nastavit dvě barvy na „stejný jas“. Výsledek je téměř stejný jako výsledky měření prahové citlivosti oka na vidění světla pomocí čípků. Většina pracovníků používá k definici křivky jasu tuto metodu.

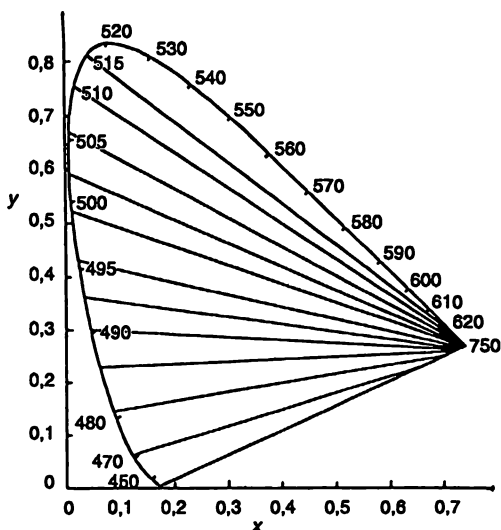
Nacházejí-li se v oku tři pigmenty citlivé na barvy, je třeba pro každý z nich určit tvar absorpčního spektra. Jak? Víme, že jsou lidé, kteří jsou barvoslepi – osm procent mužů a půl procenta žen. Většina barvoslepých lidí nebo lidí s abnormálním barevným viděním mají jinou míru citlivosti k různým barvám, ale k vytvoření dané barvy stále potřebují tři různé barvy. Jsou však i tací, jež se nazývají dichromati a kteří získávají libovolný barevný vjem jen pomocí dvou primárních barev. Vnucuje se tady myšlenka, že jim chybí jeden ze tří pigmentů. Kdybychom našli tři druhy barvoslepých dichromatů, kteří mají různá pravidla mísení barev, jedněm by měla chybět červená, druhým zelená a třetím modrá pigmentace. Měření těchto tří typů bychom mohli určit tři hledané křivky! Tři druhy barvoslepých dichromatů skutečně existují. Dva z nich jsou dost běžné a třetí je dost vzácný. Pomocí nich se podařilo určit absorpční spektra pigmentů.



Obr. 35.6 Polohy barev zaměňovaných deuteranopy

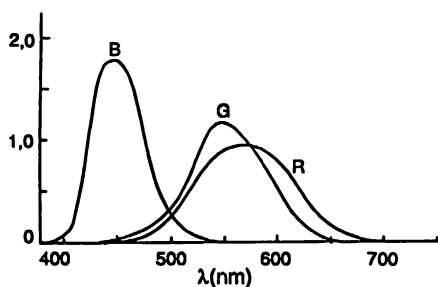
Na obr. 35.6 je znázorněno mísení barev pro určitý druh barvoslepých osob, tzv. deuteranopů. Pro ně nejsou polohy konstantních barev body, ale určité přímky, podél nichž se jim barva jeví jako stejná. Pokud je teorie, že jim chybí jedna ze tří informací, správná, všechny takové přímky by se měly protínat v jednom bodě. Když tento graf pozorně změříme, zjistíme, že se dokonale protínají. Ovšem, je to proto, že graf byl sestaven matematikem a nepředstavuje skutečné údaje! Je pravda, podíváme-li se na nejnovější články se skutečnými údaji, na grafu, jako na obr. 35.6, není průsečík všech přímek na správném místě. Pomocí přímek na uvedeném obrázku nemůžeme určit rozumné spektrum; potřebovali bychom negativní i pozitivní absorpci pro různé oblasti. Pomocí nových údajů výzkumů Justové vychází každá z absorpčních křivek všude kladná.

## BAREVNÉ VIDĚNÍ



Obr. 35.7 Polohy barev zaměňovaných protanopy

Na obr. 35.7 je znázorněn jiný typ barvosleposti, tzv. protanopický typ, jenž má ohnisko v blízkosti červeného konce hraniční křivky. To přibližně odpovídá i údajům Justové. Pomocí tří typů barvosleposti byly nakonec definitivně určeny tři křivky citlivosti pigmentů, jak jsou znázorněny na obr. 35.8. Definitivně? Snad. Otázkou je, zda platí třipigmentová teorie, zda je barvoslepost důsledkem toho, že jeden pigment chybí a dokonce i to, zda jsou údaje o mísení barev u barvoslepých správné. Různí odborníci mají různé výsledky. Na tomto poli se stále ještě pracuje.

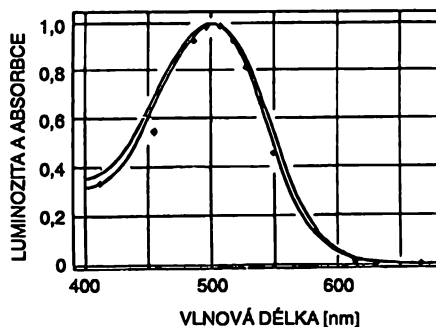


Obr. 35.8 Spektrální citlivost receptorů normálního trichromata

### 35.6 FYZIOCHEMIE BAREVNÉHO VIDĚNÍ

A což tak zkontrolovat, zda tyto křivky platí pro skutečné pigmenty v oku? Pigmenty, jež lze získat ze sítnice, se většinou skládají z pigmentu nazvaného rhodopsin (oční purpur). Jeho nejzajímavější vlastností je za prvé, že se nachází téměř u všech obratlovců a za druhé, že jeho křivka citlivosti se krásně shoduje s citlivostí oka, jak vidíme na obr. 35.9. Jsou tam naneseny ve stejném měřítku citlivosti rhodopsinu a oka adaptovaného na tmou. Je jasné, že to je pigment, pomocí kterého vidíme za šera; oční purpur je pigment tyčinek a nemá nic společného s barevným viděním. Tento fakt byl zjištěn v roce 1877. Dokonce i dnes lze říci, že barevné

pigmenty čípků se nikdy nepodařilo získat ve zkumavce. V roce 1958 bylo možné tvrdit, že barevné pigmenty nikdy nikdo neviděl. Od té doby Rushton pomocí jednoduchého a krásného experimentu dva z nich detekoval.



Obr. 35.9 Citlivost oka přizpůsobeného tmě v porovnání s absorpční křivkou rhodopsinu

Těžkosti zřejmě spočívají v tom, že když je oko tak málo citlivé na jasné světlo ve srovnání s citlivostí na nízké intenzity, potřebuje k vidění mnoho rhodopsinu, ale nepotřebuje tolik barevných pigmentů k vidění barev. Rushtonova myšlenka byla ponechat pigmenty v oku a nějak je změřit. Provedl to následovně. Existuje přístroj nazvaný oftalmoskop, jímž se pomocí čoček vyše světlo do oka a odražené světlo přicházející zpět se soustředí do ohniska. Pomocí tohoto přístroje lze zjistit, kolik světla se odrazilo zpět. Tak lze měřit koeficient odrazu světla, které prošlo pigmentem dvakrát (světlo se na očním pozadí odráží a znovu prochází pigmentem při návratu zpět). Příroda není vždy tak krásně organizovaná. Čípky jsou zkonstruovány tak zajímavě, že světlo, které vstupuje do čípku, se odráží od stěn a postupuje dolů k malým citlivým bodům ve vrcholu. Světlo jde až k citlivému bodu, odráží se a vrací zpět a opět vylétá ven, takže na své cestě prochází kolem velkého množství tohoto pigmentu. Při pohledu na žlutou skvrnu, kde nejsou tyčinky, nám rhodopsin situaci nekomplikuje. Ale barva sítnice byla pozorována již dávno, je oranžovo – růžová, jsou v ní také krevní cévy a materiál zadní stěny oka, jenž má také svou barvu. Jak víme, že se díváme na pigment? Odpověď je tato: Za prvé, vezmeme si barvoslepu osobu, která má méně pigmentu a pro kterou je proto možné snadněji provést analýzu. Za druhé, různé pigmenty, jako rhodopsin, mění svou intenzitu, když je vybíluje světlo; při osvětlení mění svou koncentraci. Proto při sledování absorpčního spektra oka osvětlil Rushton celé oko dalším světlem, které měnilo koncentraci pigmentu a měřil změnu, která nastala ve spektru. Samozřejmě, že tento rozdíl nemá nic společného s množstvím krve nebo s barvou odrazových vrstev apod., ale závisí jen na pigmentu. Tak Rushton získal křivku pro protanopické oko, která je na obr. 35.10.

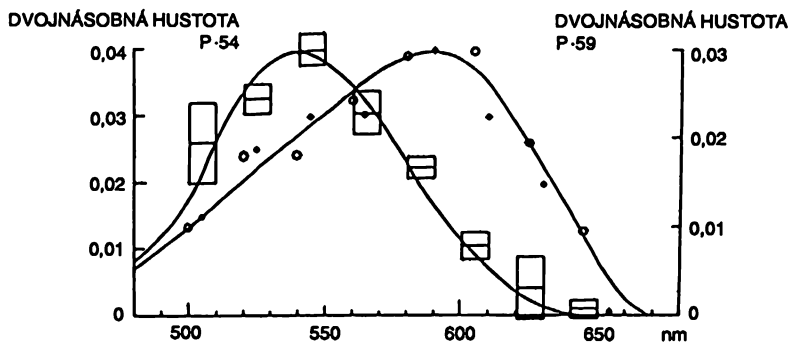
Druhá křivka na obr. 35.10 je křivka získaná pro normální oko. Tato křivka vznikla měřením normálního oka. Známe-li vlastnost jednoho pigmentu, můžeme vybílit druhý pigment červeným světlem, na nějž není první pigment citlivý. Červené světlo nemá na protanopické oko vliv, ale ovlivňuje normální oko, takže tak můžeme získat křivku pro chybějící pigment. Tvar jedné křivky se shoduje se zelenou křivkou Justové, ale červená křivka je o něco posunuta. Snad se dostáváme na správnou stopu, ale je možné, že ne, neboť poslední výzkumy s deuteranopy neukazují na to, že by nějaký pigment chyběl.

Otázka barvy není jen otázkou fyziky světla. Barva je *vjem* a *vjem* barvy se v různých situacích mění. Například máme-li růžové světlo vytvořené překrýváním bílého a červeného světla (růžová



## BAREVNÉ VIDĚNÍ

je jediná barva, kterou můžeme vytvořit pomocí bílé a červené), můžeme ukázat, že bílá se bude zdát modrá. Postavíme-li do cesty paprskům nějaký předmět, dostaneme od něho dva stíny – jeden osvětlený pouze bílým světlem a druhý pouze červeným světlem. Většině lidí se zdá, že „bílý“ stín je modrý, ale když ho zvětšujeme, až pokryje celé plátno, najednou vidíme, že je bílý a ne modrý! Další podobné efekty můžeme získat smísením červeného, žlutého a bílého světla. Červená, žlutá a bílá mohou vytvořit pouze oranžovožluté barvy, tedy když je smísíme v přibližně stejném poměru, dostaneme jen oranžové světlo. Navzdory tomu, když z těchto světél vytvoříme stíny s různě překrývajícími se barvami, dostaneme celou sérii nádherných barev, které tam vlastně nejsou (světlo je jen oranžové), ale jsou v našich vjemech. Jasně vidíme mnoho různých barev, které jsou zcela jiné než „fyzikální“ barvy v paprsku. Velmi důležité je, abychom si uvědomili, že již sítnice o světle „přemýšlí“; porovnává to, co vidí v jedné oblasti s tím, co vidí v druhé, i když si to neuvědomuje. O našich poznatcích, jak to sítnice dělá, se dočtete v další kapitole.



Obr. 35.10 Absorpční spektrum barevného pigmentu barvoslepého protanopa (čtverce) a normálního oka (tečky)

# Mechanismus vidění

---

- 36.1 BAREVNÝ VJEM
- 36.2 FYZIOLOGIE OKA
- 36.3 TYČINKY
- 36.4 SLOŽENÉ OKO HMYZU
- 36.5 JINÉ OČI
- 36.6 NEUROLOGIE ZRAKU

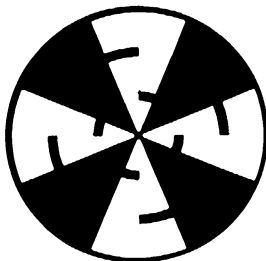
## **36.1 BAREVNÝ VJEM**

Při studiu pocitu vidění si musíme uvědomit, že nevidíme náhodné barevné nebo světelné skvrny (mimo galerie moderního umění)! Když se na něco díváme, vidíme člověka nebo věc; jinými slovy mozek interpretuje, co vidíme. Jak to dělá, nikdo neví a je třeba dodat, že to dělá na velmi vysoké úrovni. I když k tomu, abychom rozeznali člověka, potřebujeme dlouhou zkušenost, má vidění mnoho stránek, které jsou mnohem elementárnější, ale které také zahrnují kombinování informací z různých částí toho, co vidíme. Abychom pochopili vytváření celkového obrazu, stojí za to prostudovat první stupně skládání informací z různých buněk sítnice. V této kapitole se soustředíme hlavně na tento aspekt vidění, i když se vedle toho zmíníme i o dalších problémech, jež s tím souvisejí.

Příkladem akumulace současných informací z různých částí oka na velmi elementární úrovni, aniž bychom si to uvědomovali nebo mohli vůlí ovládat, byl modrý stín vytvořený bílým světlem při současném osvětlení plátna bílým a červeným světlem. Tento efekt zahrnuje přinejmenším naši znalost o tom, že pozadí plátna je růžové, i když se díváme jen na modrý stín, z něhož do našeho oka přichází jen bílé světlo. Někde došlo ke spojení různých částí informací. Čím známější a úplnější je kontext toho, co vidíme, tím udělá oko větší korekce všech zvláštností. Land skutečně ukázal, že smísíme-li tuto zdánlivou modrou s červenou v různých poměrech pomocí dvou průhledných fotografických desek, které různě absorbují červené a bílé světlo, pak lze dosáhnout celkem věrného znázornění reálné scény s reálnými předměty. V tomto případě dostaneme také mnoho intermediálních zdánlivých barev analogických tomu, co bychom dostali

smísením červené a modro – zelené; zdá se to být téměř úplný systém barev, ale podíváme-li se na ně velmi pozorně, vidíme, že nejsou příliš dobré. I tak je překvapující, jak mnoho můžeme získat pouze z červené a bílé. Čím víc je scéna podobná reálné situaci, tím více jsme schopni vykompenzovat skutečnost, že světlo není ve skutečnosti žádné jiné, jen růžové!

Dalším příkladem je vznik „barev“ na černobílém rotujícím kotouči, jehož černé a bílé plochy jsou znázorněny na *obr. 36.1*. Při rotaci kotouče jsou změny světlé a tmavé stejné pro jakýkoliv poloměr, rozdíle je jen v pozadí pro dva druhy „proužků“. A přece, jeden z prstenců se jeví zbarvený jednou barvou a druhý druhou.<sup>44)</sup> Proč je tyto barvy vidět, to zatím ještě nikdo neví, ale je jasné, že dochází ke skládání informací na velmi elementární úrovni, nejpravděpodobněji v samotném oku.



**Obr.36.1** Při rotaci kotouče se na jednom z tmavých prstenců objeví barvy. Když se změní směr rotace kotouče, barvy se objeví na druhém prstenci.

Téměř všechny dnešní teorie barevného vidění se shodují v tom, že údaje o mísení barev nasvědčují, že v čípcích oka jsou jen tři druhy pigmentů, a že k barevnému vjemu dochází v podstatě díky spektrální absorpci v těchto třech pigmentech. Ale výsledný vjem, který je spojen s absorpčními charakteristikami těchto pigmentů, není roven nutně součtu jednotlivých vjemů. Všichni souhlasíme s tím, že žlutá prostě nevypadá jako červená – zelená; objev, že světlo je ve skutečnosti směsí barev, může být pro mnoho lidí obrovským překvapením. Je zřejmé, že vnímání světla souvisí s jiným procesem než s pouhým mísením. Hudební akord je tvořen například třemi tóny, jež jsou stále přítomny a když se dobře zaposloucháme, můžeme je slyšet každý zvlášť. Nemůžeme se však dobře zadívat a uvidět červenou a zelenou zvlášť.

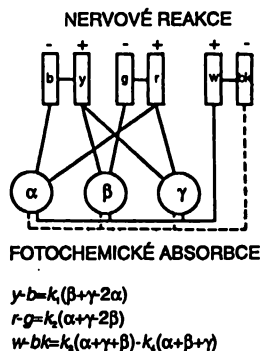
Starší teorie vidění tvrdily, že existují tři pigmenty a tři druhy čípků, každý obsahující jeden pigment, a že nervy spojují každý čípek s mozkem, takže do mozku se přenáší trojí informace a tam už se s ní může dít cokoli. To je samozřejmě neúplná představa. Objev, že informace se přenáší do mozku optickým nervem, nic neznamená, protože to není ani jen začátek řešení našeho problému. Musíme si položit základnější otázky: Záleží na tom, kde se informace spojují, vyplývá z toho nějaký rozdíl? Je důležité to, že se informace přenáší do mozku optickým nervem nebo může předtím provést sítnice nějakou analýzu? Na obrázku jsme viděli, že sítnice je velmi komplikovaná s množstvím propojení (*obr. 35.2*), a že by mohla vykonávat nějakou analýzu.

Lidé studující anatomii a vývoj oka ukázali, že sítnice je ve skutečnosti součástí mozku. Po dobu embryonálního vývoje se část mozku vysune dopředu, přičemž se vyvinou dlouhá vlákna, která potom spojují oko s mozkem. Sítnice je vnitřně organizována stejně jako mozek a kdosi to výstižně vyjádřil takto: „Mozek si našel způsob, jak se dívat na svět.“ Oko je část mozku, která se takříkajíc dotýká vnějšího světla. Není proto nepravděpodobné, že už v samotné sítnici nastává určitá analýza barev.

<sup>44)</sup> Barvy závisí na rychlosti otáčení, intenzitě osvětlení a do určité míry na tom, kdo se dívá, a jak soustředěně se na ně dívá.

## BAREVNÝ VJEM

Tím se nám nabízí zajímavá možnost. U žádného jiného smyslu, který umožňuje nějaká měření, nedochází před vstupem do nervu k tak velkému množství procesů, jež by bylo možné nazvat výpočty. Pro všechny ostatní smysly probíhají výpočty v samotném mozku, kde je tolik vzájemných spojů, že dostat se na určité místo a provést tam měření, je téměř nemožné. U zrakového smyslu máme světlo, tři vrstvy buněk vykonávajících výpočty a výsledek se přenáší zrakovým nervem. Máme proto první možnost fyziologicky pozorovat, jak asi pracují první vrstvy mozku při svých krocích. Je to dvojnásob zajímavé, nejen z hlediska vidění, ale i z hlediska celkové fyziologie.



Obr. 36.2 Nervové spoje podle „oponentní“ teorie barevného vidění

Skutečnost, že existují tři pigmenty neznamena, že musí být tři druhy vjemů. Jiná teorie barevného vidění má zcela protikladná schémata uspořádání barev (obr. 36.2). Podle ní jedno z nervových vláken přenáší hodně impulsů, když oko vidí žlutou barvu a málo impulsů, když vidí modrou. Další nervové vlákno přenáší stejným způsobem zelenou a červenou informaci a další bílou a černou. Jinak řečeno, někdo se již pokusil odhadnout způsob připojení a metodu výpočtu.

Problémy, jež bychom rádi vyřešili odhadem těchto výpočtů, souvisí s otázkou zdánlivých barev, které vidíme na růžovém podkladě, tím, co se stane, když se oko adaptuje na různé barvy a otázkou tzv. psychologických jevů. Psychologickými jevy jsou například takové jevy, jako že bílou „nechtíme“ jako červenou, žlutou a modrou. Tato teorie barevného vidění dále pokročila, protože psychologové tvrdí, že existují čtyři zdánlivé čisté barvy: „Existují čtyři stimuly, jež mají pozoruhodnou schopnost vyvolat psychologicky jednoduché barvy – modrou, žlutou, zelenou a červenou. Na rozdíl od žlutohnědé, červenohnědé, purpurové nebo od většiny odlišitelných barev jsou tyto jednoduché barvy nesmíšené v tom smyslu, že žádná z nich se nezúčastňuje na podstatě druhé; přesněji modrá není nažloutlá, načervenalá nebo nazelenalá atd.; jsou to psychologicky primární barvy.“ To nazýváme psychologickým faktem. Abychom zjistili, na základě čeho se došlo k tomuto konstatování, musíme opravdu těžko hledat v celé odborné literatuře. Vše, co o tom najdeme v moderní literatuře, je opakování toho, co jsme citovali. Případně bývá citován jistý německý psycholog, pro nějž je uznávanou autoritou Leonardo da Vinci, který, jak všichni dobře víme, byl velký umělec. Říká: „Leonardo si myslel, že existuje pět barev.“ Hledáme-li dál, v ještě starší knize najdeme takový důkaz: „Purpurová je červená – modrá, oranžová je červená – žlutá, ale můžeme vidět červenou jako purpurovo – oranžovou? Není červená a modrá jednodušší než purpurová nebo oranžová? Průměrná osoba, které se zeptáte, jaké jsou jednoduché barvy, vám vyjmenuje červenou, žlutou a modrou, tyto tři a někteří pozorovatelé dodají ještě čtvrtou, zelenou. Psychologové si zvykli považovat tyto čtyři za

významné barvy.“ Taková je tedy situace v psychologické analýze věci. Když každý říká, že jsou tři, tak jsou tři, a když někdo řekne, že jsou čtyři a oni chtějí, aby byly čtyři, tak budou čtyři. Na tom jsou vidět těžkosti psychologického výzkumu. Je jasné, že máme takové pocity, ale informace o nich lze získat jen velmi těžko.

Druhým směrem, kterým se můžeme ubírat, je směr fyziologický, to je experimentálně zjistit, co se ve skutečnosti děje v mozku, v oku, v sítnici nebo kdekoli v a můžeme objevit, že se po určitých nervových vláčkách přenášejí určité kombinace impulsů z různých buněk. Mimo chodem, primární pigmenty se nemusí nacházet v oddělených buňkách; mohou být buňky, jež obsahují směsi různých pigmentů, buňky s červeným a zeleným pigmentem, buňky, kde jsou všechny tři pigmenty (informace od všech tří je pak informace o bílé barvě) atd. Existuje mnoho způsobů, jak lze celý systém poskládat a na nás je, abychom objevili, jak je to v přírodě. Nakonec, můžeme mít naději, že pochopíme-li fyziologické souvislosti, potom aspoň zčásti pochopíme psychologické aspekty, o nichž jsme mluvili. Proto se podíváme tímto směrem.

## 36.2 FYZIOLOGIE OKA

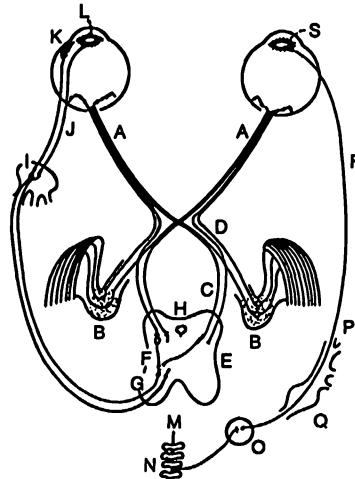
Abychom si připomněli propojení uvnitř sítnice, znázorněné na *obr. 35.2*, nebudeme mluvit jen o barevném vidění, ale o vidění obecně. Sítnice je ve skutečnosti jako povrch mozku. I když skutečný obraz, jak ho vidíme mikroskopem, je o něco komplikovanější než tento schématický náčrt, můžeme při pozorné analýze vidět všechna vzájemná spojení. Nejsou pochybnosti, že jedna část povrchu sítnice je spojena s druhými částmi a že informace, jež se šíří v dlouhých axonech k nervovým buňkám, jsou kombinace informací z mnoha buněk. Jsou zde tři vrstvy buněk s navazujícími funkcemi: buňky sítnice, jež jsou ovlivňovány světlem, intermediální buňky, které přebírají informace od jednotlivých nebo od několika buněk sítnice a odevzdávají je buňkám v třetí vrstvě, odkud se přenášejí do mozku. Buňky v těchto vrstvách jsou křížově propojeny všemi možnými směry.

Nyní přejdeme k některým stránkám struktury a činnosti oka (viz *obr. 35.1*). Zaostrování světla se uskutečňuje hlavně rohovkou, díky jejímu zakřivenému povrchu, na němž se paprsky lámou. Proto nevidíme dobře pod vodou, neboť ve vodě nemáme dostatečný rozdíl mezi indexy lomu rohovky, který je roven 1,37 a vody, jenž je 1,33. Za rohovkou je tekutina s indexem lomu téměř 1,33 a pak čočka, která má velmi zajímavou strukturu: skládá se ze série vrstev jako cibule, jenomže je celá průhledná. Uprostřed má index lomu 1,40 a na krajích 1,38. (Bylo by dobré, kdybychom uměli vyrobít optické sklo s proměnlivým indexem lomu. Pak bychom nemuseli zakřivovat povrch čoček, jako to musíme dělat při konstantním indexu.) Navíc rohovka nemá tvar kulové plochy. U sférické čočky se projevuje určitá sférická aberace. Rohovka je na okrajích „plošší“ než kulová čočka, takže má menší sférickou aberaci! Pomocí systému rohovka – čočka se světlo zaostruje na sítnici. Při pohledu na blízké a vzdálenější předměty se čočka napíná nebo uvolňuje, čímž přizpůsobuje ohnisko různým vzdálenostem. K přizpůsobení oka celkovému množství světla slouží duhovka, podle níž udáváme barvu očí jednotlivých osob – hnědou, modrou apod. Když se množství světla zvětšuje nebo zmenšuje, duhovka se stahuje nebo rozšiřuje.

Podívejme se na nervový systém, jenž řídí akomodaci čočky, pohyby oka, svaly, jež pohybují okem a duhovkou a který je schématicky znázorněn na *obr. 36.3*. Největší část informace, jež vychází z oka po optickém nervu *A*, se rozdělí do dvou svazků (o nichž ještě bude řeč) a tak jde do mozku. Několik vláken, které nás nyní zajímají, však nejde přímo do vizuálního centra v mozku, kde „vidíme“ obrazy, ale místo toho jdou do mezimozku (*H*). Jimi se měří osvětlení a nastavuje se clona duhovky, když je obraz rozmazaný, snaží se zkorrigovat čočky, nebo když je

obraz rozdvojený, snaží se nastavit oči na binokulární vidění. Procházejí mezimozkem a zpětně se napojují na oko. *K* jsou svaly, jež ovládají akomodaci čoček a *L* jsou další svaly, jež jsou napojeny na duhovku. Duhovka má dva systémy svalů. Jeden tvoří kruhový sval *L*, který při podráždění duhovku stahuje a uzavírá. Jeho činnost je velmi rychlá a je přímo spojen s mozkem prostřednictvím krátkých axonů. Druhý, opačně působící systém, tvoří radiální svaly, takže, když se setmí a kruhový sval se uvolní, radiální svaly duhovku rozevřou. Zde se setkáváme, jako na mnoha jiných místech v těle, s několika svaly, jež působí v opačných směrech. V každém takovém případě je nervový systém ovládající svaly velmi jemně vyvážen, takže, když se vyšle signál, aby se jeden sval stáhnul, automaticky se vysílá i signál k uvolnění druhého svalu. Duhovka je v tom vzácnou výjimkou: nervy, jež způsobují stažení duhovky, jsme si již popsali, ale o nervech, které způsobují její roztážení, nikdo neví, odkud přesně přicházejí. Vedou někam dolů do míchy v hrudní části páteře, z míchy vedou vzhůru krčními gangliemi zpět do hlavy, aby nakonec ovládly zpětný pohyb duhovky. Vskutku, tento signál prochází zcela jiným nervovým systémem, vůbec ne centrálním, ale sympatickým nervovým systémem. Je to velmi divný způsob zabezpečení správné funkce.

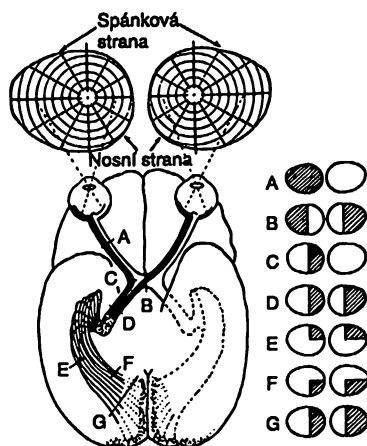
Další zvláštní věc týkající se oka jsme si již jednou zdůraznili. Jde o to, že buňky citlivé na světlo jsou na opačné straně, takže světlo musí projít několika vrstvami jiných buněk, než se dostane k receptorům – vnitřní strana je obrácena směrem ven! Vidíme, že některé vlastnosti oka jsou podivuhodné a některé jsou zdánlivě hloupé.



Obr. 36.3 Nervové mezipojení pro mechanické ovládání očí

Obrázek 36.4 znázorňuje spojení mezi očima a částí mozku, která má přímý vztah k procesu vidění. Ihned za bodem *D* vnikají vlákna zrakových nervů do určité zóny nazvané geniculatum laterale, odkud jdou do části mozku nazvané kůrové zrakové centrum. Všimněme si, že část vláken jde z každého oka do opačné části mozku, takže vytvořený obraz je neúplný. Zrakové nervy z levé části pravého oka procházejí optickým křížem (chiasma opticum) *B* a přidávají se k nim nervy z levé části levého oka. Takže levá část mozku dostává všechny informace přicházející z levé části každého oka, tj. z pravé části vizuálního pole, zatímco pravá strana mozku vidí levou část vizuálního pole. Tak se skládají informace z každého oka k určení vzdálenosti objektů. V tom spočívá binokulární systém vidění.

## MECHANIZMUS VIDĚNÍ



Obr. 36.4 Nervové spojení očí se zrakovým centrem

Spojení mezi sítnicí a zrakovým centrem jsou velmi zajímavá. Poškodí-li se část sítnice, celé nervové vlákno odumře a podle toho můžeme zjistit, kde bylo připojeno. Ukazuje se, že v principu jde o spojení jedna k jedné – každému bodu na sítnici odpovídá jeden bod v zrakovém centru a body, jež jsou velmi blízko sebe na sítnici, jsou blízko sebe i v zrakovém centru. Zrakové centrum tak ještě stále odpovídá prostorovému seskupení tyčinek a čípků, i když už značně zdeformovanému. Body, jež jsou ve středu pole, a jsou na sítnici soustředěny na velmi malé ploše, jsou v zrakovém centru rozloženy na velmi mnoho buněk. Je vhodné, když věci, které jsou původně těsně vedle sebe, zůstanou vedle sebe i nadále. Nejzajímavější stránka celé věci je však tato: Místo, kde se zdá, že je nejdůležitější, aby věci zůstaly těsně vedle sebe, by bylo přesně ve středu vizuálního pole. I když se to zdá neuvěřitelné, svislá čára jdoucí středem našeho zrakového pole je taková, že informace z bodů ležících napravo od ní jdou do levé části mozku a informace z bodů ležících od ní nalevo jdou do pravé strany mozku. A tato střední oblast je rozdělena svislým řezem přímo uprostřed, takže věci, které jsou si ve středu velmi blízké, jsou od sebe v mozku velmi vzdálené! Takže informace z jedné části mozku se musí nějak dostávat do druhé části, což je dost překvapující.

Velmi zajímavá je otázka, jak je celá tato síť propojena. Zde je starý problém, týkající se toho, co je již propojeno a co se teprve spojí učení, zkušeností. Někdy dříve se učilo, že přesné spojení ani není potřebné, stačí, když existují hrubé spoje a pak na základě zkušeností se malé dítě naučí, že když se věc nachází „tam“, vyvolá to určité pocity v mozku. (Lékaři nám vždy rádi řekají, co dítě „cítí“, ale jak vědí, co cítí dítě, když je mu jeden rok?) Lze předpokládat, že roční dítě vidí nějaký předmět „tam“, má určité pocity a učí se sáhnout „tam“, protože, když sáhne „sem“, předmět nenahmatá. Takový přístup pravděpodobně není správný, protože vidíme, že v mnoha případech již existují hotová detailní spojení. Mnohem více světla vrhají na věc některé pozoruhodné experimenty s mloky. (Shodou okolností mlok má přímé křížové spojení bez optického kříže, protože oči, které má každé na jedné straně hlavy, nemají společnou část zorného pole. Mlok nemá binokulární vidění.) Lze provést následující experiment. Přetneme-li mlokovi zrakový nerv, nerv z očí opět naroste. Tisíce a tisíce buněk vláken se tak opět spojí. U zrakového nervu nezůstávají vlákna jedno u druhého – je to jako velký spletený telefonní kabel, kde se všechna vlákna krouť a překrývají, ale když se dostanou do mozku, všechna se opět uspořádají. Vzniká otázka: Když se mlokovi protne zrakový nerv, napojí se vůbec někdy správně? Odpověď je pozoruhodná: Ano. Protne-li mlokovi nerv a ten opět naroste, má mlok opět

dobrou zrakovou ostrost. Protneme-li však zrakový nerv, oko obrátíme vzhůru nohama a necháme opět přirůst, má mlok znovu dobrý ostrý zrak, ale je tady jedna osudná chyba: Když mlok vidí mouchu „tam nahoře“, skočí za ní „tam dolů“ a nikdy se to správně nenaučí. Jde tu proto o jakýsi záhadný způsob, kterým si tisíce vláken v mozku najdou své správné místo.

Otázka počtu daných a získávaných spojů je důležitá pro teorii vývoje živočichů. Odpověď není známa, ale problematika se intenzivně zkoumá.

Stejný experiment provedený s karasem zlatým ukazuje, že na místě, kde jsme nerv přesekli, vznikne nepěkný uzel jako velká jizva, ale přesto všechna vlákna srostou tak, že spojují správná místa mozku.

Aby se to mohlo uskutečnit, jak rostou nová vlákna ve starých kanálech zrakového nervu, musí se nějak rozhodovat, kterým směrem mají růst. Jak to dělají? Zdá se, že záhada rozdílného růstu různých vláken je chemické povahy. Představme si obrovské množství rostoucích vláken, z nichž každé se něčím liší od svých sousedů a přitom roste tak, že si najde své jediné správné místo pro konečné spojení s mozkiem! Přitom zřejmě reaguje individuálním způsobem na nějaký neznámý chemický podnět. To je velmi zajímavá, přímo fantastická věc. Je to jeden z největších nedávných objevů biologie a nepochybně souvisí s mnoha dávnými nevyřešenými problémy růstu, organizace a vývoje organizmů a hlavně embryí.

Další zajímavý jev souvisí s pohyby očí. Oči se musí pohybovat tak, aby jejich dva obrazy za různých okolností splývaly. Tyto pohyby jsou různého druhu. Jeden spočívá ve sledování něčeho, co si vyžaduje, aby se oči současně pohybovaly ve stejném směru, vpravo nebo vlevo, další pohyb je směřuje na stejné místo při různých vzdálenostech od očí, což vyžaduje protiběžné pohyby očí. Nervy ovládající oční svaly jsou popojeny tak, že jsou k těmto pohybům přizpůsobeny. Jeden druh nervů způsobuje stahy svalů na vnitřní straně jednoho oka a na vnější straně druhého oka a současně uvolní svaly na opačných stranách, takže oči se pohybují současně. Vzruch z dalšího centra způsobí, že oči se vychýlí z rovnoběžného směru směrem k sobě. Každé oko se může otočit k vnějšímu koutku, když se druhé oko pohybuje k nosu, ale je nemožné, ať už vědomě nebo nevědomě, otočit obě oči současně k vnějším koutkům. Ne proto, že by na očích nebyly takové svaly, ale proto, že neexistuje způsob jak vyslat signál, že se mají obě oči otočit směrem ven. Výjimkou může být úraz nebo porušený nerv. I když svaly jednoho oka jím mohou volně pohybovat, ani jogín nedokáže vytočit současně obě oči směrem ven, neboť, jak se zdá, nejsme k tomu přizpůsobeni. Naše nervová spojení jsou do jisté míry zafixována. To je důležitý fakt, protože většina starších knih o anatomii a psychologii neuznává nebo nezdůrazňuje skutečnost, že naše nervová spojení jsou do takové míry zafixována – tvrdí, že vše je jen naučené.

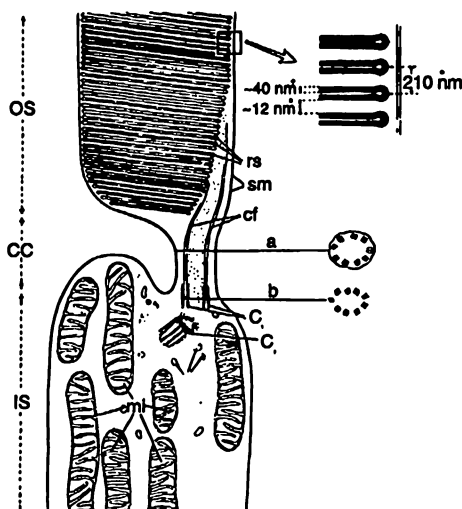
### 36.3 TYČINKY

Podívejme se pozorněji, co se děje v tyčinkách. *Obr. 36.5* znázorňuje střed tyčinkové buňky při pohledu elektronovým mikroskopem (tyčinka vyčnívá ze zorného pole). Mnoho vrstev je složeno z rovinných útvarů, zvětšeně je vidíme vpravo. Obsahují látku rhodopsin, barvu nebo pigment, jenž vyvolává zrakový efekt v tyčinkách. Pigment rhodopsin je protein obsahující zvláštní skupinu nazvanou retinal, kterou můžeme oddělit od proteinu, a která je nepochybně hlavní příčinou absorpce světla. Důvod existence rovinných útvarů neznáme, ale je velmi pravděpodobné, že existuje nějaký důvod, proč musí být rhodopsinové molekuly uloženy rovnoběžně. Po chemické stránce je tato problematika dobře rozpracována, ale může se tu uplatnit i fyzika. Je možné, že všechny molekuly jsou seřazeny do jakési řady, takže, je-li některá z nich vypuzena, elektron, jenž se při tom uvolní, proletí celou řadou až dolů, aby signál vyšel

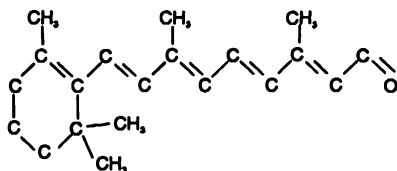


ven, případně něco podobného. To je velmi důležitý, zatím však nevyřešený problém. Uplatnit se zde může biochemie i fyzika pevných látek.

Takovou vrstevnatou strukturu můžeme najít i jinde, kde je důležité světlo, například u chloroplastu v rostlinách, kde světlo způsobuje fotosyntézu. Při zvětšení tam najdeme téměř stejné vrstvy, jen v rostlinách je místo retinalu chlorofyl. Chemická struktura retinalu je znázorněna na obr. 36.6. V bočním řetězci obsahuje sérii střídajících se dvojných vazeb, což je charakteristické pro téměř všechny silně absorbující organické látky jako je chlorofyl, krev atd. Je to látka, kterou si člověk nedokáže vytvořit ve svých vlastních buňkách – musíme ji přijímat potravou. Proto ji jsme ve formě zvláštní látky, jež je skoro stejná jako retinal, jen na pravém konci má ještě připojen vodík – je to vitamin A. Je-li přísun tohoto vitamínu nedostatečný, máme málo retinalu a může se to projevit jako šeroslepost. Tehdy není v rhodopsinu dostatek pigmentu, abychom viděli v šeru pomocí tyčinek.



Obr. 36.5 Elektronová mikrofotografie tyčinkových buněk



Obr. 36.6 Struktura retinalu

Důvod, proč takový řetězec dvojných vazeb silně absorbuje světlo, je také znám. Můžeme ho naznačit. Řada střídavých vazeb se nazývá konjugovanou dvojnou vazbou; dvojná vazba znamená, že tam je jeden elektron navíc a tento elektron se může velmi snadno přesunout doprava nebo doleva. Když na takovou molekulu dopadne světlo, elektrony v každé dvojně vazbě se posunou o jeden krok. Posunou se všechny elektrony v celém řetězci, jako když padají kostky domina postavené do řady, a i když se každá posune jen o kousek (očekáváme, že v jednom atomu se může elektron posunout pouze o malou vzdálenost), ale výsledný efekt je stejný, jakoby se

elektron posunul z jednoho konce až na druhý konec! Je to totéž, jako by se jeden elektron pohyboval sem a tam po celém řetězci. Proto vlivem elektrického pole vzniká mnohem silnější absorpce, než kdybychom mohli posunout elektron jen o vzdálenost odpovídající jednomu atomu. Retinin velmi silně absorbuje světlo, neboť elektrony tak lze snadno posouvat. Takový je tedy fyzikálněchemický mechanismus.

## 36.4 SLOŽENÉ OKO HMYZU

Vraťme se nyní do biologie. Lidské oko není jediným druhem oka. Téměř všichni obratlovci mají oči podobné lidským. Nižší živočichové však mají mnoho jiných druhů očí: oční skvrny, různé oční pohárky a jiné méně citlivé orgány, o nichž nemáme čas hovořit. Mezi bezobratlými však existuje jeden druh vysoce vyvinutého oka a to je složené oko hmyzu. (Většina hmyzu má vedle velkých složených očí ještě i různé dodatečné, jednodušší oči.) Velmi podrobně se zkoumal zrak včely. Vlastnosti včelího zraku lze snadno studovat, protože včely přitahuje med a lze připravit experimenty, kde se med odliš tak, že se položí na modrý nebo na červený papír a sleduje se, ke kterému včely přiletí. Takovou metodou se podařilo objevit několik velmi zajímavých věcí týkajících se vidění včel.

V první řadě musíme poznamenat, že při pokusech měřit jak vidí včely rozdíl v barvě mezi dvěma „bílými“ papíry, zjistili někteří vědci, že včely to příliš dobře neumí a jiní zjistili, že jsou v tom fantastické. I když byly dva kousky bílého papíru téměř úplně stejné, včely stále mohly poznat rozdíl mezi nimi. Experimentátoři použili na jednom papíru zinkovou bělobu a na druhém olověnou bělobu, a i když jsou obě barvy pro nás úplně stejné, včely je mohly stále rozeznat, neboť tyto barvy různě odrážejí světlo v ultrafialové oblasti. Tak se zjistilo, že včelí oko je citlivé v širším rozsahu spektra než je náš rozsah. Naše oko vidí od 700 nm do 400 nm, od červené po fialovou, ale včelí oko vidí až do 300 nm, tj. po ultrafialovou oblast! Na základě toho vzniká mnoho zajímavých jevů. Za prvé, včely mohou rozlišit mnoho květů, které se nám zdají stejné. Samozřejmě, musíme si uvědomit, že barvy květů nejsou určeny pro naše oči, ale pro včelí; jsou to signály, které přitahují včely k určitým květům. Všichni víme, že existuje mnoho „bílých“ květů. Bílá barva není zřejmě pro včely příliš zajímavá, neboť se ukazuje, že všechny bílé květy různě odrážejí *ultrafialové* světlo. Neodrážejí ho na sto procent, jak by ho měla odrážet skutečná bílá. Ne všechno světlo se odráží zpět, ultrafialové chybí, to znamená, že vzniká nějaká barva, právě tak jako pro nás, když chybí modrá, světlo je žluté. Proto jsou pro včely všechny květy barevné. Ale také se zjistilo se, že včely nevidí červenou. Proto bychom mohli očekávat, že všechny červené květy jsou pro včelu černé, ale není tomu tak. Při podrobném studiu červených květů dokonce i naším okem můžeme postřehnout, že většina z nich má mírně namodralý nádech, protože dodatečně odrážejí ještě i modrou barvu, kterou včela vidí. Experimenty dále ukazují, že květy se liší i v tom, jak různé části jejich okvětních lístků odrážejí ultrafialové světlo atd. Kdybychom tedy mohli vidět květy tak, jak je vidí včely, byly by ještě krásnější a různorodější!

Bylo zjištěno, že existují takové červené květy, které *neodrážejí* modré nebo ultrafialové světlo, takže včelám se budou zdát černé! To velmi zaujalo odborníky zabývající se těmito věcmi, protože černá barva se zdá být nezajímavá, neboť je těžko odlišitelná od špinavého stínu. Skutečně se ukázalo, že se včely těmto květům vyhýbají, ale „navštěvují“ je kolibříci a ti červenou vidí!

Další zajímavou stránkou zraku včel je, že při pohledu na kousek modrého nebe umí včela určit směr ke Slunci, aniž by ho viděla. My to tak snadno nedokážeme. Když se podíváme z okna na nebe a vidíme, že je modré, kterým směrem se nachází Slunce? Včela to pozná, protože je

## MECHANIZMUS VIDĚNÍ

dost citlivá k polarizaci světla a rozptýlené světlo oblohy je polarizované.<sup>45)</sup> O tom jak se tato citlivost uplatňuje, se stále ještě diskutuje. Zatím nevíme, zda díky tomu, že odraz světla je různý za různých okolností nebo je přímo včelí oko tak citlivé.<sup>46)</sup>

Říká se také, že včela postřehne blikání až do frekvence 200 cyklů za sekundu, zatímco my jen do 20. Pohyby včel v úlu jsou velmi rychlé. Včely pohybují nohama a vibrují křídly, ale tyto pohyby lze velmi těžko postřehnout naším okem. Kdybychom však viděli mnohem rychleji, tyto pohyby bychom pozorovali. Pro včelu je asi velmi důležité, aby její oko mělo tak rychlý postřeh.

Podívejme se, jakou ostrost vidění můžeme předpokládat u včely. Její oko je složené, vytvořené z velkého množství zvláštních buněk nazvaných ommatidia. Jsou uspořádána kuželovitě na kulové ploše na vnější části hlavy včely. Jedno ommatidium je na obr. 36.7. Nahoře se nachází průhledná část, druh jakési „čočky“, ale ve skutečnosti je to spíš filtr nebo světelná trubice, která přivádí světlo podél tenkého vlákna, kde pravděpodobně dochází k absorpci. Z druhého konce vychází nervové vlákno. Centrální vlákno je obklopeno šesti buňkami, které ho kryjí. Takový popis pro naše účely stačí. Hlavní je, že ommatidium je kuželovitý útvar a že se jich vejde na povrchu včelího oka vedle sebe velmi mnoho.

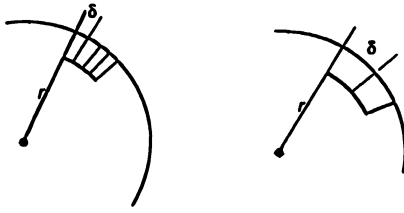


Obr. 36.7 Struktura ommatidia (jednoduché buňky složeného oka)

<sup>45)</sup> Lidské oko je také mírně citlivé na polarizaci světla a určit polohu Slunce se lze naučit! Uplatňuje se zde Haidingerův jev. Podíváme-li se na široké, volné prostranství polarizačními skly, uprostřed vizuálního pole vidíme slabou nažloutlou strukturu, podobnou hodinovému sklíčku. Můžeme ho vidět i na modré obloze a bez pomoci polarizačních brýlí, když otočíme hlavu ze strany na stranu kolem osy vidění.

<sup>46)</sup> Důkazy z posledního období naznačují, že jde o přímou citlivost oka.

## SLOŽENÉ OKO HMYZU



Obr. 36.8 Schéma umístění ommatidií v oku včely

Nyní se podíváme na rozlišovací schopnost včelího oka. Nakreslíme-li čáry znázorňující ommatidia na povrchu koule s poloměrem  $r$  (obr. 36.8), můžeme vypočítat šířky každého ommatidia. Použijeme k tomu náš rozum a budeme předpokládat, že vývoj je stejně chytrý jako my. Je-li ommatidium velmi velké, rozlišovací schopnost bude malá. Jedna buňka získá informaci z jednoho směru a vedlejší buňka z nějakého jiného směru atd., a co je mezi tím, to včela dobře neuvidí. Takže neurčitost zrakové ostrosti oka bude určitě souviset s nějakým úhlem – s úhlem příslušejícím jednomu ommatidiu – mezi krajním směrem ommatidia a směrem ke středu křivosti oka. (Zrakové buňky jsou, samozřejmě, pouze na povrchu koule, uvnitř je hlava včely.) Tento úhel od jednoho ommatidia k druhému je roven poměru průměru ommatidia a poloměru oka

$$\Delta \alpha_g = \frac{\delta}{r}. \quad (36.1)$$

Takže bychom mohli říct, „čím bude  $\delta$  menší, tím bude lepší zraková ostrost oka. Proč potom nemá včela velmi tenoučká ommatidia?“ Odpověď je následující. Z fyziky již víme dost k tomu, abychom si uvědomili, že chceme-li světlo dostat do úzké štěrbině, uplatní se ohybové jevy a v daném směru nebudeme dobře vidět. Vzhledem k difrakci tam může vnikat světlo z různých směrů z celkového úhlu  $\Delta \alpha_d$  takového, že

$$\Delta \alpha_d = \frac{\lambda}{\delta}. \quad (36.2)$$

Nyní vidíme, že bude-li  $\delta$  příliš malé, nebude vzhledem k difrakci každé ommatidium vidět jen v jednom směru. Budou-li ommatidia příliš velká, uvidí každé v určitém směru, ale nebude jich dost k tomu, aby vytvořily dobrý obraz dané scény. Proto vzdálenost  $\delta$  nastavíme tak, abychom optimalizovali vliv obou účinků. Sečteme-li je a najdeme minimum tohoto součtu (obr. 36.9), máme

$$\frac{d(\Delta \alpha_g + \Delta \alpha_d)}{d\delta} = 0 = \frac{1}{r} - \frac{\lambda}{\delta^2}. \quad (36.3)$$

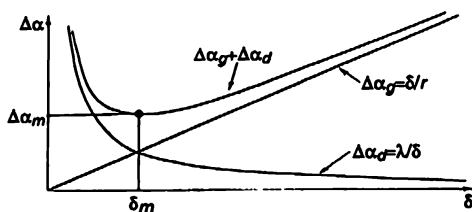
Odtud plyne pro vzdálenost

$$\delta = \sqrt{\lambda r}. \quad (36.4)$$

Odhadneme-li, že  $r$  je kolem 3 milimetrů a za vlnovou délku světla, které vidí včela, vezmeme 400 nm, máme

$$\delta = (3 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-7})^{1/2} \text{ m} = 3,5 \times 10^{-5} \text{ m} = 35 \text{ } \mu\text{m}.$$

## MECHANIZMUS VIDĚNÍ



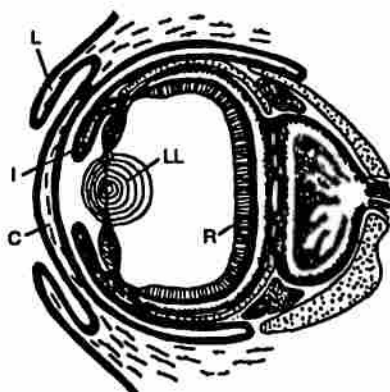
Obr. 36.9 Optimální velikost ommatidia je  $\delta_m$

Podle literatury je to 30  $\mu\text{m}$ , což je v dobrém souhlasu s naším odhadem, a tedy chápeme, čím je určena velikost včelího oka! Lze postupovat i opačně, vycházet z tohoto čísla a zjistit, jaká je rozlišovací schopnost včelího oka. Ve srovnání s naším je velmi slabá. Ve porovnání se včelou jsme schopni vidět předměty, jejichž zdánlivá velikost je třicetkrát menší. Ve srovnání s námi vidí včela dost rozmazaně a neostře. Přesto je to v pořádku a je to nejlepší, co může být. Můžeme se zeptat, proč nemá včela dobré oči jako my s čočkou atd. Je k tomu několik zajímavých důvodů. Za prvé, včela je příliš malá, a kdyby měla takové oko jako my, ale v měřítku svých rozměrů, otvor oka by měl kolem 30  $\mu\text{m}$  a difrakce by se projevovala tak silně, že by jí i stejně neviděla dobře. Oko není dobré, je-li příliš malé. Za druhé, kdyby bylo tak velké jako včelí hlava, byla by celá hlava obsazena okem. Krása složeného oka je v tom, že nepotřebuje prostor, je to jen velmi tenká vrstva na povrchu včely. Takže, když tvrdíme, že ho mají mít takové jako my, musíme si připomenout, že i včely mají své vlastní problémy!

## 36.5 JINÉ OČI

Kromě včel vidí barvu i mnozí jiní živočichové. Ryby, motýli, ptáci a plazi mohou vidět barvu, ale předpokládá se, že většina savců ji vidět nemůže. Primáti ji mohou vidět. Ptáci barvu určitě vidí a to souvisí i se zbarvením ptáků. Bylo by zbytečné, aby samečkové byli tak krásně zbarveni, kdyby to samičky nemohly ocenit! Takže vývoj pohlavního nebo jiného vybavení, které mají ptáci, je výsledkem toho, že samičky jsou schopny vidět barvy. Až se příště podíváme na páva a zamyslíme se nad bohatstvím a jemností jeho zbarvení, měli bychom vzdát hold ne pávovi, ale pávici za její zrakovou ostrost a estetický smysl, neboť ten inspiroval takovou nádhernou podívanou!

Všichni bezobratlí mají slabě vyvinuté oči nebo složené oči, ale všichni obratlovci mají oči podobné našim, až na jednu výjimku. Když myslíme na nejvyšší formu živočichů, obvykle říkáme: To jsme my, ale když přistoupíme na méně předpojaté hledisko a omezíme se jen na bezobratlé, k nimž nepatříme a zeptáme se, který z nich je nejvyšší živočich, většina zoologů bude souhlasit s tím, že je to chobotnice! Velmi zajímavé je to, že kromě vyvinutého mozku a reakcí, jež jsou pro bezobratlé velmi dobré, má ještě i samostatně vyvinuté oko. Není to složené oko nebo oční skvrna – má rohovku, víčko, duhovku, má čočku, má dvě oblasti naplněné tekutinou a vzadu má sítnici. V podstatě je to stejné jako u obratlovců! Je to zajímavý příklad koincidence v evoluci, kde příroda našla dvakrát totéž řešení problému, jen s malým vylepšením. Překvapivě se ukazuje, že sítnice chobotnice je také částí mozku, jež se oddělila v embryonálním vývoji od mozku stejně jako u obratlovců, ale odlišné a zajímavé je to, že buňky citlivé na světlo jsou na vnitřní straně a buňky, které „dělají výpočty“, jsou za nimi, opačně, než u našeho oka. Tak aspoň vidíme, že pro otočení naší sítnice vnitřkem ven není nějaký vážný důvod. (Viz obr. 36.10) Krakatice obrovská má největší oči na světě. Našli se už i takové oči, které měly průměr až 38 cm!

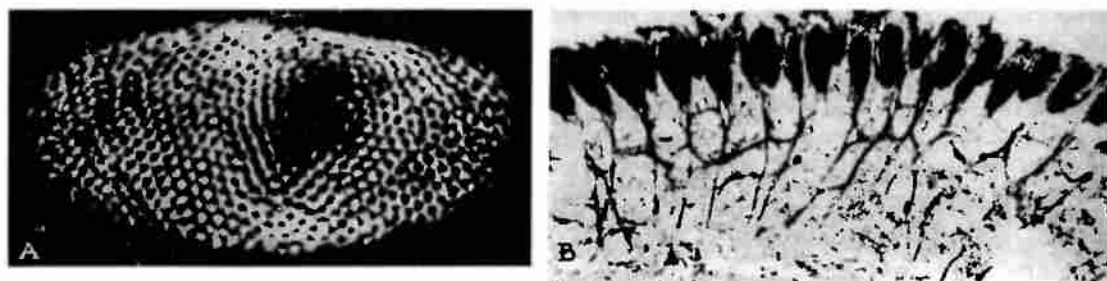


Obr. 36.10 Oko chobotnice

### 36.6 NEUROLOGIE ZRAKU

Jeden z hlavních bodů našeho předmětu je otázka propojení informací z jedné části oka s druhou částí. Podívejme se na složené oko ostrorepa amerického, s nímž byly provedeny pozoruhodné experimenty. Nejdříve si musíme uvědomit, jaké informace se mohou přenášet prostřednictvím nervů. Nerv přenáší určitý vzruch, jenž má elektrické účinky a je snadné je detekovat. Je to vzruch podobný vlně, která se šíří podél nervu a vyvolává nějaké účinky na jeho druhém konci. Informace se šíří podél dlouhé části nervové buňky, nazvané axon, ve formě určitého hrotovitého pulzu. Šíří-li se po nervu jeden pulz, nemůže hned po něm následovat další. Všechny pulzy mají stejnou velikost, takže při větším dráždění nedostaneme větší pulzy, ale za sekundu je jich víc. Velikost pulzu je určena nervovým vláknem. To je důležité si uvědomit, abychom viděli, co se děje dále.

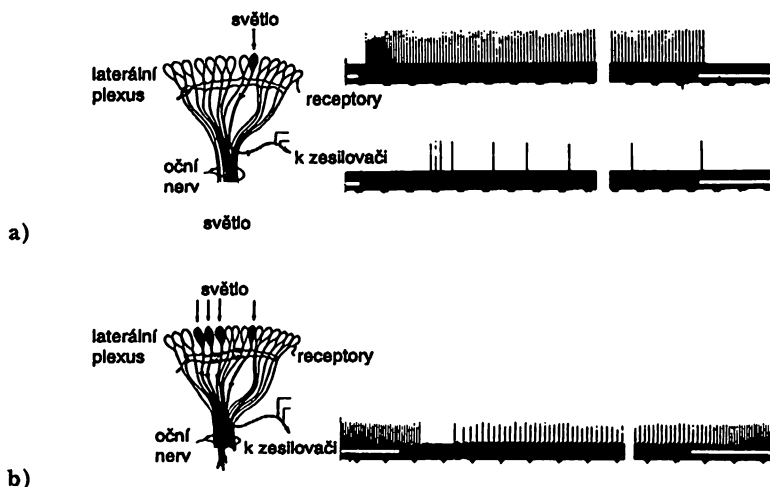
Na obrázku 36.11a) je složené oko ostrorepa amerického. Oku se moc nepodobá, má jen kolem tisíce ommatidí. Na obrázku 36.11b) je průřez oka. Jsou tam vidět ommatidia s nervovými vlákny, které z nich vycházejí do mozku. Všimněme si, že dokonce i u ostrorepa je málo mezispojů. Jsou mnohem jednodušší než v lidském oku a to nám umožňuje studovat jednodušší případ.



Obr. 36.11 Složené oko ostrorepa amerického: a) normální pohled, b) průřez

Nyní se podívejme na experimenty, jež byly provedeny pomocí jemných elektrod napojených na optické nervy ostrorepa při osvětlení pouze jednoho ommatidia, což lze snadno realizovat

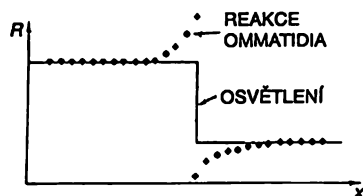
pomocí čoček. Zapneme-li v nějakém čase  $t_0$  světlo a měříme vycházející elektrické signály, zjistíme, že nejprve je krátká pauza a za ní následuje série pulzů, které se postupně ustálí, a následují v pravidelných intervalech jak je to na *obr. 36.12a*). Když světlo vypneme, signály se ztratí. Zajímavé je, že necháme-li zesilovač napojen na týž nerv a osvětlíme jiné ommatidium, nic se nestane, nevzniknou žádné signály.



Obr. 36.12 Reakce nervových vláken oka ostrorepa amerického na světlo

Nyní provedeme jiný experiment. Osvětíme původní ommatidium a dostaneme to, co předtím. Když však nyní osvětlíme i jiné blízké ommatidium, pulzy se na chvíli přeruší a pak pokračují v mnohem pomalejším rytmu (*obr. 36.12b*). Rytmus jednoho je zpomalen pulzy, které přicházejí z druhého! Každý nerv tedy přenáší signály z jednoho ommatidia, ale jejich množství je ovlivněno signály z ostatních ommatidií. Když je tedy celé oko téměř rovnoměrně osvětleno, bude informace přicházející z jednoho ommatidia relativně slabá, neboť je brzděna ostatními. Toto přibrzdění je aditivní. Neboť osvětlíme-li mnoho blízkých ommatidií, bude zbrzdění velké. Pro blízká ommatidia je tedy přibrzdění velké a pro ta, jež jsou dost daleko, je prakticky nulové. Takže je aditivní a závisí na vzdálenosti. To je první příklad toho, jak se kombinují informace z různých částí oka už v samotném oku. Když o tom trochu přemýšlíme, vidíme, že je to asi zařízení k zesílení kontrastu na obrysech předmětů, neboť, je-li část obrazu světlá a část černá, dávají ommatidia v osvětlené části pulzy zeslabované okolním světlem, takže jsou relativně slabé. Zato ommatidium, jež je zaměřeno na okraj předmětu a ještě dostává světlo, je přibrzdováno okolními, ale těch není mnoho, neboť některá z nich jsou tmavá. Výsledný signál je proto silnější. Výsledek bude dán křivkou na *obr. 36.13*. Ostrorop bude vidět zvýrazněný obrys předmětu.

Fakt, že dochází k zvýraznění obrysů, je znám již dávno. Je to zajímavý jev, který psychologové mnohokrát komentovali. Abychom nakreslili předmět, stačí, když nakreslíme jeho obrysy. Jak jsme zvyklí se dívat na obrázky, které mají jen obrysy! Co jsou to obrysy? Obrys je jen rozdíl na okraji mezi světlem a tmou nebo mezi dvěma barvami. Není to nic určitého. Třeba se zdá neuvěřitelné, ale vůbec to neznamena, že každý předmět má kolem sebe čáru! Taková čára neexistuje. Existuje jen v našem psychologickém založení – začínáme rozumět tomu, proč stačí čára, abychom dostali klíč k celé věci. Lze předpokládat, že naše oči pracují podobným způsobem – mnohem komplikovanějším, ale podobným.



Obr. 36.13 Výsledná reakce ommatidia ostrorepa amerického na ostré rozhraní při osvětlení

Nakonec stručně popíšeme pěkný, rozsáhlejší a pokročilejší výzkum, který se prováděl se žábami. Pomocí velmi jemných elektrod zasunutých do optických nervů žáby můžeme získat signály, které postupují jen daným axonem, podobně jako tomu bylo u ostrorepa. Na základě analogického experimentu zjistíme, že tato informace nezávisí jen na jednom místě v oku, ale je součtem informací z více míst.

Poslední experimenty studující funkci žabího oka jsou následující. Můžeme najít čtyři druhy nervových vláken odpovídajících čtyřem druhům reakcí. Tyto experimenty se neprovádějí zapínáním a vypínáním světelných pulzů, protože to žába nevidí. Žába si prostě sedí a její oči se vůbec nehýbají, pokud se nepohne list leknínu a v tom případě kývá očima přesně tak, že obraz se nemění. Jinak žába oči neotáčí. Když se něco pohybuje v jejím zorném poli, například malý brouček (musí být schopna vidět něco malého pohybujícího se na pevném pozadí), ukáže se, že má čtyři druhy vláken, které přenášejí informaci. Jejich vlastnosti jsou shrnuty v tabulce 36.1. Udržovaná detekce rozhraní (nevymazatelná) znamená, že posuneme-li do zorného pole žáby předmět s okrajem v tomto vlákně, vznikne mnoho pulzů, které trvají, dokud se předmět pohybuje, ale klesnou na udržovanou hodnotu, když je okraj už v zorném poli, i když se nepohybuje. Vypneme-li světlo, pulzy zmizí. Když ho opět zapneme, dokud je okraj ještě v zorném poli, opět se obnoví. Další druh vlákna je velmi podobný, ale nereaguje, je-li okraj přímý. Musí být vypouklý s tmavým pozadím! Jak komplikovaný musí být systém mezipojení v sítnici žabího oka, aby rozeznal, že do zorného pole vstoupil vypouklý předmět! Dále, i když toto vlákno částečně udržuje signály, není to tak dlouho jako u prvního vlákna a při vypnutí a opětovném zapnutí světla se signály už neobnoví. Závisí na pohybu vypouklého předmětu v zorném poli. Oko ho vidí vstupovat dovnitř a pamatuje si, že tam je, ale stačí, když na chvíli vypneme světlo, zapomene na něj a už ho nevidí.

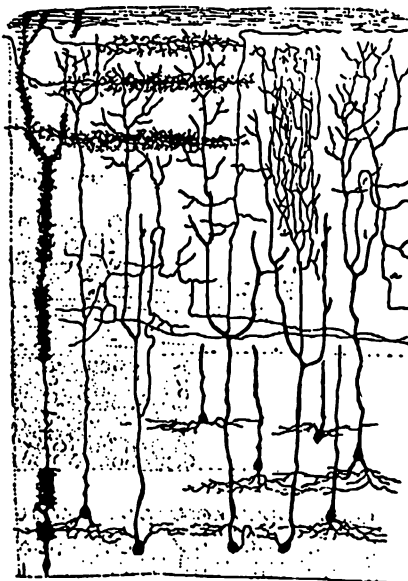
Tabulka 36.1 Typy reakcí optických vláken žáby

Typ	Rychlost	Úhlové pole
1. Udržovaná detekce rozhraní (nevymazatelná)	0,2–0,5 m/s	1°
2. Detekce vypouklého rozhraní (vymazatelná)	0,5 m/s	2°–3°
3. Detekce změny kontrastu	1–2 m/s	7°–10°
4. Detekce stmívání	do 0,5 m/s	do 15°
5. Detekce tmy	?	velmi velké

Další příklad se týká detekce změny kontrastu. Pohybuje-li se rozhraní dovnitř nebo ven, vznikají pulzy, ale když se nehýbe, žádné pulzy nevznikají.

Dále se v oku žáby nachází detektor stmívání. Klesá-li intenzita světla, generuje signály; když se však intenzita ustálí, signály přestanou. Detektor působí jen při stmívání.





Obr.36.14 Tectum žáby

Nakonec je tam několik vláken, které slouží jako detektory tmy. Nejpřekvapivější na nich je, že neustále vyrábějí signály. Zvětšíme-li osvětlení, následují signály řídkěji, ale neustanou. Když osvětlení zmenšíme, signály jsou častější. Ve tmě divoce kmitají a neustále řkají: „Je tma! Je tma! Je tma!“

Tyto reakce se zdají být dosti komplikované na to, aby bylo možné je klasifikovat a můžeme i pochybovat zda se experimenty správně interpretují. Proto je velice zajímavý poznatek, že takové čtyři druhy vláken je u žáby možno jasně anatomicky rozeznat! Po klasifikaci těchto reakcí byly realizovány jiné experimenty (je důležité, že až *po* provedení klasifikace), při nichž se zjistilo, že v různých vlákních není rychlost šíření signálů stejná, což umožňuje další nezávislou kontrolu toho, o které vlákno jde!

Další zajímavou otázkou je, z jak velké oblasti sbírá určité vlákno informaci. Zjistilo se, že tato oblast je různá pro různá vlákna.

*Obr. 36.14* znázorňuje povrch nazvaný tectum žáby, kde vstupují vlákna zrakového nervu do mozku. Všechna nervová vlákna vytvářejí spojení v různých vrstvách tecta. Tato vrstevitá struktura je podobná sítnici, a to je z části důvod, proč víme, že sítnice a mozek jsou si navzájem podobné. Vezmeme-li elektrodu a procházíme jí postupně různými vrstvami, můžeme zjistit, kde příslušná vlákna končí a dostaneme nádherný výsledek, že různé druhy vláken končí v různých vrstvách! První druh vláken končí ve vrstvě prvního typu, druhý ve vrstvě druhého typu, třetí a pátý končí na stejném místě a nehlouběji ze všech končí čtvrtý druh. (Jaká shoda okolností, že je očíslovali téměř ve správném pořadí! Není to tak, protože právě kvůli tomu je přečíslovali; v prvním článku byly očíslovány jinak!)

Můžeme stručně shrnout, co jsme se naučili: Pravděpodobně existují tři pigmenty. Mohou existovat různé druhy receptorových buněk obsahujících tyto tři pigmenty v různých poměrech, ale existuje mnoho mezispojení, která dovolují sčítání a odčítání barev sčítáním a zesilováním signálů v nervovém systému. Takže dříve než pochopíme barevné vidění, budeme muset pochopit výsledný vjem. Je to stále otevřený problém, ale výzkumy pomocí mikroelektrod a podobných zařízení nám snad poskytnou víc informací o tom, jak vidíme barvy.

# Kvantové chování

---

## 37.1 MECHANIKA ATOMŮ

## 37.2 EXPERIMENT S KULKAMI

## 37.3 EXPERIMENT S VLNAMÍ

## 37.4 EXPERIMENT S ELEKTRONÝ

## 37.5 INTERFERENCE ELEKTRONOVÝCH VLN

## 37.6 SLEDOVÁNÍ ELEKTRONŮ

## 37.7 ZÁKLADNÍ PRINCIPY KVANTOVÉ MECHANIKY

## 37.8 PRINCIP NEURČITOSTI

### 37.1 MECHANIKA ATOMŮ

V posledních několika kapitolách jsme se zabývali základními myšlenkami potřebnými k pochopení nejdůležitějších světelných jevů, nebo obecně elektromagnetického záření. Zabývali jsme se „klasickou teorií“ elektromagnetických vln, která poskytuje adekvátní popis přírody pro velké množství jevů. Zatím nás nemuselo znepokojovat, že energie světla se šíří v porcích zvaných „fotony“.

Rádi bychom se dál zabývali problémem chování relativně velkých částí hmoty, například jejich mechanickými a tepelnými vlastnostmi. Při tomto studiu dojdeme velmi rychle k tomu, že „klasická“ (nebo starší) teorie velmi rychle selže, neboť hmota se skládá z malých částic s rozměry atomů. Přesto se budeme dál zabývat klasickou fyzikou, neboť jen tu můžeme pochopit pomocí klasické mechaniky, kterou jsme se učili. Nebudeme však příliš úspěšní. Zjistíme, že na rozdíl od světla se v případě látek velmi rychle dostaneme do těžkostí. Atomové jevy bychom mohli nechávat soustavně stranou, ale radši si uděláme krátkou exkurzi, v níž si popíšeme základní myšlenky kvantových vlastností hmoty, tj. kvantové principy atomové fyziky, abychom získali odhad toho, co budeme vynechávat. Některé důležité věci budeme totiž muset vynechat, i když se jim nebudeme moci zcela vyhnout.

Podáme tedy jen *úvod* do kvantové mechaniky, neboť jí samou se budeme zabývat mnohem později.

Kvantová mechanika – to je popis vlastností hmoty ve všech jejích detailech, ale hlavně popis toho, co se s ní děje na úrovni atomů. Objekty, které mají velmi malé rozměry, se vůbec nechova-

jí tak, jak bychom očekávali na základě naší bezprostřední zkušenosti. Nechovají se jako vlny, ani jako částice, nechovají se jako mraky, ani jako kulečnickové koule nebo závaží na pružinách, jako nic z toho, co jsme již viděli.

Newton si myslel, že světlo se skládá z částic, ale pak se zjistilo, že se chová jako vlnění. Avšak později (začátkem 20. století) se zase ukázalo, že někdy se světlo opravdu chová jako částice. Historie objevu elektronu byla taková, že nejdříve se předpokládalo, že se chová jako částice a pak se zjistilo, že se chová v mnoha ohledech jako vlna. Takže ve skutečnosti se nechová ani tak, ani tak. Dnes už neříkáme, zda se elektron chová jako částice nebo vlna – prostě jsme to vzdali. Chová se jako něco úplně jiného.

Existuje však jedno šťastné řešení – elektrony se chovají právě tak jako světlo. Všechny atomové objekty (elektrony, protony, neutrony, fotony atd.) se chovají stejně, všechno jsou to „částice – vlny“ nebo jak bychom je již nazvali. Proto vše, co se dozvíme o vlastnostech elektronů (které budeme používat v našich příkladech), bude platit pro všechny částice včetně fotonů světla.

V první čtvrtině našeho století se nahromadilo o dějích na úrovni atomů a objektů malých rozměrů množství informací, které způsobovaly rostoucí zmatek. Jeho vysvětlení podali v letech 1926 a 1927 Schrödinger, Heisenberg a Born. Podařilo se jim získat konzistentní popis chování hmoty při velmi malých rozměrech. V této kapitole si probereme základní body tohoto popisu.

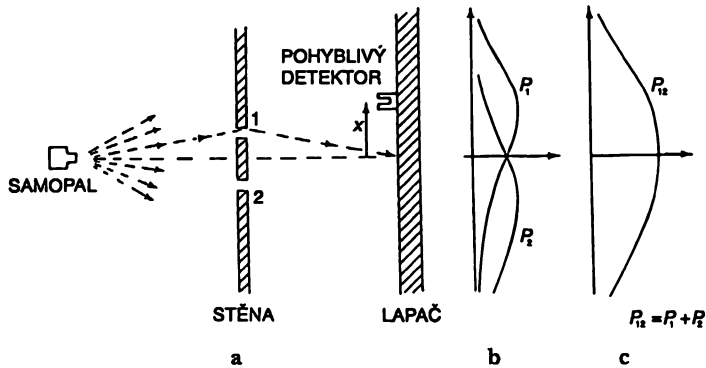
Protože se chování atomů vůbec nepodobá tomu, co známe z běžné zkušenosti, je velmi těžké si na ně zvyknout a nováčkoví i zkušenému fyzikovi se zdá divné a záhadné. Dokonce ani odborníci ho nechápou tak, jak by si přáli. Je to zcela odůvodněné, neboť celá bezprostřední lidská zkušenost a intuice platí pro velké objekty. Víme, jak se chovají velké objekty, ale objekty malých rozměrů se tak prostě nechovají. Proto se o nich dozvídáme pomocí abstrakce a představitivosti, a ne prostřednictvím přímé zkušenosti.

V této kapitole se pustíme hned do základních projevů tohoto záhadného chování v jeho nejzvláštnější formě. Budeme zkoumat jev, který naprosto nelze vysvětlit žádným klasickým způsobem, a který tvoří podstatu kvantové mechaniky. Obsahuje vlastně celou a jedinou záhadu. Tuto záhadu nemůžeme *vysvětlit*. Můžeme si jen říct, jak to funguje a tím si ozřejmíme základní zvláštnosti kvantové mechaniky.

## 37.2 EXPERIMENT S KULKAMI

Abychom pochopili kvantové chování elektronů, budeme je srovnávat v určitém experimentálním uspořádání s chováním takových částic, jako jsou kulky a s chováním vln na vodě. Nejdříve se podíváme, jak se v experimentu, zobrazeném na *obr. 37.1*, budou chovat kulky. Máme samopal, který střílí proud kulek. Není příliš přesný, protože rozptyluje kulky náhodně v dosti širokém úhlu, jak naznačuje obrázek. Před samopalem je pancéřová deska, jež má dva otvory takové velikosti, že jimi může proletět právě jedna kulka. Za ní se nachází ochranná zeď (například z tlustého dřeva), která zachytí kulky, jež do ní narazí. Před zdí máme umístěn „detektor“ kulek. Může to být krabice naplněná pískem. Každá kulka, která treť detektor, v něm uvázne. Budeme-li chtít, můžeme detektor vyprázdnit a zjistit kolik kulek se v něm zachytilo. Detektor se může pohybovat nahoru a dolů (ve směru, který nazveme  $x$ ). S tímto zařízením jsme schopni experimentálně najít odpověď na otázku: „Jaká je pravděpodobnost toho, že kulka, která proletí otvory v desce, dopadne na zachytnou zeď ve vzdálenosti  $x$  od středu?“ Všimněme si nejprve, že mluvíme o pravděpodobnosti, neboť neumíme přesně říci, kam určitá kulka dopadne. Kulka, jíž se podaří trefit některý z otvorů, se může odrazit od okraje a dopadnout kamkoliv. Pod „pravděpodobností“ myslíme možnost, že kulka dopadne na detektor. Můžeme ji určit tak, že

spočítáme kulky, jež se zachytily v detektoru za určitou dobu a tento počet dělíme celkovým počtem kulek, jež za tuto dobu narazily na záchytnou stěnu. Můžeme také předpokládat, že po dobu měření střílí samopal stále rovnoměrným tempem, takže hledaná pravděpodobnost bude úměrná počtu střel, které dopadly na detektor za nějaký pevně stanovený čas.



Obr. 37.1 Interferenční experiment s kulkami

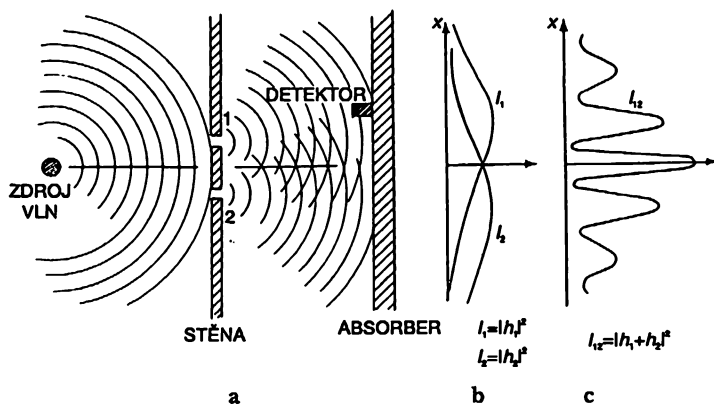
Pro naše účely bude lepší, když si představíme trochu zidealizovaný experiment, v němž kulky nejsou skutečnými kulkami, ale jsou nezničitelné – nemohou se například rozlomit na polovinu. V našem experimentu kulky přilétají nepoškozené, a když v detektoru něco najdeme, je to vždy celá kulka. Bude-li frekvence výstřelů samopalu malá, zjistíme, že v libovolném okamžiku nedopadne na stěnu buď nic nebo jen jedna kulka. Velikost celku tedy nezávisí na kadenci samopalu. Kulky přilétají vždy ve stejných celcích. Detektorem měříme pravděpodobnost toho, že přiletí celek. Tuto pravděpodobnost měříme jako funkci vzdálenosti  $x$ . Výsledek takového měření s tímto zařízením (i když jsme měření neprováděli, výsledek si můžeme představit) je zobrazen na grafu c) na obr. 37.1. Na grafu nanášíme vodorovně pravděpodobnost a svisle  $x$ , takže stupnice  $x$  souhlasí s náčrtem zařízení. Tuto pravděpodobnost nazýváme  $P_{12}$ , neboť kulky mohly přiletět jedním nebo druhým otvorem. Není nic divného na tom, že  $P_{12}$  je největší ve středu grafu a že pro velká  $x$  je velmi malé. Možná se budete divit, že  $P_{12}$  má maximum pro hodnotu  $x = 0$ . To lze pochopit, když experiment zopakujeme tak, že nejdříve zakryjeme otvor 2 a pak otvor 1. Je-li otvor 2 zakrytý, kulky mohou létat jen prvním otvorem a dostaneme křivku, označenou na části b) obrázku jako  $P_1$ . Podle očekávání maximum  $P_1$  najdeme pro tu hodnotu  $x$ , která leží na přímce spojující samopal a otvor č. 1. Když se zakryje otvor č. 1, dostaneme symetrickou křivku zobrazenou jako  $P_2$ . Srovnáním částí b) a c) na obr. 37.1 dostáváme důležitý výsledek

$$P_{12} = P_1 + P_2 \quad (37.1)$$

Pravděpodobnosti se prostě sčítají. Výsledek s oběma otevřenými otvory je roven součtu výsledků, je-li otevřen jen jeden otvor. Říkáme, že při tom „nenastává interference“, jak uvidíme později. Tolik o kulkách, přilétají v celcích a pravděpodobnost jejich dopadu neprojevuje interferenci.

## 37.3 EXPERIMENT S VLNAMÍ

Nyní chceme provést podobný experiment s vlnami. Na obr. 37.2 je náčrt experimentálního zařízení. Máme koryto s mělkou vodou. Zdrojem vln je nějaký malý předmět poháněný motorem nahoru a dolů, který vytváří kruhové vlny. Napravo od zdroje máme opět stěnu s dvěma otvory a za ní je druhá stěna, která je pro jednoduchost „absorbérem“, takže vlny, které na ní dopadají, se neodrážejí. Toho lze dosáhnout pomocí postupné pískové „pláže“. Před pláž umístíme detektor, který se může pohybovat podél osy  $x$  jako dřívce. Jako detektor si můžeme představit přístroj k měření výšky vln, jen jeho stupnice bude kalibrována v druhé mocnině skutečné výšky, takže jeho údaje budou úměrné energii vlnění nebo také výkonu přenášenému vlněním k detektoru.



Obr. 37.2 Interferenční experiment s vlnami na vodě

První věc, jíž je třeba si všimnout, je to, že intenzita vlnění může nabýt libovolnou velikost. Pokud se zdroj hýbe jen velmi málo, je vlnění u detektoru velmi slabé. Když se zdroj pohybuje víc, je i intenzita vlnění u detektoru větší. Intenzita vlny může nabývat jakoukoliv hodnotu. Nemohli bychom říci, že energie se přenáší v jakýchsi „celcích“.

Nyní změříme intenzitu vln pro různé hodnoty  $x$  za předpokladu, že zdroj vlnění pracuje stále rovnoměrně. Dostaneme zajímavý výsledek označený na obrázku (část c) jako křivka  $I_{12}$ . Vznik takového průběhu jsme odvodili při studiu interference elektromagnetických vln. V tomto případě bychom viděli, že na otvorech nastává difrakce původní vlny a od každého otvoru se šíří nové kruhové vlny. Zakryjeme-li na chvíli jeden z otvorů a změříme rozložení intenzity podél absorbéru, dostaneme dost jednoduché křivky, znázorněné na obrázku v části b).  $I_1$  je intenzita vlny z otvoru 1 (kterou měříme tak, že otvor 2 je zakryt) a  $I_2$  je intenzita vlny z otvoru 2 (při zavřeném otvoru 1).

Intenzita  $I_{12}$ , kterou pozorujeme, když jsou oba otvory otevřeny, určitě není rovna součtu  $I_1$  a  $I_2$ . Řekáme, že dochází k „interferenci“ dvou vln. Na některých místech (kde má křivka  $I_{12}$  maxima) jsou vlnění „ve fázi“, součet amplitud je velký a je tedy velká i intenzita. Taková „konstruktivní interference“ nastane všude tam, kde je vzdálenost detektoru od jednoho otvoru větší (nebo menší) o celý násobek vlnové délky než vzdálenost detektoru od druhého otvoru.

Na místech, kam dopadnou vlny s fázovým rozdílem  $\pi$  (kde jsou v protifázi), bude výsledné vlnění v detektoru rovno rozdílu obou amplitud. Vlny „interferují destruktivně“ a pro intenzitu vlny dostáváme malou hodnotu. Tak malé hodnoty dostaneme všude tam, kde se vzdálenost otvoru 1 od detektoru liší od vzdálenosti k otvoru 2 o lichý násobek poloviny vlnové délky. Malé hodnoty  $I_{12}$  na obr. 37.2 odpovídají místům, kde vlny interferují destruktivně.

Určitě si pamatujeme, že vztah mezi  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_{12}$  lze vyjádřit takto: Okamžitou výšku vody v detektoru od vlny z otvoru 1 lze zapsat jako  $\hat{h}_1 e^{i\omega t}$  (z toho reálná část), kde amplituda  $\hat{h}_1$  je obecně komplexní číslo. Intenzita je úměrná střední hodnotě druhé mocniny výšky nebo pomocí komplexních čísel  $|\hat{h}_1|^2$ . Podobně pro otvor 2 je výška rovna  $\hat{h}_2 e^{i\omega t}$  a intenzita je úměrná  $|\hat{h}_2|^2$ . Jsou-li otevřeny oba otvory, výšky vln se sčítají  $(\hat{h}_1 + \hat{h}_2) e^{i\omega t}$  a intenzita je  $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$ . Pro naše účely můžeme vynechat konstantu úměrnosti, takže pro interferující vlny máme vztahy:

$$I_1 = |\hat{h}_1|^2 \quad I_2 = |\hat{h}_2|^2 \quad I_{12} = |(\hat{h}_1 + \hat{h}_2)|^2. \quad (37.2)$$

Vidíme, že výsledek se zcela liší od toho, co jsme dostali pro kulky (rovnice 37.1). Umocníme-li  $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$ , vidíme, že

$$|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2 = |\hat{h}_1|^2 + |\hat{h}_2|^2 + 2 |\hat{h}_1| |\hat{h}_2| \cos \delta, \quad (37.3)$$

kde  $\delta$  je fázový rozdíl mezi  $\hat{h}_1$  a  $\hat{h}_2$ . Pomocí intenzit můžeme napsat

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (37.4)$$

Poslední člen v (37.4) je „interferenční člen“. Tolik, pokud jde o vlny na vodě. Intenzita může nabývat jakoukoliv hodnotu a projevuje interferenci.

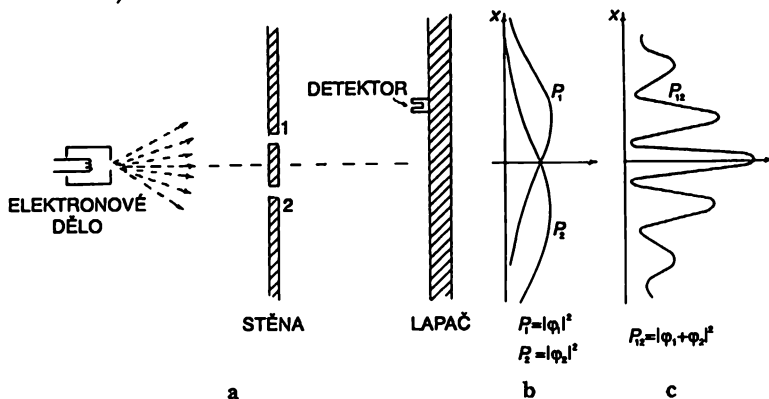
### 37.4 EXPERIMENT S ELEKTRONÝ

Nyní si představme podobný experiment s elektrony. Je znázorněn na obr. 37.3. Použijeme elektronové dělo, jež se skládá z elektricky žhaveného wolframového vlákna obklopeného kovovou krabicí s otvorem. Má-li drát záporné napětí vzhledem ke krabici, budou elektrony emitované drátem urychlovat směrem ke krabici a některé z nich proletí otvorem. Všechny elektrony vylétující z děla budou mít (přibližně) stejnou energii. Před dělem je opět stěna (z tenkého plechu) s dvěma otvory. Za ní se nachází další deska, která slouží k zachytávání elektronů. Před ní umístíme pohyblivý detektor. Detektorem může být Geigerův počítáč nebo ještě lépe, elektronový násobič napojený na reproduktor.

Hned na začátku musíme říci, abyste se nepokoušeli tento experiment sestavit (na rozdíl od předcházejících dvou). Tento experiment se nikdy takto nedělal. Obtíž spočívá v tom, že k tomu, aby se projevil pro nás zajímavý efekt, muselo by mít zařízení neskutečně malé rozměry. Provádíme „myšlený experiment“, který jsme si vybrali proto, že se o něm dá snadno přemýšlet. Výsledky známe, neboť bylo provedeno mnoho experimentů v takových měřítkách a rozměrech, že se v nich popisované jevy projeví.

První věc, které si v našem experimentu s elektrony všimneme, je ta, že z detektoru (tj. z reproduktoru) slyšíme ostrá „cvaknutí“. Všechna „cvaknutí“ jsou stejná. Neexistují „polocvaknutí“. Také si všimneme, že „cvaknutí“ jsou velmi nepravidelná; něco jako: cvak... cvak – cvak... cvak...

cvak... cvak – cvak... cvak... atd., jistě jste to slyšeli, když pracoval Geigerův počítač. Počet cvaknutí, jež napočítáme za dostatečně dlouhou dobu, dejme tomu za mnoho minut, bude vždy přibližně stejný. Můžeme mluvit o průměrném tempu, s jakým je slyšet cvaknutí (v průměru tolik a tolik cvaknutí za minutu).



Obr. 37.3 Interferenční experimenty elektrony

Při posouvání detektoru se tempo cvakání buď zrychluje nebo zpomaluje, ale velikost (hlasitost) každého cvaknutí je stejná. Snížíme-li teplotu vlákna v děle, tempo cvakání se zpomalí, ale stále zní každé cvaknutí stejně. Všimli bychom si také, že když použijeme dva nezávislé detektory, cvakne jeden nebo druhý, ale nikdy ne oba najednou. (Leda že by občas následovala dvě cvaknutí tak rychle za sebou, že by je naše ucho nemuselo rozlišit.) Cokoliv tedy dopadá na zachycovač, dopadá v „celcích“. Všechny „celky“ mají stejnou velikost: přilétají jen úplně „celky“ a přilétají na zachycovač jednotlivě. Říkáme: „Elektrony vždy přilétají ve stejných celcích.“

Podobně jako u našeho experimentu s kulkami můžeme jít dál a experimentálně najít odpověď na otázku, jaká je relativní pravděpodobnost toho, že elektronový „celek“ dopadne na zachycovač v různých vzdálenostech  $x$  od středu. Jako již dříve relativní pravděpodobnost dostaneme sledováním tempa cvakání při rovnoměrné činnosti děla. Pravděpodobnost, že celky dopadnou do určitého bodu  $x$ , je úměrná střednímu tempu cvakání v bodě  $x$ .

Výsledkem našeho experimentu je zajímavá křivka označená jako  $P_{12}$  na obr. 37.3c). Ano. Tak se chovají elektrony.

## 37.5 INTERFERENCE ELEKTRONOVÝCH VLN

Pokusme se analyzovat křivku na obr. 37.3, abychom viděli, zda můžeme pochopit toto chování elektronů. První, co bychom řekli, je, že přilétají-li elektrony v celcích, přilétají buď otvorem 1 nebo otvorem 2. Zformujeme to jako předpoklad:

*Předpoklad A:* Každý elektron prochází buď otvorem 1 nebo otvorem 2.

Na základě předpokladu A všechny elektrony, které doletí na zachycovač, můžeme rozdělit do dvou tříd: 1) na ty, které přiletěly otvorem 1 a 2) na ty, co přiletěly otvorem 2. Takže naměřená křivka musí být dána součtem efektů od elektronů, které přiletěly otvorem 1 a od elektronů, které přiletěly otvorem 2. Ověřme si to experimentem. Nejdříve budeme měřit elektrony, které

přiletí otvorem 1. Otvor 2 uzavřeme a spočítáme cvakání v našem detektoru. Z tempa cvakání dostaneme  $P_1$ . Výsledek měření je znázorněn křivkou označenou na *obr. 37.3b*) jako  $P_1$ . Výsledek se zdá být celkem rozumný. Stejným způsobem měříme  $P_2$ , rozložení pravděpodobnosti pro elektrony, které přiletěly otvorem 2. Výsledek tohoto experimentu je také znázorněn na obrázku.

Je jasné, že výsledek  $P_{12}$ , získaný, když byly oba otvory otevřeny, není součtem pravděpodobností  $P_1$  a  $P_2$  pro každý otvor zvlášť. Analogicky s naším vlnovým experimentem můžeme říci: „Existuje tadý interference.“

Pro elektrony: 
$$P_{12} \neq P_1 + P_2. \quad (37.5)$$

Jak může dojít k takové interferenci? Snad bychom měli říci: „Dobře, to znamená, že pravděpodobně není pravda, že celky letí jedním nebo druhým otvorem, neboť, kdyby to byla pravda, pravděpodobnosti by se měly sčítat. Možná, že letí nějakým komplikovanějším způsobem. Rozdělí se na polovinu a ...“ Ale nel Nemožou se rozdělit, vždy přilétají v celcích... „Dobře, snad některé z nich projdou otvorem 1 a pak projdou kolem otvorem 2 a tak několikrát dokola nebo letí po nějaké jiné komplikované dráze... pak, tím že zakryjeme otvor 2, změníme celkové možnosti a elektron, který začal letět otvorem 1, nakonec dopadne na zachycovač...“ Ale všimněme si! Existují takové body, do nichž přiletí velmi málo elektronů, když jsou otevřeny oba otvory, ale když jeden z nich zavřeme, přiletí do nich mnoho elektronů, takže zakrytím jednoho otvoru se *zvýší* počet od druhého otvoru. Je třeba si také všimnout, že ve středu křivky je  $P_{12}$  víc než dvakrát větší než  $P_1 + P_2$ . Vypadá to tak, jakoby se zakrytím jednoho otvoru *snížil* počet elektronů, které přilétávají druhým otvorem. Tyto dva jevy lze těžko vysvětlit tím, že by elektrony letěly po složitějších dráhách.

Je to úplně záhadné a čím víc na to myslíme, tím se to zdá záhadnější. Bylo vymyšleno mnoho teorií k vysvětlení křivky  $P_{12}$  pomocí jednotlivých elektronů letících otvory po komplikovaných dráhách, ale ani jedna nebyla úspěšná. Žádná neumí získat správnou křivku  $P_{12}$  pomocí  $P_1$  a  $P_2$ .

Přesto je matematika dávající do souvislosti  $P_1$  a  $P_2$  s  $P_{12}$  mimořádně jednoduchá, což je dost překvapující.  $P_{12}$  se podobá  $I_{12}$  z *obr. 37.2* a tam to bylo jednoduché. Co se děje na zachycovači lze popsat pomocí dvou komplexních čísel, která můžeme nazvat  $\hat{\varphi}_1$  a  $\hat{\varphi}_2$  (samozřejmě, že jsou funkcemi  $x$ ). Druhá mocnina absolutní hodnoty  $\hat{\varphi}_1$  dává výsledek, pro otvor 1, tj.  $P_1 = |\hat{\varphi}_1|^2$ . Výsledek, pro otvor 2, je dán podobně jako  $P_2 = |\hat{\varphi}_2|^2$ , a výsledek pro oba otvory je  $P_{12} = |\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2|^2$ . Je to stejná matematika, kterou jsme měli pro vlny na vodě! (Tak jednoduchý výsledek by se dal těžko získat tím, že elektrony by létaly otvory sem a tam po nějakých komplikovaných dráhách.)

Můžeme tedy udělat závěr: Elektrony přilétají v celcích jako částice a pravděpodobnost dopadu těchto celků je rozložena jako rozložení intenzity vlny. V tomto smyslu se elektron chová „někdy jako částice a někdy jako vlna“.

Mimochodem, když jsme se zabývali klasickými vlnami, definovali jsme intenzitu jako časovou střední hodnotu druhé mocniny amplitudy a komplexní čísla jsme použili jako trik ke zjednodušení analýzy. Ale z kvantové mechaniky vychází, že amplitudy *musí* být reprezentovány komplexními čísly. Jen reálná část nepostačuje. Zatím je to jen technický rozdíl, neboť jinak vypadají vzorce úplně stejně.

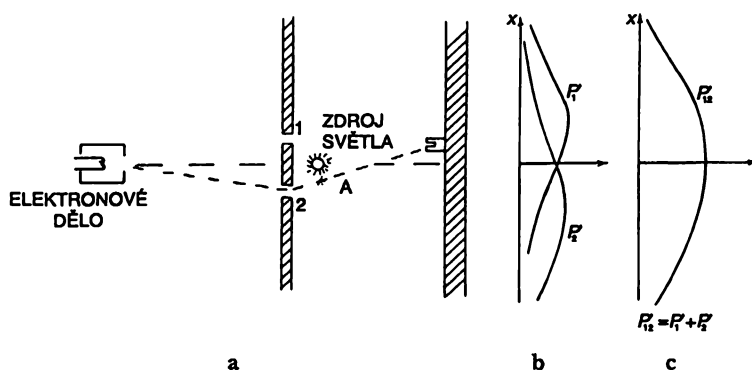
Je-li pravděpodobnost příletu oběma otvory dána tak jednoduše, i když ne jako součet  $P_1 + P_2$ , není k tomu vlastně už co dodat. S tím, že se příroda chová takovým způsobem, souvisí mnoho drobných záležitostí. Rádi bychom si nyní některé z nich ilustrovali. Za prvé, protože



počet elektronů, které dopadnou do určitého bodu není roven počtu těch, které proletí otvorem 1, plus těch, které proletí otvorem 2, jak plyne z předpokladu A. *Předpoklad A tedy neplatí.* Není pravda, že elektron musí letět *bud'* otvorem 1 *nebo* otvorem 2. Toto tvrzení lze ověřit dalším experimentem.

## 37.6 SLEDOVÁNÍ ELEKTRONŮ

Pokusíme se provést následující experiment: Do naší elektronové aparatury přidáme velmi silný zdroj světla a umístíme ho za stěnu s otvory, těsně mezi ně, jak je ukázáno na *obr. 37.4*. Víme, že elektrické náboje rozptylují světlo, takže, když elektron proletí na své cestě k detektoru kolem zdroje, část světla se na něm rozptýlí i do našeho oka, a tak uvidíme, kudy elektron letí. Když například elektron poletí po dráze otvorem 2, měli bychom vidět světelný záblesk vycházející z blízkosti bodu A na *obr. 37.4*. Když elektron poletí přes otvor 1, budeme očekávat, že uvidíme záblesk v blízkosti horního otvoru. Kdyby se stalo, že světlo uvidíme na obou místech současně, protože elektron se rozdělil na poloviny ... Provedme už ten experiment!



Obr. 37.4 Jiný experiment s elektrony

Vidíme toto: *vždy*, když slyšíme „cvaknutí“ z našeho elektronového detektoru (na zachycovači), *vidíme také* světelný záblesk *bud'* v blízkosti otvoru 1 *nebo* blízko otvoru 2, ale *nikdy* ne u obou současně! Výsledek je vždy stejný, bez ohledu na to, kde máme detektor. Z tohoto pozorování můžeme vyvodit závěr, že sledujeme-li elektrony, vidíme, že procházejí jedním nebo druhým otvorem. Experimentálně je tedy potvrzeno, že předpoklad A musí platit.

Kde je potom chyba v našem argumentu *proti* tvrzení A? Proč prostě  $P_{12}$  není rovno  $P_1 + P_2$ ? Vraťme se k experimentu. Sledujeme dráhy elektronů a zjistíme, co se s nimi děje. V každé poloze  $x$  detektoru spočítáme dopadající elektrony a také si pomocí sledování záblesků všimneme, kterým otvorem přiletěly. Můžeme si o tom vést takové záznamy: Vždy, když budeme slyšet „cvaknutí“ a uvidíme záblesk v blízkosti otvoru 1, uděláme čárku v prvním sloupci a když uvidíme záblesk v blízkosti otvoru 2, uděláme čárku v druhém sloupci. Každý elektron je zaznamenán v některé z dvou tříd: mezi těmi, které proletěly otvorem 1 nebo mezi těmi, které proletěly otvorem 2. Z čísel zaznamenaných ve sloupci 1, dostaneme pravděpodobnost  $P_1$ , že elektron přiletí na detektor otvorem 1 a z čísel zaznamenaných ve sloupci 2 dostaneme  $P_2$ , pravděpodobnost toho, že elektron dopadne na detektor otvorem 2. Zopakujeme-li toto měření pro mnoho hodnot  $x$ , dostaneme křivky  $P_1$  a  $P_2$  znázorněné na *obr. 37.4b*).

To není ani tak překvapující! Pro  $P_1$  dostáváme něco velmi podobného tomu, co jsme předtím dostali pro  $P_1$  zakrytím otvoru 2 a  $P_2$  je podobné tomu, co jsme dostali zakrytím otvoru 1. Takže odpadají všechny komplikované záležitosti jako průchod oběma otvory. Sledujeme-li elektrony, vidíme, že prolétají otvory tak, jak to od nich očekáváme. Ať už jsou otvory zavřené nebo otevřené, ty, které vidíme přiletět otvorem 1, mají stejné rozložení, bez ohledu na to, zda je otvor zavřený nebo otevřený.

Ale počkejme! Co nyní dostáváme pro celkovou pravděpodobnost? Pravděpodobnost toho, že elektrony dopadnou na detektor libovolnou cestou? Tuto informaci už máme. Prostě se zatváříme, jako bychom se nikdy nedívali na světelné záblesky a sečteme impulzy detektoru, jež jsme měli rozdělené do dvou sloupců. Musíme sčítat jenom tato čísla. Pro pravděpodobnost, že elektron přiletí na zachycovač libovolným otvorem máme  $P_{12} = P_1 + P_2$ . Takže při sledování toho, kterým otvorem naše elektrony prolétají, již nedostáváme známou interferenční křivku  $P_{12}$ , ale novou  $P_{12}$ , v níž se neprojevuje interference! Když světlo vypneme, dostaneme opět  $P_{12}$ .

Musíme udělat závěr, že *když se na elektrony díváme*, jejich rozložení na zachycovači je jiné, než když se na ně nedíváme. Narušila se snad celá věc tím, že jsme zapnuli světelný zdroj? Musí to být tak, že elektrony jsou velmi jemné a světlo tím, že se na nich rozptyluje, do nich „strčí“ a tím se změní jejich pohyb. Víme, že elektrické pole světla působí na elektron se projevívá silou pohybující elektronem. Možná jsme měli očekávat takovou změnu pohybu. V každém případě má světlo na elektrony velký vliv. Tím, že jsme se pokusili elektrony „sledovat“, změnili jsme jejich pohyb. To znamená, že náraz, který elektron pocítí, když se na něm rozptyluje foton, je takový, že dokáže dostatečně změnit pohyb elektronu, takže, když měl letět do bodu, kde má  $P_{12}$  maximum, přiletěl tam, kde má minimum. To je důvod, proč už nevidíme interferenční efekty.

Možná si myslíte: „Nepoužívejme tak silný zdroj! Zmenšeme jeho jas! Světelné vlny potom budou slabší a nebudou tak silně elektrony rušit. Určitě, čím bude světlo slabší a slabší, tím budou světelné vlny slabší a slabší, až budou mít zanedbatelný efekt.“ Dobře, zkusme to. První věc, které si všimneme, je ta, že záblesky světla rozptýleného na elektronech letících kolem se nezeslabují. *Jsou to vždy stejně velké záblesky*. Jediná věc, která se stane při zmenšování jasu světla, je ta, že někdy slyšíme „cvaknutí“ v detektoru, ale nevidíme *žádný záblesk*. Elektron proletěl kolem aniž bychom ho viděli. Pozorujeme jen to, že světlo se projevuje podobně jako elektrony; věděli jsme, že je to vlnění, nyní zjišťujeme, že jsou to také „částice“. Vždy přiletí nebo se rozptyluje v celcích, které nazýváme „fotony“. Zmenšením *intenzity* světelného zdroje nezměníme *velikost* fotonů, jen *počet* emitovaných fotonů za jednotku času. To vysvětluje, proč při slabém zdroji některé elektrony proletí kolem aniž bychom je viděli. Když elektron letěl kolem, právě tam nebyl žádný foton.

Trochu to odstrašuje. Je-li pravda, že vždy, když „vidíme“ elektron, vidíme záblesk stejné velikosti, pak vidíme *vždy* jen ty elektrony, jejichž pohyb byl světlem ovlivněn. Zkusme provést takový experiment se slabým světlem. Uslyšíme-li nyní cvaknutí v detektoru, uděláme si o tom záznam v některém ze tří sloupců: Ve sloupci 1 pro elektrony, jež vidíme u otvoru 1, ve sloupci 2 pro elektrony, jež vidíme u otvoru 2 a ve sloupci 3 pro elektrony, jež jsme vůbec neviděli. Zpracujeme-li tyto údaje (vypočítáme pravděpodobnosti), dostaneme tyto výsledky: Elektrony, které jsme „viděli u otvoru 1“ mají rozdělení jako  $P_1$ ; ty, jež jsme „viděli u otvoru 2“, mají rozdělení jako  $P_2$  (takže ty, které jsme „viděli buď u otvoru 1 nebo u otvoru 2“ mají rozdělení jako  $P_{12}$ ) a ty, které jsme vůbec neviděli, mají „vlnové“ rozložení jako je  $P_{12}$  na obr. 37.3! *Když elektrony nevidíme, máme interference!*

Je to pochopitelné. Když elektron nevidíme, žádný foton na něj nepůsobil a když ho vidíme, působil na něj foton. Toto působení je vždy stejné, neboť světelné fotony vyvolávají vždy stejné

velký záblesk a rozptyl fotonů je dostatečně silný jev k tomu, aby zrušil jakýkoliv interferenční efekt.

Neexistuje nějaký způsob, jak uvidět elektrony aniž bychom je ovlivnili? V jedné z předcházejících kapitol jsme se dozvěděli, že hybnost, kterou má „foton“, je nepřímo úměrná vlnové délce ( $p = h/\lambda$ ). Náraz, který pocítí elektron od fotonu při jeho rozptylu směrem do našeho oka, závisí určitě na velikosti hybnosti fotonu. Když jsme chtěli elektrony ovlivnit jen slabě, neměli jsme zmenšovat intenzitu světla, ale frekvenci (to je totéž jako zvětšení vlnové délky). Použijme světlo červenější barvy! Můžeme dokonce použít infračervené „světlo“ nebo rádiové vlny (jako radar) a „zjistit“ kudy letěl elektron pomocí nějakého zařízení, které může „vidět světlo“ takových vlnových délek. Použitím jemnějšího „světla“ se snad vyhneme silnému ovlivňování elektronů.

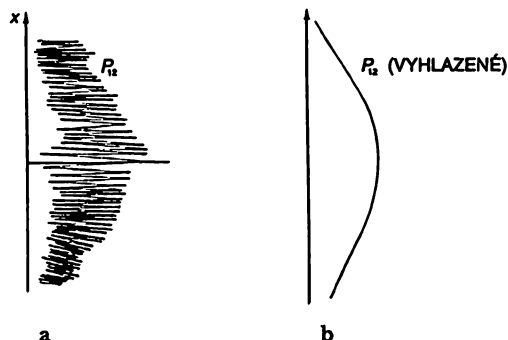
Zkusme provést celý experiment s delšími vlnami. Budeme ho několikrát opakovat vždy se „světlem“, které má větší vlnovou délku. Zpočátku se zdá, že se nic nemění. Výsledky jsou stále stejné. Pak se stane strašná věc. Jistě si pamatujete, jak jsme si řekli, když jsme mluvili o mikroskopu, že vzhledem k vlnové povaze světla existuje určité omezení pro vzdálenost dvou bodů, abychom je mohli ještě vidět jako dvě oddělené tečky. Tato vzdálenost je řádově rovna vlnové délce světla. Proto, když je nyní vlnová délka větší než je vzdálenost mezi otvory, vidíme při rozptylu světla elektrony rozmazaný záblesk a už nemůžeme říci, kterým otvorem elektron proletěl. Víme jen to, že někde proletěl. A právě pomocí „světla“ této barvy zjistíme, že nárazy na elektrony jsou tak slabé, že  $P'_{12}$  se začíná podobat  $P_{12}$  – začneme registrovat nějakou interferenci. Ovlivnění elektronů světlem bude dostatečně malé, až když jsou vlnové délky „světla“ mnohem delší než vzdálenost mezi otvory (kdy už nemáme žádnou možnost určit, kudy elektron proletěl), a tehdy opět dostaneme křivku  $P_{12}$  znázorněnou na obr. 37.3.

Zjišťujeme, že v našem experimentu nelze světlo nastavit tak, aby se dalo určit, kudy elektron proletěl a aby se současně nezměnilo rozložení pravděpodobnosti. Heisenberg naznačil, že nové zákony přírody mohou být konzistentní, jen když existují nějaká základní omezení našich experimentálních schopností, která jsme si předtím neuvědomovali. Jako obecný princip navrhl Heisenberg svůj *princip neurčitosti*, který v řeči našeho experimentu můžeme zformulovat takto: „Nelze zkonstruovat takové zařízení, pomocí něhož bychom mohli určit, kterým otvorem proletěl elektron, aniž bychom elektrony neovlivnili natolik, že by se porušil interferenční obraz.“ Když nějaké zařízení dokáže určit, kterým otvorem elektron proletěl, nemůže být tak dostatečně jemné, že by se podstatně neporušil interferenční obraz. Nikdo nikdy nenašel ani nevymyslel způsob, jak by bylo možné princip neurčitosti obejít. Musíme proto předpokládat, že popisuje základní vlastnost přírody.

Řeknete: „Dobře, ale co bude s předpokladem A? Je pravda nebo není, že elektron prochází buď otvorem 1 nebo otvorem 2? Jediná odpověď, kterou máme je ta, že pomocí experimentu jsme zjistili, že k tomu, abychom se nedostali do rozporu, musíme přemýšlet určitým zvláštním způsobem. Abychom se vyhnuli nesprávným předpovědím, musíme mluvit takto:“ Díváme-li se na otvory, nebo přesněji, máme-li zařízení, jež může určit, zda elektron prochází otvorem 1 nebo 2, lze říci, že prochází buď otvorem 1 nebo otvorem 2. Ale když se nepokoušíme určit, kudy jdou elektrony, když nic nemůže v experimentu elektrony ovlivnit, nelze říci, zda elektrony jdou otvorem 1 nebo otvorem 2. Kdyby to někdo řekl a začal z toho vyvozovat závěry, dopustí se ve své analýze chyby. To je logické „lano“, po němž musíme balancovat, chceme-li úspěšně popsat přírodu.

Když se pohyb hmoty – včetně elektronů – musí popsat pomocí vln, co potom platí pro naše kulky z prvního experimentu? Proč tam nevidíme interferenční obraz? Z vlnového popisu vyplývá, že vlnové délky kulek jsou tak nepatrné, že interferenční obraz je velmi jemný. Tak

jemný, že oddělená maxima a minima nelze rozeznat žádným detektorem s konečnými rozměry. Viděli jsme jen určitý průměr, jenž dává klasickou křivku. Na obr. 37.5 jsme se pokusili schematicky naznačit, jak to vypadá pro velkorozměrné objekty. V části a) je znázorněno rozložení pravděpodobnosti, které lze předpovědět pro kulky pomocí kvantové mechaniky. Rychlé kmity by měly představovat interferenční obraz od takových velmi krátkých vln. Avšak libovolný fyzikální detektor zabírá vždy několik vlnových délek a měření dává hladkou křivku nakreslenou na obrázku v části b).



Obr. 37.5 Interferenční obraz s kulkami: a) skutečný, b) pozorovaný

### 37.7 ZÁKLADNÍ PRINCIPY KVANTOVÉ MECHANIKY

Napíšeme shrnutí hlavních závěrů z našich experimentů, ale upravíme si je do takové formy, aby platily obecně, pro všechny takové experimenty. Naše shrnutí bude úspěšnější, když si nejprve definujeme „ideální experiment“ jako takový, v němž se neprojevují neurčité vnější vlivy, s nimiž nemůžeme počítat. Budeme zcela přesní, když řekneme: „Ideální experiment je ten experiment, v němž jsou všechny počáteční i konečné podmínky přesně definovány.“ „Událost“ budeme obecně nazývat určitou množinou počátečních a konečných podmínek. (Například: „Elektron vyletí z děla, dopadne na detektor a nic jiného se nestane.“) Přistupme tedy ke shrnutí našich poznatků:

#### SHRUTÍ

1. Pravděpodobnost  $P$  toho, že v ideálním experimentu nastane nějaká událost, je dána druhou mocninou absolutní hodnoty komplexního čísla  $\varphi$ , jež se nazývá amplitudou pravděpodobnosti  $\varphi$ .

$$P = |\varphi|^2. \quad (37.6)$$

2. Může-li nějaká událost nastat několika způsoby, je amplituda pravděpodobnosti takové události rovna součtu amplitud pravděpodobností pro každý způsob uvažovaný zvlášť. Nastává interference.

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ P &= |\varphi_1 + \varphi_2|^2. \end{aligned} \quad (37.7)$$

3. Lze-li se v experimentu určit, která z možností skutečně nastala, je pravděpodobnost události rovna součtu pravděpodobností pro každou alternativu. Interference se ztrácí.

$$P = P_1 + P_2. \quad (37.8)$$

Můžeme se stále ptát: „Jak to funguje? Jaký se za tímto zákonem skrývá mechanismus?“ Nikdo za tímto zákonem nenašel žádný mechanismus. Nikdo neumí víc „vysvětlit“ než jsme si právě „vysvětlili“. Nikdo neumí dát nějaký hlubší pohled na tuto situaci. Nemáme ani nejmenší potuchu o existenci nějakého fundamentálnějšího mechanismu, z něhož by bylo možné odvodit tyto výsledky.

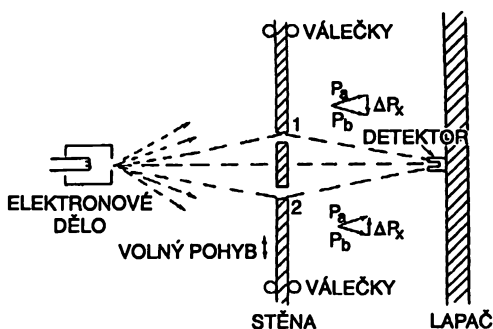
*Rádi bychom zdůraznili velmi důležitý rozdíl, který je mezi klasickou a kvantovou mechanikou.* Mluvili jsme o pravděpodobnosti toho, že za daných okolností přiletí elektron. Předpokládali jsme, že v našem experimentu (nebo třeba v tom nejdokonalejším), by bylo nemožné exaktně předpovědět, co se stane. Můžeme předpovídat jen pravděpodobnost! To by znamenalo, je-li to opravdu tak, že fyzika se vzdala možnosti pokusit se exaktně předpovědět, co se stane za daných okolností. Ano, fyzika se toho vzdala! Nevíme, jak předpovědět, co se stane za daných okolností, a nyní věříme, že je to nemožné, a že jedině, co lze předpovědět, jsou pravděpodobnosti různých událostí. Je třeba uznat, že je to ústupek od našeho dřívějšího ideálu poznání přírody. Může to být krok zpět, ale nikdo nepřišel na to, jak by se dal obejít.

Uvedeme několik poznámek o jednom návrhu, který někdy slyšíme, jak se pokusit vyhnout uvedenému popisu. Lze ho vyjádřit takto: „Elektron má možná nějaký vnitřní pohyb – nějaké vnitřní proměnné – o němž zatím ještě nevíme. Snad to bude důvod, proč neumíme předpovědět, co se stane. Kdybychom se mohli na elektron podívat víc zblízka, snad bychom uměli povědět, kam dopadne.“ Podle toho, co dosud víme, je to nemožné. Vznikne nová obtíž. Předpokládejme, že uvnitř elektronu pracuje jakýsi mechanismus, který určuje, kam elektron dopadne. Tento mechanismus musí *také* rozhodnout, kterým otvorem elektron poletí na své cestě. Nesmíme však zapomenout, že to co je uvnitř elektronu, by nemělo záviset na tom, co děláme, například na tom, zda otevřeme nebo zakryjeme některý z otvorů. Takže, když se elektron rozhodne ještě před startem: a) který otvor použije, b) kam dopadne; pro elektrony, které si zvolily otvor 1, bychom měli dostat  $P_1$ , pro elektrony, které si zvolily otvor 2, bychom měli dostat  $P_2$  a pro elektrony, které proletí oběma otvory, bychom měli nevyhnutně dostat součet  $P_1 + P_2$ . Zdá se, že to by nebylo možné obejít. Právě jsme si ale experimentálně ověřili, že tak tomu není. Nikdo nenašel řešení této hádanky. Proto se musíme v současnosti omezit na výpočet pravděpodobnosti. Říkáme „v současnosti“, ale máme velmi silné podezření, že je to něco, co s námi zůstane navždy – že je nemožné rozluštit tuto záhadu – že příroda skutečně taková je.

## 37.8 PRINCIP NEURČITOSTI

Heisenberg původně vyjádřil princip neurčitosti takto: Měříme-li nějaký objekt a přitom dokážeme určit jeho složku hybnosti ve směru osy  $x$  s nepřesností  $\Delta p$ , nemůžeme současně poznat složku jeho polohy  $x$  s větší přesností než  $\Delta x = h/\Delta p$ . Součin neurčitosti polohy a hybnosti v kterémkoliv okamžiku musí být větší než Planckova konstanta. Je to vyjádření zvláštního případu principu neurčitosti, který jsme již uvedli v obecnější formě: Nelze zkonstruovat zařízení, jež by určilo, která ze dvou možností vznikla aniž by současně nedošlo k porušení interferenčního obrazu.

Na jednom zvláštním případě si ukažme, že Heisenbergův princip neurčitosti musí platit, nechceme-li se dostat do těžkostí. Představme si, že experiment z obr. 37.3 upravíme tak, že stěnu s otvory upevníme na válečky, na nichž se může volně pohybovat nahoru a dolů (ve směru osy  $x$ ), jak je to na obr. 37.6. Pozorným sledováním pohybů stěny se můžeme pokusit určit, kterým z otvorů elektron prošel. Představme si, co se stane, je-li detektor umístěn v poloze  $x = 0$ . Očekávali bychom, že elektron, jenž prochází otvorem 1, musí být stěnou odchylen směrem dolů, aby dopadl na detektor. Když se změní svislá složka hybnosti elektronu, musí se stěna odrazit opačným směrem se stejnou hybností. Stěna pocítí náraz směrem vzhůru. Prochází-li elektron dolním otvorem, měla by stěna pocítit náraz směrem dolů. Je jasné, že pro libovolnou polohu detektoru bude odevzdaná hybnost stěně jiná, když elektron poletí otvorem 1, než když poletí otvorem 2. Takže sledováním pohybu stěny můžeme snadno říci, kterou dráhu elektron použil, aniž bychom elektrony ovlivnili.



Obr. 37.6 Experiment, v němž se měří zpětný ráz stěny

Abychom to mohli udělat, musíme znát hybnost stěny předtím, než jí proletí elektron. Změříme-li její rychlost po průletu elektronu, můžeme určit změnu hybnosti stěny. Pamatujme, že podle principu neurčitosti nemůžeme současně znát s libovolnou přesností polohu stěny a její hybnost. Neznáme-li však přesnou polohu stěny, nevíme ani přesně, kde se nacházejí oba otvory. Pro každý elektron budou na jiném místě. To znamená, že pro každý elektron bude střed interferenčního obrazu jinde. Rychlé změny interferenčního obrazu se takto smažou. V další kapitole si ukážeme kvantitativně, že určíme-li dostatečně přesně hybnost stěny, abychom podle zpětného rázu zjistili, který otvor byl použit, potom bude podle principu neurčitosti neurčitost v poloze stěny  $x$  dost velká, aby se obraz na detektoru posouval nahoru a dolů ve směru osy  $x$  o vzdálenost, jež je rovna přibližně vzdálenosti maxima od vedlejšího minima. Tyto náhodné posuny stačí k tomu, aby se obraz rozmazal natolik, že nevidíme žádnou interferenci.

Princip neurčitosti „ochraňuje“ kvantovou mechaniku. Heisenberg si uvědomil, že kdyby se dala změřit současně hybnost i poloha s větší přesností, kvantová mechanika se zhroutí. Proto vyslovil domněnku, že to musí být nemožné. Mnoho lidí se pokoušelo vymyslet nějaký způsob, jak by se to dalo udělat, ale nikdo nedokázal vymyslet, jak změřit polohu i hybnost čehokoliv – stěny, elektronu, kulečkové koule, atd. – s větší přesností. Kvantová mechanika si zachovává svou ohroženou, ale odůvodněnou existenci.

# Souvislost mezi vlnovým a korpuskulárním hlediskem

---

## 38.1 AMPLITUDY VLN PRAVDĚPODOBNOTI

## 38.2 MĚŘENÍ POLOHY A HYBNOSTI

## 38.3 DIFRAKCE NA KRYSTALECH

## 38.4 VELIKOST ATOMU

## 38.5 ENERGETICKÉ HLADINY

## 38.6 FILOZOFICKÉ DŮSLEDKY

### 38.1 AMPLITUDY VLN PRAVDĚPODOBNOTI

V této kapitole se zamyslíme nad vztahem mezi vlnovým a korpuskulárním hlediskem. Z posledních kapitol už víme, že ani vlnové, ani korpuskulární hledisko není správné. Obvykle jsme se snažili vše podávat přesně nebo alespoň tak přesně, že se to nemuselo měnit, když se naše vědomosti dostaly dále – mohli jsme je rozšířit, ale nikdy jsme je nemuseli měnit! Pokusíme-li se mluvit o vlnovém nebo korpuskulárním obraze, oba jsou přibližné a oba se budou muset změnit. Proto ani to, co se v této kapitole dozvíme, nebude v určitém smyslu přesné; bude to polointuitivní argumentace, která se později upřesní, ale některé věci se změní, budeme-li je interpretovat kvantově – mechanicky správně. Důvod, proč to tak uděláme, je ten, že se nehodláme zabývat přímo kvantovou mechanikou, ale chceme získat aspoň určitou představu o jevech, s nimiž se setkáme. Navíc, protože se všechny naše zkušenosti týkají vln a částic, abychom pochopili, o čem tu jde, dřív než zvládneme celou matematiku kvantově – mechanických amplitud,

je velmi výhodné použít vlnové a korpuskulární představy. Přitom se budeme snažit ilustrovat nejslabší místa, ale většinou budeme téměř zcela korektní – je to zcela věc interpretace.

Především víme, že nový způsob reprezentace světa v kvantové mechanice – nový rámec – spočívá v tom, že každé možné události přísluší amplituda. Týká-li se událost dopadu jedné částice, můžeme určit amplitudu pravděpodobnosti, že se částice najde v různých časech na různých místech. Pravděpodobnost nalezení částice je pak úměrná druhé mocnině absolutní hodnoty amplitudy. Obecně se amplituda pravděpodobnosti, že najdeme částici na různých místech v různých časech, mění s polohou a časem.

Ve zvláštním případě se amplituda mění v prostoru a čase sinusoidálně jako  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  (nezapomínejme, že tyto amplitudy jsou komplexní a ne reálné) a zahrnuje určitou frekvenci  $\omega$  a vlnový vektor  $\mathbf{k}$ . Ukazuje se, že v klasické limitě to odpovídá situaci, kde jsme si představovali, že máme částici se známou energií  $E$ , jež souvisí s frekvencí vztahem

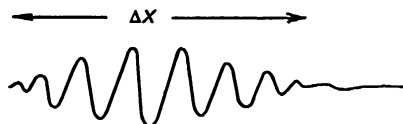
$$E = \hbar \omega \quad (38.1)$$

a známou hybností  $\mathbf{p}$ , která souvisí s vlnovým vektorem vztahem

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}. \quad (38.2)$$

To znamená, že představa částice je omezená. Představa částice – její polohy, hybnosti atd. – kterou tak často používáme, je určitým způsobem neuspokojivá. Například, je-li amplituda pravděpodobnosti toho, že najdeme částici na různých místech, dána funkcí  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , jejíž druhá mocnina absolutní hodnoty je konstantní, bude to znamenat, že pravděpodobnost nalezení částice je pro všechny body stejná. Pak nevíme, kde se částice nachází; částice může být kdekoliv a její poloha je velmi neurčitá.

Na druhé straně, je-li poloha částice více méně dobře známá a umíme ji předpovědět dost přesně, pravděpodobnost toho, že se najde na různých místech, musí být omezena na oblast délky  $\Delta x$ . Mimo tuto oblast je pravděpodobnost nulová. Tato pravděpodobnost je rovna druhé mocnině absolutní hodnoty amplitudy, proto, je-li druhá mocnina absolutní hodnoty rovna nule, bude rovna nule i amplituda. Dostáváme vlnový impulz o délce  $\Delta x$  (obr. 38.1) a jeho vlnová délka (vzdálenost mezi nulovými hodnotami) je to, co odpovídá hybnosti částice.



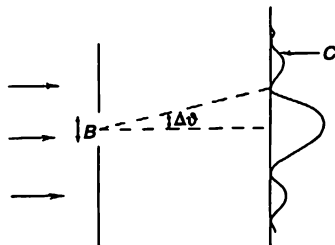
Obr. 38.1 Vlnový balík délky  $\Delta x$

Zde se setkáváme s podivnou vlastností vln. Je to velmi snadná věc, která nijak nesouvisí s kvantovou mechanikou. Něco, co zná každý, kdo se zabývá vlněním, i když nezná kvantovou mechaniku: *Pro krátký vlnový impulz nemůžeme jednoznačně definovat vlnovou délku.* Vlnové číslo je neurčité, souvisí s konečnou délkou impulzu, a proto je neurčitá i hybnost částice.



## 38.2 MĚŘENÍ POLOHY A HYBNOSTI

Podívejme se na dva příklady, abychom si ozřejmili, proč musí podle kvantové mechaniky existovat neurčitost v poloze nebo v hybnosti. Už dříve jsme viděli, že kdyby něco takového neexistovalo – kdyby bylo možné současně měřit polohu i hybnost – byl by to paradox. To naštěstí nenastává a skutečnost, že taková neurčitost vyplývá z vlnového obrazu svědčí o tom, že vše je vzájemně konzistentní.



Obr. 38.2 Difrakce částic procházejících štěrbinou

Uvedeme příklad, na němž lze snadno pochopit, jaký je vztah mezi polohou a hybností. Předpokládejme, že máme štěrbinu a částice s určitou energií, jež přilétají velmi zdaleka, takže v podstatě všechny letí vodorovně (obr. 38.2). Budeme se zajímat o svislou složku hybnosti. Všechny částice mají, v klasickém smyslu, určitou horizontální hybnost  $p_0$ , takže, v klasickém smyslu, známe vertikální hybnost  $p_y$  každé částice předtím, než proletí štěrbinou. Částice neletí ani směrem vzhůru, ani dolů, neboť přilétá od velmi vzdáleného zdroje – a proto je její vertikální hybnost rovna nule. Předpokládejme, že dále letí částice štěrbinou vertikální šířky  $B$ . Po průletu štěrbinou známe vertikální polohu – souřadnici  $y$  a to s pozoruhodnou přesností  $\pm B$ . Neurčitost polohy  $\Delta y$  je tedy rovna řádově  $B$ . Mohlo by se zdát, vzhledem k tomu, že hybnost částice má čistě horizontální směr, bude  $\Delta p_y$  rovno nule, ale není tomu tak. Věděli jsme, že hybnost je horizontální, ale už to nevíme. Dříve, než částice proletěly otvorem, neznali jsme jejich vertikální polohy a nyní, tím, že jsme je nechali proletět otvorem, jsme ztratili informaci o jejich vertikální hybnosti! Proč? Podle vlnové teorie při průchodu vln štěrbinou dochází k jejich rozmazání nebo difrakci, podobně jako u světla. Proto existuje určitá pravděpodobnost, že částice nevyletují ze štěrbiny úplně přímo. Difrakční efekt rozmáže obraz jejich rozmístění a úhel, který můžeme definovat jako úhel prvního minima, je mírou neurčitosti konečného úhlu.

Jak dochází k rozmazání obrazu? Řekneme-li, že je rozmazaný, znamená to, že existuje určitá pravděpodobnost, že částice se vychýlí nahoru nebo dolů, tj. že bude mít složku hybnosti ve směru nahoru nebo dolů. Mluvíme o pravděpodobnosti a o částici, protože difrakční obraz můžeme proměnit pomocí počítače částic, který, když zachytí částici, dejme tomu v bodě  $C$  na obr. 38.2, zachytí celou částici, takže v klasickém smyslu, aby se částice dostala od štěrbinu do  $C$ , musí mít nějakou vertikální hybnost.

Abychom dostali aspoň přibližnou představu o rozmazání hybnosti, uvědomme si, že rozmazání vertikální hybnosti je rovno  $p_0 \Delta \vartheta$ , kde  $p_0$  je horizontální hybnost. Jak velké je  $\Delta \vartheta$  v difrakčním obraze? Víme, že první minimum nastává při takovém úhlu  $\Delta \vartheta$ , při němž je dráha vln od jednoho okraje štěrbinu delší o vlnovou délku než dráha vln od druhého okraje štěrbinu – zdůvodnili jsme si to už dříve (v kapitole 30). Proto  $\Delta \vartheta$  je  $\lambda/B$ , takže  $\Delta p_y$  je v tomto

experimentu  $p_0 \lambda / B$ . Vidíme, že čím víc zmenšíme  $B$  a přesněji určíme polohu, tím bude difrakční obraz širší. Vzpomeňme si, že čím víc jsme uzavřeli šterbinu v našem experimentu s mikrovlnami, tím větší byla intenzita ve vzdálených polohách. Takže, čím užší bude šterbina, tím víc se celý obraz roztáhne a tím je větší pravděpodobnost, že naměříme příčnou složku hybnosti částice. Neurčitost vertikální hybnosti je tedy nepřímo úměrná neurčitosti  $y$ . Vidíme, že jejich součin je roven  $p_0 \lambda$ . Ale  $\lambda$  je vlnová délka,  $p_0$  je hybnost a podle kvantové mechaniky součin vlnové délky a hybnosti dává Planckovu konstantu  $h$ . Dostali jsme tak pravidlo, že součin neurčitosti vertikální hybnosti a neurčitosti vertikální polohy je řádově roven  $h$ :

$$\Delta y \Delta p_y \approx h. \quad (38.3)$$

Nemůžeme sestrojít zařízení, jež by umožnilo ze známé vertikální polohy částice předpovědět i její vertikální pohyb s větší přesností, než je dána pomocí (38.3). Neurčitost vertikální hybnosti musí být větší než  $h/\Delta y$ , kde  $\Delta y$  je neurčitost, s níž známe polohu.

Lidé občas říkají, že celá kvantová mechanika je pochybená. Když částice přilétávala zleva, měla nulovou vertikální hybnost a nyní, když prošla šterbinou a dopadla na detektor, je její poloha známa. Zdá se, že jak poloha, tak i hybnost jsou známé s libovolnou přesností. Je to tak, po dopadu částice můžeme určit její polohu a hybnost, kterou musela mít, aby dopadla na dané místo. Je to pravda, ale netýká se to relace neurčitosti (38.3). Rovnice (38.3) se vztahuje k možnosti předpovědět situaci na základě znalostí z minulosti. Co máme z toho, když řekneme: „Věděl jsem, jaká byla hybnost před průchodem šterbinou a nyní znám polohu“, když teď nevím nic o hybnosti. Skutečnost, že částice proletěla šterbinou, nám nedovoluje předpovědět její vertikální hybnost. Mluvíme o prediktivní teorii, nejen o měření z minulosti. Musíme mluvit o tom, co dokážeme předpovědět.

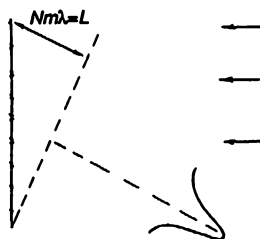
Nyní pojďme na celou věc z opačného konce. Provedme si podrobnější kvantitativní analýzu dalšího příkladu téhož jevu. V předcházejícím příkladě jsme měřili hybnost klasickou metodou – uvažovali jsme o směru, rychlosti, úhlech atd., takže hybnost jsme určovali klasicky. Ale protože hybnost souvisí s vlnovým číslem, existuje další možnost, jak změřit hybnost částice (fotonu nebo podobně), jež nemá klasický analog, neboť je založena na rovnici (38.2). Spočívá v měření vlnové délky. Pokusme se hybnost změřit tímto způsobem.

Předpokládejme, že máme difrakční mřížku s velkým počtem vrypů (obr. 38.3) a že na ni nasměrujeme svazek částic. O tomto problému jsme mluvili často. Mají-li částice určitou hybnost, v určitém směru dostáváme, díky interferenci, ostré maximum. Mluvili jsme i o tom, jak přesně umíme určit hybnost, tj. jaká je rozlišovací schopnost této mřížky. Místo toho, abychom to znovu odvozovali, můžeme se odvolat na kapitolu 30, kde vidíme, že relativní neurčitost při měření vlnové délky pomocí dané mřížky je  $1/Nm$ , kde  $N$  je počet vrypů na mřížce a  $m$  je řád na difrakčním obraze. Takže

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm}. \quad (38.4)$$

Vztah (38.4) lze napsat jako

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{Nm\lambda} = \frac{1}{L}, \quad (38.5)$$



Obr. 38.3 Určení hybnosti pomocí difrakční mřížky

kde  $L$  je vzdálenost znázorněná na obr. 38.3. Je to rozdíl vzdáleností, jež musí projít vlna nebo cokoliv, když se odrazí od horního okraje mřížky a když se odrazí od dolního okraje. Vlny, které vytvářejí difrakční obraz, přicházejí od různých částí mřížky. První přiletí ta, která přichází od dolního okraje mřížky ze začátku vlnového signálu, další pocházejí od pozdějších částí vlnového signálu a odrážejí se od různých částí mřížky, až nakonec přiletí poslední, jež odpovídá bodu vzdálenému ve vlnovém signálu o vzdálenosti  $L$  od začátku. Proto, abychom dostali v našem spektru ostrou čáru, jež odpovídá pevné dané hybnosti s neurčitostí podle (38.4), musíme mít vlnový balík aspoň o délce  $L$ . Je-li balík kratší, nevyužijeme celou mřížku. Vlny vytvářející spektrum se odrážejí od velmi malé části mřížky a mřížka nepracuje, jak by měla – dostaneme velké úhlové rozložení. Aby bylo rozložení užší, musíme použít celou mřížku, aby se aspoň v některém okamžiku odrážel celý vlnový balík současně od různých částí mřížky. Proto, chceme-li, aby neurčitost vlnové délky byla menší, než udává vztah (38.5), délka balíku musí být  $L$ . Platí

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} = \Delta \left( \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\Delta k}{2\pi}. \quad (38.6)$$

Proto

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}, \quad (38.7)$$

kde  $L$  je délka vlnového balíku.

To znamená, že máme-li vlnový balík, který je kratší než  $L$ , musí být neurčitost ve vlnovém čísle větší než  $2\pi/L$  nebo že součin neurčitosti vlnového čísla a délky balíku – kterou si označíme jako  $\Delta x$  – bude větší než  $2\pi$ . Jako  $\Delta x$  ji značíme proto, protože je to neurčitost v poloze částice. Má-li vlnový balík jen omezenou délku, určuje nám místo, kde můžeme najít částice s nepřesností  $\Delta x$ . Vlastnost vln, že délka vlnového balíku násobená neurčitostí vlnového čísla je rovna nejméně  $2\pi$ , je známa každému, kdo se vlnami zabývá. Nemá nic společného s kvantovou mechanikou. Znamená to jen to, že máme-li konečný vlnový balík, nemůžeme v něm přesně určit počet vln. Pokusme se to pochopit z jiného hlediska.

Předpokládejme, že máme konečný vlnový signál délky  $L$ . Protože na koncích musí zanikat, jak je to na obr. 38.1, neurčitost v počtu vln na délce  $L$  je přibližně  $\pm 1$ . Počet vln na délce  $L$  je  $kL/2\pi$ . Proto  $k$  je neurčitě a opět dostáváme výsledek (38.7); je to jen obyčejná vlastnost vln. Totéž platí o vlnách v prostoru, kde  $k$  je počet radiánů na centimetr a  $L$  je délka balíku, i o vlnách v čase, kde  $\omega$  je počet oscilací za sekundu a  $T$  je „délka“ času trvání signálu. Máme-li tedy vlnový signál, který trvá jenom určitý omezený čas  $T$ , je neurčitost frekvence dána vztahem

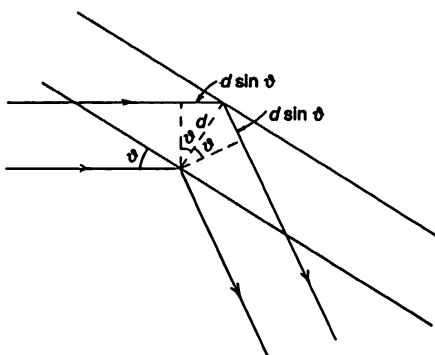
$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (38.8)$$

Snažili jsme se zdůraznit, že to jsou vlastnosti jen samotných vln, jež jsou dobře známé například v teorii zvuku.

Důležité je to, že v kvantové mechanice interpretujeme vlnové číslo jako mřru hybnosti částice podle pravidla  $p = \hbar k$ , takže ze vztahu (38.7) vyplývá  $\Delta p \approx \hbar/\Delta x$ . Tak je omezena klasická představa hybnosti. (Je zcela přirozené, že musí být nějak omezena, chceme-li částice reprezentovat vlnami!) Podařilo se nám najít jakési pravidlo, které nám pomáhá rozlišit, kde začínají selhávat klasické představy.

### 38.3 DIFRAKCE NA KRYSTALECH

Dále si představme odraz vln na krystalu. Krystal je objemné těleso skládající se z množství pěkně seřazených podobných atomů – některé komplikace zahrneme později. Otázka zní, jak je máme nastavit světlu (rentgenovým paprskům), elektronům, neutronům aj., abychom dostali po odrazu výrazné maximum v daném směru. Abychom dostali silný odraz, musí být na všech atomech rozptyl ve fázi. Nemůže jich být stejný počet ve fázi a v protifázi, neboť by se vlny vyrušily. Lze toho dosáhnout tak, že najdeme oblasti konstantní fáze, jak jsme již vysvětlovali; jsou to roviny, jež svírají s počátečním i konečným směrem stejné úhly (obr. 38.4).



Obr. 38.4 Rozptyl vln na krystalových rovinách

Vezmeme-li dvě rovnoběžné roviny, jako na obr. 38.4, vlny, které se od nich odrazily, budou ve fázi za předpokladu, že rozdíl vzdáleností, které překonají čela vln, je roven celému násobku vlnových délek. Je vidět, že tento rozdíl je  $2d \sin \vartheta$ , kde  $d$  je kolmá vzdálenost mezi rovinami. Takže podmínkou pro koherentní odraz je, aby

$$2d \sin \vartheta = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3\dots) \quad (38.9)$$

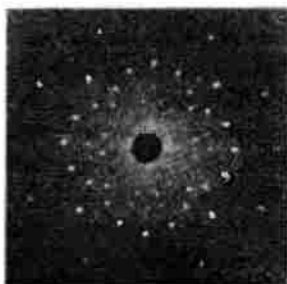
Máme-li například krystal, jehož roviny splňují podmínku (38.9) pro  $n = 1$ , bude odraz silný. Na druhé straně, jsou-li v polovině vzdáleností mezi rovinami další atomy (se stejnou hustotou), tyto intermediální roviny budou také způsobovat stejně silný rozptyl a interference způsobí, že výsledný efekt bude nulový. Proto se  $d$  musí vztahovat na přilehlé roviny; vztah (38.9) nemůžeme použít pro roviny vzdálené o pět vrstev!

Pro zajímavost: Krystaly nejsou ve skutečnosti tak jednoduché, aby se v nich určitým způsobem opakoval stejný druh atomů. Kdybychom chtěli provést jejich dvourozměrné analýzy,

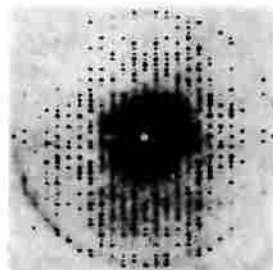
velmi by se podobal tapetě, na níž se pravidelně opakuje nějaký vzor. Vzorem v případě atomů rozumíme nějaké jejich seskupení: – například pro uhličitán vápenatý atom vápníku, atom uhlíku a tři atomy kyslíku – kde může být relativně velký počet atomů. Ať je vzor jakýkoliv, vždy se opakuje. Tento základní vzorek se nazývá *jednotkovou buňkou*.

Různé druhy opakování vzorků definují to, čemu říkáme *typ mřížky*. Typ mřížky lze poznat ihned podle toho, jaké symetrické obrazce vytváří odražené světlo. Podle míst, kde dochází k odrazům, určíme typ mřížky, ale abychom zjistili, co je uvnitř každé buňky, musíme vzít v úvahu *intenzitu* rozptylu v různých směrech. *Směr*, v němž dochází k rozptylu, závisí na druhu mřížky, ale *jak silný* je rozptyl v příslušném směru, je určeno tím, co je v každé jednotkové buňce. Tímto způsobem se zjišťuje struktura krystalů.

Na *obrázcích 38.5 a 38.6* jsou dvě fotografie vzorků pomocí rentgenové difrakce. Znázorňují rozptyl na kamenné soli a na myoglobinu (červené barvivo svalů).

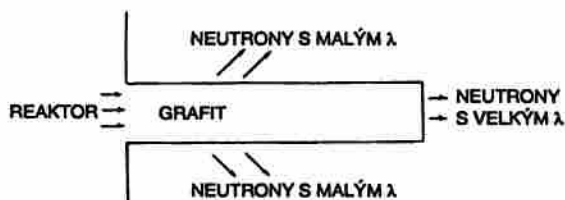


Obr. 38.5



Obr. 38.6

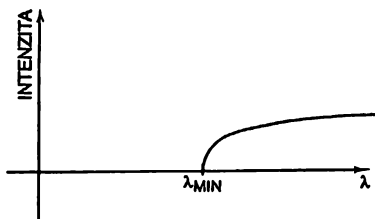
Zajímavá situace nastává, jsou-li sousední krystalové roviny od sebe vzdáleny o méně než  $\lambda/2$ . V tom případě podmínka (38.9) nemůže být splněna. Proto je-li  $\lambda$  větší než dvojnásobek vzdálenosti mezi sousedními rovinami, nevzniká žádný difrakční vzor a světlo (nebo cokoliv) projde materiálem, aniž by se odrazilo nebo ztratilo. Je-li  $\lambda$  v případě světla mnohem větší než vzdálenost mezi rovinami, prochází světlo krystalem, aniž by docházelo k jeho odrazu od rovin krystalu.



Obr. 38.7 Difúze neutronů z reaktoru grafitovým blokem

To má zajímavý důsledek pro neutrony z reaktoru (jsou to zřejmě částice za všechny peníze!). Postavíme-li jim do cesty blok z grafitu, neutrony difundují a razí si jím cestu (*obr. 38.7*). Difundují, neboť se srážejí s atomy, ale přesně řečeno podle vlnové teorie, odrazí se, neboť dochází k jejich difrakci na krystalových rovinách. Neutrony, jež vylétají z velmi velkého kusu grafitu na druhém konci, mají všechny velkou vlnovou délku! Když si graficky znázorníme jejich intenzitu jako funkci vlnové délky, vidíme, že je různá od nuly jen pro vlnové délky větší než určitá minimální délka (*obr. 38.8*). Znamená to, že tak můžeme získat velmi pomalé neutrony.

Grafitem proletí jen ty nejpomalejší neutrony, které se na krystalových rovinách nedifragují nebo nerozptylují, ale letí přímo skrz jako světlo sklem a nerozptylují se do stran. Je mnoho jiných důkazů existence neutronových vln a vln jiných částic.



Obr. 38.8 Intenzita neutronů vylétujících z grafitového bloku jako funkce vlnové délky

### 38.4 VELIKOST ATOMŮ

Nyní se zamyslíme nad jinou aplikací principu neurčitosti vyjádřeného rovnicí (38.3). Tuto aplikaci nesmíme brát příliš vážně. Myšlenka je správná, ale naše analýza nebude moc přesná. Týká se demonstrace rozměrů atomů a toho, že podle klasické teorie by měly elektrony vyzářovat světlo a obíhat po spirále, dokud nespádnou na jádro. To však nemůže být v souladu s kvantovou mechanikou, kde nemůžeme vědět, kde byl každý elektron a jak rychle se pohyboval.

Představme si, že chceme určit polohu elektronu ve vodíkovém atomu. Je nemožné, abychom přesně určili jeho polohu, neboť pak by byla neurčitost jeho hybnosti nekonečná. Kdykoliv se na elektron podíváme, někde se nachází; má však určitou amplitudu pravděpodobnosti, vyskytovat se na různých místech. Tato místa se nemohou nacházet všechna v jádře; budeme předpokládat, že jsou rozložena ve vzdálenosti  $a$  od jádra, tj. že vzdálenost elektronu od jádra je obvykle řádově rovna  $a$ . Minimalizací celkové energie atomu určíme  $a$ .

Ze vztahu neurčitosti vyplývá, že neurčitost hybnosti je  $h/a$ , takže kdybychom chtěli nějak změřit hybnost elektronu, například pomocí rozptylu rentgenových paprsků na elektronu a sledováním Dopplerova jevu na pohybujícím se rozptylovém centru, očekávali bychom, že nedostaneme vždy nulu – elektron nebude stát na místě – ale jeho hybnost musí být řádově  $p \approx h/a$ . Kinetická energie je přibližně  $1/2 mv^2 = p^2/2m = h^2/2ma^2$ . (V určitém smyslu provádíme jistý druh rozměrové analýzy, jak závisí kinetická energie na Planckově konstantě, na  $m$  a rozměrech atomu. Naši odpovědi můžeme důvěřovat s přesností na faktory jako 2,  $\pi$  atd. Dokonce ani  $a$  jsme nedefinovali moc přesně.) Potenciální energie je rovna  $e^2$  dělenému vzdáleností od středu,  $-e^2/a$ , kde  $e^2$  (jak si pamatujeme) je rovna druhý mocnině náboje elektronu dělené  $4\pi\epsilon_0$ . Vtip je nyní v tom, že potenciální energie klesá, když se  $a$  zmenšuje, ale čím je menší  $a$ , tím je podle principu neurčitosti větší hybnost a tedy i kinetická energie. Celková energie je

$$E = \frac{h^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}. \quad (38.10)$$

Nevíme, čemu je rovno  $a$ , ale víme, že atom se uspořádá tak, aby došlo k určitému kompromisu a aby jeho energie byla tak malá, jak jen může být. Abychom našli minimum  $E$ , zderivujeme ji podle  $a$ , položíme derivaci rovnu nule a z této rovnice najdeme  $a$ . Derivace  $E$  je rovna

$$\frac{dE}{da} = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{a^2}, \quad (38.11)$$

a když ji položíme rovnu nule, dostaneme pro hodnotu  $a$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ metrů}. \quad (38.12)$$

Tato vzdálenost se nazývá *Bohrův poloměr* a tak jsme se dozvěděli, že rozměry atomů jsou řádově  $10^{-10} \text{ m}$ , což je pravda. To je krásné – je to úžasné, neboť do této doby jsme neměli žádnou bázi, na jejímž základě bychom mohli odhadnout rozměry atomů! Přitom z klasického hlediska atomy vlastně nemohou existovat, neboť elektrony by měly spadnout po spirále na jádro.

Dosadíme-li hodnotu pro  $a_0$  z (38.12) do vztahu pro energii (38.10), dostáváme

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13,6 \text{ eV}. \quad (38.13)$$

Co znamená záporná energie? Znamená, že elektron má v atomu menší energii, než když je volný. Znamená to, že je vázaný. Znamená to, že k uvolnění elektronu je třeba energie. K ionizaci vodíkového atomu musíme dodat energii 13,6 eV. Nemáme důvod, abychom si nemysleli, že má být dvakrát nebo třikrát větší než tato energie – nebo poloviční nebo  $1/\pi$  násobek, když naše argumentace byla taková ledabylá. My jsme však trochu podváděli, použili jsme takové konstanty, aby nám vyšlo správné číslo! Hodnota 13,6 elektronvoltů se nazývá Rydbergova energie. Je to ionizační energie vodíkového atomu.

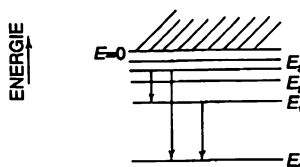
Teď alespoň chápeme, proč se nepropadneme podlahou. Když jdeme, naše boty tlačí svými atomy na atomy podlahy. Kdybychom stlačili atomy blíže k sobě, musely by elektrony zabírat menší prostor a podle principu neurčitosti by se musely v průměru zvýšit jejich hybnosti, což by znamenalo vyšší energii. Odpor při stlačování atomů je kvantově-mechanický efekt a ne klasický efekt. Klasicky bychom předpokládali, že kdybychom k sobě přiblížili všechny elektrony a protony, energie by se stále zmenšovala. Nejvýhodnější seskupení kladných a záporných atomů v klasické fyzice je, když jsou všechny těsně u sebe. V klasické fyzice to bylo dobře známé a existence atomů byla záhadou. Samozřejmě, vědci tehdy objevili několik způsobů, jak se dostat z těžkostí, ale teprve my jsme našli ten *správný* způsob! (Snad.)

I když nemáme předpoklady, abychom tomu na naší úrovni porozuměli, zmíníme se o tom, že tam, kde je mnoho elektronů, snaží se být od sebe co nejdále. Obsadí-li jeden elektron určitý prostor, druhý elektron ho neobsadí. Přesněji řečeno existují dva případy spinu, takže dva elektrony mohou ještě „sedět“ jeden na druhém, přičemž mají opačné spiny, ale víc jich tam už nemůžeme dát. Ostatní musíme dát na jiná místa a to je skutečný důvod, proč má hmota pevnost. Když bychom mohli umístit všechny elektrony na stejné místo, hmota by se zkonzovala ještě víc, než nyní. Právě této skutečnosti, že všechny elektrony se nemohou shluknout v jednom místě, vděčíme za to, že stoly a jiné věci jsou pevné.

K pochopení vlastností hmoty budeme muset zřejmě použít kvantovou mechaniku a nemůžeme se spokojit s klasickou mechanikou.

### 38.5 ENERGETICKÉ HLADINY

Mluvili jsme o atomu v nejnižším možném energetickém stavu, ale jak je vidět, elektron dokáže i jiné věci. Může se vrtět a kmitat mnohem energičtěji, takže v atomu existuje mnoho různých pohybů. Podle kvantové mechaniky může mít atom určitou energii jen ve stacionárním stavu. Na obrázku 38.9 máme diagram, kde nanášíme energii na vodorovnou osu a pro každou dovolenou energii máme nakreslenou vodorovnou čáru. Je-li elektron volný, tj. je-li jeho energie kladná, jeho energie může být libovolná, může se tedy pohybovat libovolnou rychlostí. Energie vázaného elektronu však nejsou libovolné. Atomy musí mít některou z dovolených hodnot energie, jako jsou ty na *obr. 38.9*.



Obr. 38.9 Energetické schéma atomu znázorňující několik možných přechodů

Označme dovolené hladiny energie  $E_0, E_1, E_2, E_3$ . Nachází-li se atom v některém z excitovaných vzbuzených stavů  $E_1, E_2$  atd., nezůstane v něm navždy. Dříve nebo později klesne do nižšího stavu a vyzáří energii ve formě světla. Frekvenci emitovaného světla lze určit pomocí zákona zachování energie a kvantově-mechanického chápání toho, že frekvence světla souvisí s jeho energií podle (38.1). Proto frekvence světla, jež se uvolní při přechodu od energie  $E_3$  k energii  $E_1$  (například), je

$$\omega_{31} = \frac{(E_3 - E_1)}{\hbar}. \quad (38.14)$$

To je pak charakteristická frekvence atomu a definuje jeho spektrální emisní čáru. Další možný přechod by byl od  $E_3$  k  $E_0$ . Ten bude odpovídat frekvenci

$$\omega_{30} = \frac{(E_3 - E_0)}{\hbar}. \quad (38.15)$$

Další možnost je ta, že když byl atom vzbuzen do stavu  $E_1$ , může spadnout do základního stavu  $E_0$ , přičemž vyzáří foton s frekvencí

$$\omega_{10} = \frac{(E_1 - E_0)}{\hbar}. \quad (38.16)$$

Tyto tři přechody jsme vybrali proto, abychom mohli ukázat na zajímavý vztah. Z (38.14), (38.15) a (38.16) je snadno vidět, že

$$\omega_{30} = \omega_{31} + \omega_{10}. \quad (38.17)$$

Obecně platí, že najdeme-li dvě spektrální čáry, můžeme očekávat, že další najdeme na součtu



jejich frekvencí (nebo na rozdíl jejich frekvencí). Tyto čáry můžeme objasnit pomocí série hladin tak, že každá čára odpovídá rozdíl energií nějakého páru energetických hladin. Tato pozoruhodná shoda spektrálních frekvencí byla objevena dříve, než kvantová mechanika a nazývá se *Ritzův kombinační princip*. Z hlediska klasické mechaniky je to opět záhada. Nemusíme se dále snažit zdůrazňovat, že klasická fyzika selhává v oblasti atomů, zdá se, že jsme to dokázali dostatečně jasně.

Již jsme si řekli, že kvantová mechanika je reprezentována pomocí amplitud, jež se chovají jako vlny s určitými frekvencemi a vlnovými čísly. Podívejme se, jak plyne z hlediska amplitud, že atom má určité energetické stavy. Je to něco, co nemůžeme pochopit z toho, co jsme si dosud řekli, ale všichni víme, že stojaté vlny mají určité frekvence. Například zvuk uzavřený ve varhanní přístale však může vibrovat více způsoby, přičemž každému z nich přísluší určitá frekvence. Proto má objekt, v němž jsou vlny uzavřené, určité rezonanční frekvence. To, že vlnění může existovat jen při určitých frekvencích, je vlastnost vln v uzavřeném prostoru. O tom budeme mluvit podrobně včetně vzorců až později. A protože mezi frekvencemi amplitud a energií existuje obecný vztah, nejsme překvapeni, že s elektrony vázanými v atomech souvisí jen určité energie.

## 38.6 FILOZOFICKÉ DŮSLEDKY

Proberme si stručně některé filozofické důsledky vyplývající z kvantové mechaniky. Jako vždy má tento problém dvě stránky: jednou jsou filozofické důsledky pro fyziku a druhou jejich extrapolace do jiných oblastí. Když se filozofické myšlenky, spojené s přírodní vědou, přenášejí do jiných oblastí, obvykle se zcela překroutí. Proto naše poznámky omezíme, pokud to bude možné, jen na fyziku.

Nejzajímavějším aspektem je především myšlenka principu neurčitosti; pozorování nějakého jevu ovlivňuje samotný jev. Vždy bylo známo, že pozorování nějakého jevu se tento jev ovlivňuje, ale jde tady o to, že toto ovlivňování nelze zanedbat, minimalizovat nebo libovolně zmenšovat pomocí vhodného uspořádání aparatury. Sledujeme-li nějaký jev, nemůžeme si pomoci, ale musíme ho aspoň minimálním způsobem narušit a *toto narušení je nevyhnutné pro konzistentnost našeho chápání*. V předkvantové fyzice byl někdy pozorovatel důležitý, ale jen v triviálním smyslu. Byl nastolen takový problém: Když v lese padne strom a není tam nikdo, kdo by to slyšel, vzniká přitom zvuk? Přirozeně, pádem *skutečného* stromu ve *skutečném* lese vzniká zvuk, i kdyby tam nikdo nebyl. I když tam nikdo není, kdo by to slyšel, zůstanou i jiné stopy. Zvuk rozechvěje listy a kdybychom byli dostatečně pozorní, snad bychom zjistili, že se někde nějaký trn otřel o list a jemně ho poškrábal, což nelze vysvětlit bez předpokladu, že se list rozechvěl. Takže v určitém smyslu musíme přiznat, že při tom vzniká zvuk. Můžeme se zeptat: Došlo přitom k *pocitu* zvuku? Ne, pocítování zřejmě souvisí s vědomím. A zda si to uvědomili mravenci, zda byli nějakí mravenci v lese nebo zda si to uvědomil strom, to nevíme. Nechme tento problém tak, jak je.

Další věc, kterou lidé zdůrazňovali před kvantovou mechanikou, je myšlenka, že bychom neměli mluvit o věcech, jež nemůžeme měřit. (Skutečně to tvrdila i teorie relativity.) Nemůžeme-li něco určit měřením, nemá to v teorii co hledat. Protože přesnou hodnotu hybnosti lokalizované částice nelze měřením určit, nemá v teorii místo. Představa, že tak to bylo v klasické teorii, je *falešná*. Je důsledkem nedbalé analýzy situace. Nemožnost přesného *měření* polohy a hybnosti ještě *a priori* neznamená, že o nich nemůžeme mluvit. Znamená to jen tolik, že o nich *nemusíme* mluvit. Ve vědě je taková situace: Pojem nebo představa, kterou nelze měřit nebo nelze přímo odvodit z experimentu, může být, ale nemusí být užitečná. Nemusí existovat v teorii. Jinými slovy, předpokládáme, že porovnáme klasickou teorii světa s kvantovou teorií a předpo-

kládáme, že experimentálně platí fakt, že jak polohu tak i hybnost můžeme měřit jen nepřesně. Vzniká otázka, zda *představa* přesné polohy částice a *představa* přesné hybnosti částice platí nebo ne. Klasická teorie tyto představy připouští, kvantová teorie nepřipouští. To samo o sobě ještě neznamená, že klasická fyzika je chybná. Když byla objevena kvantová mechanika, klasici (to byli všichni kromě Heisenberga, Schrödingera a Borna) říkali: „Podívejte se, vaše teorie nestojí za nic, protože neumíte dát odpovědi na určité otázky jako například: Jaká je přesná poloha částice? Kterým otvorem prošla? atd.“ Heisenbergova odpověď zněla: „Nepotřebujeme odpovědi na tyto otázky, protože vy je nemůžete experimentálně ověřit.“ Vtip je v tom, že nemusíme. Vezměme si dvě teorie: *a* a *b*. Teorie *a* obsahuje představu, kterou nelze přímo ověřit, ale která se používá při analýze a teorie *b* tuto představu neobsahuje. Když se teorie ve svých předpovědích neshodnou, nelze tvrdit, že *b* je špatná, protože neumí vysvětlit představu, kterou používá *a*, neboť je to představa, jež patří mezi ty, co nelze přímo ověřit. Je vždy dobré, když víme, které představy nelze přímo ověřit, ale ne vždy je nutné je všechny odstranit. Není pravda, že vědu můžeme posunout dále jen pomocí koncepcí, jež přímo souvisí s experimentem.

Kvantová mechanika obsahuje amplitudu vlnové funkce, potenciál a mnoho dalších konstrukcí, jež nelze přímo měřit. Podstata vědy spočívá v její schopnosti *předpovídat*. Předpovídat znamená říci, co se stane v experimentu, který ještě nikdo nikdy neudělal. Jak to můžeme vědět? Nezávisle na experimentu předpokládáme, že víme, co při něm probíhá. Musíme extrapolovat experimenty do oblasti, kde se ještě nedělaly. Musíme své představy rozšířit na situace, v nichž je ještě nikdo neproověřil. Když to neuděláme, nemáme předpověď. Proto se klasickým fyzikům zdálo rozumné předpokládat, že poloha – jež má jasný smysl v bejsbolu – bude mít smysl i pro elektron. Nebyl to projev hlouposti. Byl to rozumný proces. Dnes říkáme, že zákon relativity platí pro všechny energie, ale jednou může někdo přijít a říci, jací jsme byli hloupi. V čem jsme „hloupi“, nevíme, dokud „nevystrčíme hlavu ven“. Celá idea spočívá v tom, abychom vystrčili ven hlavu. Jediný způsob, jak můžeme zjistit, že se mýlíme, je ten, že se podíváme, jaké jsou naše předpovědi. Je nutné, abychom vymýšleli nové konstrukce.

Už jsme udělali několik poznámek o neurčitosti kvantové mechaniky. O tom, že nejsme schopni předpovědět, co se fyzikálně stane za daných fyzikálních podmínek, jež jsou uspořádány tak pečlivě, jak jen lze. Máme-li atom, který je v excitovaném stavu a který se chystá vyzářit foton, nemůžeme říci, *kdy* ho vyzáří. V každém okamžiku má určitou amplitudu, že foton vyzáří a my umíme předpovědět jen pravděpodobnost emise; nemůžeme předpovědět budoucnost přesně. To dalo podnět ke vzniku všelijakých nesmyslů, k otázkám o smyslu svobodné vůle a k myšlence, že svět je neurčitý.

Musíme zdůraznit, že klasická fyzika je také v určitém smyslu indeterministická. Obyčejně se má za to, že tato vlastnost, tj. že nemůžeme předpovědět budoucnost, je důležitá kvantově-mechanická vlastnost a tím by se mělo vysvětlovat myšlení, city, vůle atd. Kdyby svět *byl* klasický – kdyby byly jen klasické zákony mechaniky – není vůbec zřejmé, že mysl by nepracovala více méně stejně. Je pravda, že kdybychom klasicky znali polohu a rychlost každé částice ve světě nebo v krabici s plynem, mohli bychom exaktně předpovědět, co bude. Proto je klasický svět deterministický. Předpokládejme však, že máme konečnou přesnost a že známe polohu každého atomu dejme tomu s přesností jedné miliardtiny. Pak tento atom narazí do dalšího atomu a když jsme jeho polohu neznali přesněji než na jednu miliardtinu, bude po srážce nepřesnost v jeho poloze ještě větší. Další srážkou se chyba ještě zvětší, takže, když začneme třeba jen s malými chybami, ty rychle narostou na velmi velkou neurčitost. Uvedeme příklad. Voda se při pádu z přehrady třísť a stojíme-li někde blízko, tu a tam nám na nose přistane kapka. Zdá se to být zcela náhodné a přece by se to dalo předpovědět pomocí klasických zákonů. Přesné polohy

kapek závisí na proudění vody dřív než protéká přes přehradu. Jak? Nejmenší nahodilosti se ve vodopádu zesilují, takže dostáváme úplnou nahodilost. Je jasné, že polohy kapek nemůžeme reálně předpovědět, když neznáme pohyb vody *naprosto přesně*.

Přesněji řečeno, při libovolné přesnosti lze najít dostatečně vzdálený čas, pro který nemůžeme udělat platné předpovědi. Vtip je v tom, že tento čas není ani příliš vzdálený. Věc se nemá tak, že by přesnosti na jednu miliardtinu odpovídal čas miliónů roků. Čas se fakticky mění jen logaritmicky ve srovnání s chybou a ukazuje se, že už za velmi krátký čas ztrácíme celou informaci. Je-li přesnost dána na jednu miliardtinu z miliardtiny (můžeme vzít miliardtin kolik chceme, jen když se někde zastavíme), zjistíme, že čas, po němž už nemůžeme předpovědět, co se stane, je kratší, než byl čas, za který jsme si stanovili původní přesnost! Není proto čestné říkat, že na základě zdánlivé svobody a indeterminizmu lidské mysli jsme si měli uvědomit, že klasická „deterministická“ fyzika si nikdy nemohla dělat naději, že to pochopí a vítat kvantovou mechaniku jako osvobození od „úplně mechanistického“ vesmíru, neboť z praktického hlediska už existoval indeterminizmus v klasické mechanice.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 38.1 ■ V kapitole 32 jsme ukázali, že vybuzený atom vyzařuje svou energii po určitých porcích. To má za následek omezení doby života vybuzeného stavu a vzniku konečné šířky příslušné spektrální čáry.  
Ukažte, že tyto jevy, popíšeme-li je jako neurčitosti energie a doby vyzařování fotonu, jsou v souladu s relacemi neurčitosti.
- 38.2 ■ Odhadněte Bohrovův poloměr atomu vodíku pomocí rozměrové analýzy. Na základě relace neurčitosti ukažte, že energie potřebná k odtržení elektronu od protonu v atomu vodíku je řádově několik elektronvoltů.
- 38.3 ■ V ultrafialové oblasti spektra vybuzeného vodíku se nachází série spektrálních čar nazývaná Lymanova série. Tři čáry této série mají vlnové délky 121,6 nm, 102,6 nm, 97,3 nm. Vypočítejte vlnové délky odpovídající třem dalším možným čarám ve spektru vybuzeného vodíku, jež mohou být předpovězeny pouze na základě těchto údajů a Ritzova kombinačního principu. Dvě z nich leží v oblasti viditelného světla (Balmerova série) a jedna v infračervené oblasti (první čára Paschenovy série).

# Kinetická teorie plynů

---

## 39.1 VLASTNOSTI LÁTEK

## 39.2 TLAK PLYNU

## 39.3 STLAČITELNOST ZÁŘENÍ

## 39.4 TEPLOTA A KINETICKÁ ENERGIE

## 39.5 ZÁKON IDEÁLNÍHO PLYNU

### 39.1 VLASTNOSTI LÁTEK

Touto kapitolou začneme nový předmět, jemuž se budeme poměrně dlouho věnovat. Na začátku našich úvah o vlastnostech látek z fyzikálního hlediska si uvědomíme, že látky se skládají z velkého množství atomů nebo částic, které na sebe působí elektrickými silami a chovají se podle zákonů mechaniky a budeme se snažit pochopit proč se různá seskupení atomů chovají právě určitým způsobem.

Je to bezpochyby těžká úloha a snad bude dobré, když si hned na začátku řekneme, že je to *mimořádně* těžký předmět a budeme k němu muset přistupovat jinak, než jsme přistupovali k problémům, které jsme řešili do této doby. V případě mechaniky a nauky o světle jsme mohli vycházet z přesné formulace některých zákonů jako například Newtonových zákonů nebo vztahu pro pole vytvářené urychlovaným nábojem. Pomocí nich jsme mohli vysvětlit mnoho jevů a staly se pro nás základem pro chápání mechaniky a optiky. S jejich využitím můžeme ve studiu pokračovat, ale už se nenaučíme novou fyziku, jenom se seznámíme s dokonalejšími matematickými metodami řešení jednotlivých problémů.

Takový postup však není vhodný ke studiu vlastností látek. O vlastnostech látek můžeme uvažovat jen velmi elementárním způsobem. Kdybychom naši analýzu začali základními zákony, kterými jsou vlastně zákony mechaniky a elektřiny, byla by příliš složitá. Od těchto zákonů je totiž příliš daleko k vlastnostem, které nás zajímají. Je třeba udělat mnoho kroků, než se od Newtonových zákonů dostaneme k vlastnostem látek a samotné tyto kroky jsou dost složité. My sice nastoupíme tuto cestu a uděláme některé z těchto kroků, ale i když některé z našich analýz budou dost přesné, bude tato přesnost postupně ubývat. Získáme tak jen velmi hrubou představu o vlastnostech látek.

Jednou z příčin, proč budeme v naší analýze tak nedokonalí, je skutečnost, že vyžaduje hluboké vědomosti z teorie pravděpodobnosti. Nebudeme se zajímat o to, jak se každý atom pohybuje, ale spíše o to, jaký je střední počet atomů pohybujících se v tom či onom směru a jaké jsou pravděpodobnosti různých jevů. Tento předmět si tedy vyžaduje poznání teorie pravděpodobnosti, ale naše vědomosti z matematiky nám zatím nestačí a my nechceme své síly přepínat.

Druhou příčinou – z fyzikálního hlediska důležitější – je skutečnost, že atomy se nechovají podle klasické mechaniky, ale podle kvantové, takže tento problém správně pochopíme až tehdy, když budeme znát kvantovou mechaniku. Na rozdíl od kulečnickových koulí a automobilů je nyní rozdíl mezi zákony klasické a kvantové mechaniky velmi důležitý a výrazný, a proto mnohé z věcí, jež odvodíme pomocí klasické fyziky, budou principiálně nesprávné. Některé věci nám proto zůstanou částečně nepochopené, ale na každou nepřesnost vás upozorním, takže budete vědět, kde jsou hranice našeho výkladu. Jedna z příčin, proč jsme v předcházejících kapitolách mluvili o kvantové mechanice, spočívá v tom, že musíme vědět, proč je klasická mechanika v některých směrech nesprávná.

Proč se tímto předmětem nyní vůbec zabýváme? Proč půl roku nebo rok nepočkáme, než budeme lépe znát teorii pravděpodobnosti a něco z kvantové mechaniky a tak se jednodušeji dostaneme k vlastnostem látek? Proto, že je to těžký předmět a nejlepší způsob, jak se ho naučit, je učit se pomalu! Nejprve musíme získat jakousi představu o tom, co by se mělo stát za různých okolností a později, když budeme lépe znát základní zákony, zformulujeme vše přesněji.

Kdo by chtěl analyzovat vlastnosti látek v nějakém konkrétním případě, začal by možná tak, že by zapsal základní rovnice a pak by se je pokusil matematicky řešit. Existují lidé, kteří se pokoušejí postupovat takovým způsobem, ale nejsou úspěšní. Úspěchu dosáhnou ti, kteří začnou problém řešit z fyzikálního hlediska, kteří mají hrubou představu o tom, kam směřovat, a pak používají správné aproximace, vědí, co je v dané složité situaci malé a co je velké. Tyto problémy jsou tak složité, že stojí za to dopracovat se i k jejich elementárnímu chápání, i když je nepřesné a neúplné. K takovým problémům se znovu a znovu vracíme a vždy je poznáváme přesněji a přesněji, a tak budeme postupovat i v tomto kurzu fyziky.

Další příčina, proč se touto problematikou budeme zabývat už nyní, spočívá v tom, že s mnoha takovými myšlenkami jste se už setkali například v chemii a o některých jste slyšeli už i na střední škole. Bude zajímavé poznat fyzikální podstatu těchto věcí.

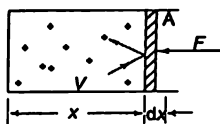
Jako zajímavý příklad vzpomeňme, že stejné objemy plynů obsahují při stejném tlaku a teplotě stejný počet molekul. Zákon násobných poměrů, který říká, že dva plyny, které se slučují v chemické reakci, mají objemy v poměru malých celých čísel, pochopil Avogadro jako zákon vyjadřující skutečnost, že stejné objemy mají stejné počty atomů. Proč je ve stejných objemech stejný počet atomů? Vyplývá něco takového z Newtonových zákonů? Otázkám takového charakteru bude věnována tato kapitola. V dalších kapitolách budeme mluvit i o různých jiných jevech zahrnujících tlak, objem, teplotu a teplo.

Zjistíme, že k tomuto předmětu je možné přistupovat nejen z atomistického hlediska, a že existuje mnoho vzájemných vztahů mezi vlastnostmi látek. Například, když nějakou látku stlačíme, ohřeje se; když ji ohřejeme, zvětší svůj objem. Mezi těmito dvěma skutečnostmi existuje vztah, který můžeme odvodit, aniž bychom pochopili vnitřní mechanismus. Odborná disciplína, jež se zabývá takovými vztahy, se nazývá *termodynamika*. Hluboké pochopení termodynamiky však pochází z pochopení vnitřního mechanismu a tím se právě budeme zabývat. Budeme předpokládat, že látky mají atomovou povahu a na základě toho se budeme snažit pochopit jejich různé vlastnosti a zákony termodynamiky.

Začneme tedy zkoumat plyny, a to tak, že budeme vycházet z Newtonových zákonů mechaniky.

## 39.2 TLAK PLYNU

Víme, že plyn vyvolává tlak a naší úlohou bude vysvětlit příčinu tohoto jevu. Kdyby byl náš sluch několikrát citlivější, slyšeli bychom stálý rušivý šum. V průběhu vývoje však ucho nedosáhlo takové citlivosti, protože by to bylo zbytečné – slyšeli bychom totiž stálý hluk. Příčina spočívá v tom, že ušní bubínek je ve styku se vzduchem a vzduch je ohromné množství neustále se pohybujících molekul, které na ušní bubínek narážejí. Tyto nárazy molekul vytvářejí jakési nepravidelné bubnování, ale my ho neslyšíme, neboť atomy jsou příliš malé a naše ucho není dostatečně citlivé. Výsledkem takového neustálého bombardování by mělo být odtlačení bubínku, ale protože i na jeho opačné straně dochází k takovému bombardování, je výsledná síla nulová. Kdybychom z jedné strany odstranili vzduch nebo kdybychom změnili relativní množství vzduchu na stranách bubínku, došlo by k posunutí bubínku na jednu nebo na druhou stranu, protože bombardování z jedné strany by bylo větší než bombardování z druhé strany. Tento nepříjemný jev pocítujeme tehdy, když stoupáme příliš rychle výtahem nebo letadlem a hlavně, když máme silnou rýmu (při rýmě dojde k ucpání trubice, která spojuje vzduch uvnitř bubínku s dutinou ústní s vnějším vzduchem a jejich tlaky se nemohou vyrovnat).



Obr. 39.1 Atomy plynu v nádobě s pístem, jež se pohybuje bez tření

Abychom mohli kvantitativně analyzovat tuto situaci, představme si, že se plyn nachází v nádobě a na jedné straně nádoby je pohyblivý píst (obr. 39.1). Zajímá nás, jaká síla působí na píst v důsledku toho, že v nádobě jsou atomy. Atomy se pohybují v nádobě s objemem  $V$  všemi možnými rychlostmi a narážejí na píst. Předpokládejme, že na druhé straně pístu není nic, jen vakuum. Co se bude dít? Kdyby byl píst ponechán sám sobě a nikdo by ho nepřidržel, po nárazu atomu by vždy získal nepatrnou hybnost a postupně by se vysouval ven z nádoby. Kdybychom chtěli zabránit jeho vysouvání, museli bychom ho přidržovat silou  $F$ . Zajímá nás, jak velká je tato síla. Jeden ze způsobů, jak vyjádřit sílu, je udat její velikost připadající na jednotkovou plochu. Je-li  $A$  plocha pístu, pak sílu působící na píst můžeme zapsat jako součin nějakého čísla a plochy. Tímto způsobem definujeme tlak jako sílu působící na píst dělenou plochou pístu

$$p = \frac{F}{A}. \quad (39.1)$$

Abychom lépe pochopili tuto myšlenku (později ji použijeme i k jinému účelu), stanovme infinitezimální práci  $dW$  konanou při stlačení plynu pístem, který se posunul o infinitezimální vzdálenost  $-dx$ . Tato práce bude rovna součinu síly a posunutí, takže podle vztahu (39.1) součinu tlaku, plochy a posunutí. To je záporně vzatý součin tlaku a změny objemu

$$dW = F(-dx) = -pAdx = -pdV \quad (39.2)$$

(Součin plochy  $A$  a vzdálenosti  $dx$  je změna objemu.) Záporné znaménko označuje skutečnost, že při stlačování se objem *zmenšuje*, taková volba znaménka vede k tomu, že ke stlačení plynu je třeba *vykonat práci*.

Jakou silou musíme tlačít na píst, abychom vykompenzovali nárazy molekul? Píst získává při každé srážce hybnost. Každou sekundu dostává píst určitou hybnost a začíná se pohybovat. Abychom tomuto pohybu zabránili, musí naše síla odevzdat pístu za sekundu stejně velkou hybnost opačného směru. Síla *představuje* hybnost odevzdanou pístu za sekundu. Můžeme to říci i jinak: Když pístu nebudeme bránit v pohybu, získá v důsledku nárazu molekul rychlost; každá další srážka představuje malý přírůstek rychlosti, takže píst se bude pohybovat se zrychlením. Zrychlení pístu je úměrné síle, jež na něj působí. Síla, o níž jsme řekli, že je součinem tlaku a plochy, je tedy rovna hybnosti odevzdané za sekundu pístu narážejícími molekulami. Vypočítat hybnost za sekundu je snadné – můžeme to udělat ve dvou krocích: Nejprve najdeme hybnost, kterou pístu odevzdá při srážce jeden atom a pak tuto hybnost musíme násobit počtem srážek atomu s pístem za sekundu. Síla bude právě součin těchto dvou faktorů. Všimneme si těchto dvou faktorů blíže. Především předpokládáme, že píst je dokonalým „odrážečem“ atomů. Kdyby nebyl, celá teorie by byla chybná, neboť píst by se začal ohřívát a situace by se změnila. Kdyby se však nakonec dosáhlo rovnováhy, výsledek by byl takový, že srážky by byly efektivně pružné. V průměru by si každá dopadající částice zachovala svou energii. Můžeme si proto představit, že plyn je v ustáleném stavu a pístu neodevzdáme žádnou energii, protože píst je v klidu. Když za těchto podmínek dopadá částice s určitou rychlostí, odráží se stejnou rychlostí a ovšem se stejnou hmotností.

Je-li  $v$  rychlost atomu a  $v_x$  velikost  $x$ -ové složky  $v$ , bude  $mv_x$  velikost složky hybnosti ve směru  $x$ . Protože tato složka při odrazu od pístu změní směr na opačný a zachová si svou velikost, bude celková hybnost dodaná pístu částicí při jedné srážce rovna  $2mv_x$ .

Nyní potřebujeme zjistit počet srážek atomů s pístem za sekundu nebo za určitý časový interval  $dt$  a pak ho dělit intervalem  $dt$ . Kolik atomů naráží na píst? Předpokládejme, že v objemu  $V$  se nachází  $N$  atomů, tedy  $n = N/V$  v každém jednotkovém objemu. Abychom určili, kolik atomů narazí na píst, musíme si uvědomit, že za dobu  $t$  nedosáhnou pístu všechny částice, které se proti němu pohybují určitou rychlostí, ale jen ty, které jsou dost blízko. Jsou-li příliš daleko, projdou za dobu  $t$  jen část cesty k pístu, ale nedosáhnou ho. Je jasné, že za dobu  $t$  narazí na píst jen ty částice, které od něho nebudou ve větší vzdálenosti než  $v_x t$ . Proto je počet srážek za čas  $t$  roven počtu atomů nacházejících se ve vzdálenosti ne větší než  $v_x t$  a je-li plocha pístu  $A$ , budou atomy, jež narazí na píst, zaujímat *objem*  $v_x t A$ . Počet atomů, jež narazí na píst, získáme násobením tohoto objemu počtem atomů nacházejících se v jednotkovém objemu tedy  $nv_x t A$ . My však nechceme počet atomů, které narazí za dobu  $t$ , zajímá nás počet atomů, které narazí za sekundu a ten získáme vydělením tohoto výrazu časem  $t$ , dostaneme tedy  $nv_x A$ . (Dobu  $t$  můžeme zvolit velmi malou, pro eleganci ji můžeme označit  $dt$  a pak derivovat. Ale to je vlastně totéž, co jsme dělali.)

Pro sílu tak dostáváme vztah

$$F = nv_x A \cdot 2mv_x. \quad (39.3)$$

Všimněte si, že síla je úměrná ploše, je-li při změně plochy hustota částic stálá. Pro tlak potom platí vztah

$$p = 2nmv_x^2. \quad (39.4)$$

Nyní si všimneme některých těžkostí, jež vznikají při takové analýze. Především ne každý atom má stejnou rychlost a ne každý se pohybuje tímž směrem. Veličiny  $v_x^2$  jsou tedy pro každý atom



různé! Každý atom přispívá jinak, a proto musíme vzít *střední hodnotu* z  $v_x^2$ . Musíme vzít druhou mocninu z  $v_x$  a zprůměrovat ji přes všechny atomy:

$$p = n m \langle v_x^2 \rangle. \quad (39.5)$$

Nezapomněli jsme na koeficient 2? Ne, neboť ze všech atomů směřuje k pístu jen polovina. Ta druhá polovina se pohybuje na opačnou stranu, a když bereme  $\langle v_x^2 \rangle$ , průměrujeme druhé mocniny *záporných i kladných*  $v_x$ . Vezmeme-li tedy prostě  $\langle v_x^2 \rangle$  a nerozlišujeme kladné a záporné  $v_x$ , dostaneme dvakrát tolik, než kolik potřebujeme. Střední hodnota z  $v_x^2$  je pro kladná  $v_x$  rovna polovině střední hodnoty z  $v_x^2$  pro všechna  $v_x$ .

„Směr osy  $x$ “ není nijak zvlášť charakteristický a atomy narážejí stejně i v ostatních směrech. Atomy se stejně dobře pohybují nahoru i dolů, dopředu i dozadu, dovnitř i ven. Proto  $\langle v_x^2 \rangle$  bude rovna odpovídajícím středním hodnotám v ostatních dvou směrech, tedy

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (39.6)$$

Použitím jednoduchého matematického triku bychom zjistili, že tyto střední hodnoty jsou rovny třetině jejich součtu, což je samozřejmě střední hodnota druhé mocniny z rychlosti

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3. \quad (39.7)$$

Výhodou takového zápisu je, že se nemusíme starat o nějaký speciální směr a naše formule pro tlak získá tvar

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle. \quad (39.8)$$

Poslední činitel zapisujeme ve tvaru  $\langle m v^2 / 2 \rangle$  proto, že taková je kinetická energie pohybu těžiště molekuly. Tak jsme vlastně dospěli k vztahu

$$pV = N \frac{2}{3} \left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle. \quad (39.9)$$

Budeme-li znát rychlosti molekul, můžeme pomocí této rovnice vypočítat tlak.

Jako jednoduchý příklad uveďme takové plyny jako je helium, argon, rtuťové páry nebo draslíkové páry při dost vysoké teplotě, které jsou jednoatomovými plyny a můžeme o nich předpokládat, že nemají vnitřní stupně volnosti. Kdybychom měli složitou molekulu, mohl by v ní existovat vnitřní pohyb, různé kmity apod. Předpokládejme, že to vše můžeme ignorovat – ve skutečnosti je to vážný problém a budeme se k němu muset vrátit, ale v našem případě je takové zanedbání možné. Budeme tedy předpokládat, že není třeba uvažovat vnitřní pohyb atomů, a proto pro náš účel kinetická energie pohybu molekuly jako celku představuje úplnou energii. V případě jednoatomového plynu je kinetická energie celkovou energií. Obecně budeme celkovou energii označovat symbolem  $U$  (někdy se nazývá i celkovou *vnitřní* energií – kdoví proč, vždyť plyn nemá vnější energii), tj. půjde o celkovou energii všech molekul plynu nebo jakéhokoliv jiného objektu.

V případě jednoatomového plynu budeme předpokládat, že celková energie  $U$  je rovna součinu počtu atomů a střední kinetické energii každého z nich, neboť neuvažujeme možnost excitace nebo vnitřního pohybu atomů. Za těchto okolností můžeme psát

$$pV = \frac{2}{3} U. \quad (39.10)$$

Mimochodem, zde se můžeme na chvíli zastavit a zodpovědět následující otázku: Předpokládejme, že máme určité množství plynu a ten pomalu stlačujeme; jaký tlak potřebujeme ke stlačení tohoto plynu na určitý objem? Je to možno snadno určit, neboť tlak představuje  $2/3$  z energie dělené objemem. Při stlačování plynu konáme práci a zvětšujeme energii  $U$ . Dostaneme proto jakousi diferenciální rovnici: Začneme-li za určitých podmínek, s určitou energií a určitým objemem, známe tlak. Začneme-li plyn stlačovat, energie  $U$  poroste a objem  $V$  se bude zmenšovat a nás zajímá, jak vzrostl tlak.

K tomu musíme vyřešit diferenciální rovnici a ihned to provedeme. Je však třeba zdůraznit, že předpokládáme, že při stlačování plynu jde všechna práce na zvětšení energie atomů plynu. Můžete se zeptat: „Je vůbec nutné o tom mluvit? Vždyť kam jinam by mohla práce přejít?“ Ukazuje se však, že práce by mohla přejít i jinam. Existuje tzv. únik tepla stěnami. Horké (tj. rychle se pohybující) atomy narážejí na stěny a ohřívají je a tak uniká energie. Zatím budeme předpokládat, že k takovým procesům nedochází.

Náš postup trochu zobecníme, i když stále půjde jen o velmi speciální případ, a místo  $pV = 2/3 U$  budeme psát

$$pV = (\gamma - 1)U. \quad (39.11)$$

Koeficientem  $(\gamma - 1)$  násobíme  $U$  proto, protože v budoucnosti budeme pracovat s případy, kdy před  $U$  nebudou  $2/3$ , ale nějaké jiné číslo. Označení  $(\gamma - 1)$  zvolíme proto, protože už téměř sto let používají takové označení fyzici. V našem případě, pro jednoatomový plyn, jako například hélium, je  $\gamma$  rovno  $5/3$ , protože tehdy platí  $\gamma - 1 = 2/3$ .

Už jsme si všimli, že při stlačení plynu se koná práce  $-pdV$ . Stlačení, při němž se nedodává a neodvádí tepelná energie, se nazývá *adiabatické* stlačení. Slovo *adiabatický* pochází z řečtiny: a (ne) + dia (přes) + bainein (jít). (To slovo se používá ve fyzice v různých významech a někdy je dost těžké říct, co mají společné.) Při adiabatickém stlačení přechází všechna vynaložená práce na změnu vnitřní energie. Podstata tedy spočívá v tom, že nedochází k jiným ztrátám energie, a proto máme  $pdV = -dU$ . Platí-li však  $U = pV/(\gamma - 1)$ , můžeme psát

$$dU = (pdV + Vdp)/(\gamma - 1). \quad (39.12)$$

Máme tedy  $pdV = -(pdV + Vdp)/(\gamma - 1)$  nebo po přeskupení členů  $\gamma pdV = -Vdp$ , tedy

$$(\gamma dV/V) + (dp/p) = 0. \quad (39.13)$$

Předpokládáme-li, že  $\gamma$  je konstanta, což je v případech jednoatomových plynů našťastí oprávněné, můžeme tuto rovnici integrovat a dostaneme  $\gamma \ln V + \ln p = \ln C$ , kde  $C$  je integrační konstanta. Přejdeme-li k exponenciálám, dostaneme zákon

$$pV^\gamma = C \text{ (konstanta)}. \quad (39.14)$$

Tento zákon říká, že v adiabatických podmínkách, když se teplo neodvádí a teplota při stlačení roste, je součin tlaku a  $5/3$  mocniny objemu pro jednoatomový plyn konstantní. Ačkoli jsme tento zákon odvodili teoreticky, experimenty potvrzují, že jednoatomové plyny se opravdu tak chovají.

### 19.3 STLAČITELNOST ZÁŘENÍ

Uvedeme ještě příklad z kinetické teorie plynů, který se v chemii často nepoužívá, ale setkáme se s ním v astronomii. Mějme v nádobě ohřáté na velmi vysokou teplotu velký počet fotonů. (Může to být plyn nějaké velmi horké hvězdy. Slunce nemá z tohoto hlediska dost vysokou teplotu; e v něm příliš mnoho atomů. Hvězdy mají také mnoho atomů, ale kdyby šlo o velmi horkou hvězdu, bylo by možné atomy zanedbat a předpokládat, že máme pouze fotony.) Foton má určitou hybnost  $p$ . (V kinetické teorii máme vždy problém s označováním:  $p$  je tlak, ale  $p$  je hybnost;  $V$  je objem, ale  $v$  je rychlost;  $T$  je teplota, ale je to i kinetická energie nebo čas nebo moment síly a na to je třeba dávat pozor!) Nyní představuje symbol  $p$  vektorovou veličinu – hybnost. Analýzu provedeme stejně jako předtím. Za nárazy fotonů bude zodpovědná  $x$ -ová složka vektoru  $p$  a dvojnásobek vektoru  $p$  představuje hybnost odevzdanou při srážce. Místo  $2mv_x$  máme tedy  $2p_x$  a při výpočtu počtu srážek je třeba dosadit tak jako předtím  $v_x$ . Takovým způsobem nakonec dostaneme jiné vyjádření vztahu (39.4) pro tlak

$$p = 2 n p_x v_x. \quad (39.15)$$

Pro zprůměrování dostaneme  $n$ -násobek střední hodnoty  $p_x v_x$  (o koeficientu 2 jsme již mluvili) a uvažujeme-li i další dva směry, dostaneme

$$pV = N \langle p \cdot v \rangle / 3. \quad (39.16)$$

Pro souhlas se vztahem (39.9), neboť hybnost je rovna  $mv$ , je to jen trochu obecnější vztah. Součin tlaku a objemu je roven celkovému počtu atomů násobenému střední hodnotou z  $1/3 \langle p \cdot v \rangle$ .

Čemu je rovno  $1/3 \langle p \cdot v \rangle$  v případě fotonů? Hybnost a rychlost mají stejný směr a rychlost je rovna rychlosti světla, takže jde o hybnost fotonu násobenou rychlostí světla. Součin hybnosti a rychlosti světla představuje u každého fotonu jeho energii:  $E = pc$  takže tyto výrazy jsou energie jednotlivých fotonů a my musíme vzít střední hodnotu energie násobenou počtem fotonů. Dostaneme tak  $1/3$  vnitřní energie plynu

$$pV = U/3 \text{ (fotonového plynu)}. \quad (39.17)$$

Stejně-li před  $U$  faktor  $1/3$ , bude v případě fotonů  $(\gamma - 1)$  ze vztahu (39.11) rovno  $1/3$ , takže  $\gamma = 4/3$ , a proto musí záření v nádobě vyhovovat vztahu

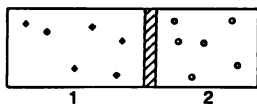
$$pV^{4/3} = C. \quad (39.18)$$

Tak jsme se dozvěděli, jaká je stlačitelnost záření! Tento vztah se používá, když se zajímáme o to, jak ve hvězdě přispívá záření k tlaku. Nyní vidíme, jak se tento příspěvek počítá a jak se mění při stlačení hvězdy. Jaké úžasné věci už dokážeme!

### 39.4 TEPLOTA A KINETICKÁ ENERGIE

Zatím jsme nepřišli do styku s *teplotou*; zcela úmyslně jsme se tomuto pojmu vyhýbali. Víme, že při stlačení plynu energie molekul vzroste a říkáme, že plyn se přitom ohřívá. Bude třeba vysvětlit, jak to souvisí s teplotou. Zajímá nás, co je třeba dělat, aby proces neprobíhal adiabaticky, ale aby se uskutečnil při *konstantní teplotě*. Kdybychom k sobě přiložili dvě nádoby s plynem a ponechali je tak dostatečně dlouho, měly by obě nakonec stejnou teplotu, i když původně to, co nazýváme teplotou, bylo v nádobách různé. Co to znamená? To, že se dostaly do situace, v níž by se octly, kdyby byly dostatečně dlouho ponechány samy sobě! Pod rovností teplot rozumíme právě to, že se dosáhl konečného stavu, kdy jsou už objekty dost dlouho ve vzájemné interakci.

Všimněme si, co se stane, když máme dva plyny v nádobě rozdělené pohyblivým pístem (situaci znázorňuje *obr. 39.2* a pro jednoduchost předpokládáme, že jde o jednoatomové plyny, například helium a neon). V části (1) mají atomy hmotnost  $m_1$ , rychlost  $v_1$  a v objemové jednotce je jich  $n_1$  a v druhé části mají atomy hmotnost  $m_2$ , rychlost  $v_2$  a v objemové jednotce je jich  $n_2$ . Jaké jsou podmínky rovnováhy?



Obr. 39.2 Atomy dvou různých jednoatomových plynů oddělených pohyblivým pístem

Je zřejmé, že nárazy zleva způsobují pohyb pístu doprava a stlačování druhého plynu, dokud nevzroste jeho tlak a nenastane opačný pohyb pístu, a takový kyvadlový pohyb pístu neustane do té doby, dokud se nevyrovnají tlaky na obou stranách. Tak lze zařídit rovnost tlaků; znamená to, že vnitřní energie na jednotkový objem jsou si rovny nebo že součin čísla  $n$  a střední kinetické energie je na obou stranách stejný. My však chceme nakonec ukázat, že i samotné počty  $n_1$  a  $n_2$  jsou stejné. Zatím však víme jen to, že součiny takových čísel a kinetických energií jsou stejné:

$$n_1 \left\langle \frac{m_1 v_1^2}{2} \right\rangle = n_2 \left\langle \frac{m_2 v_2^2}{2} \right\rangle.$$

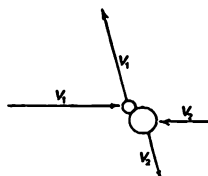
To vyplývá ze vztahu (39.8), neboť tlaky jsou stejné. Musíme si uvědomit, že to z dlouhodobého hlediska není jediná podmínka, ale že musí probíhat i nějaký další, pomalejší proces, než se ustaví úplná rovnováha se stejnými teplotami.

Abychom lépe pochopili oč jde, předpokládejme, že tlak na levé straně je vyvolán velkou hustotou, ale malými rychlostmi atomů. Při velkém  $n$  a malém  $v$  můžeme dosáhnout stejného tlaku jako při malém  $n$  a velkém  $v$ . Atomy se mohou pohybovat pomalu a být víc nahuštěny nebo jich může být méně, ale mohou narážet na píst prudčeji. Zůstane to tak trvale? Na první pohled by se zdálo, že ano, ale když se vážně zamyslíme, zjistíme, že jsme zanedbali jednu velmi důležitou věc. Neuvědomili jsme si, že přehrazovací píst není vystaven trvalému tlaku, ale chvěje se tak jako ušní bubínek, o němž jsme již mluvili. K tomuto chvění dochází proto, že nárazy nejsou zcela pravidelné. Nemáme co dělat s konstantním tlakem, ale s jakýmsi vytrvalým bubnováním – tlak se neustále mění a proto píst poskakuje. Předpokládejme, že atomy na pravé straně narážejí na píst dosti pravidelně, ale atomy na levé straně, i když je jich méně a jejich nárazy jsou

řidčí, mají velkou energii. Proto dostane píst čas od času silný impuls zleva, pohne se proti pomalým atomům na pravé straně a zrychlí je. (Při srážce s pístem každý atom získá nebo ztratí energii podle toho, na kterou stranu se pohybuje píst při srážce s atomem.) V důsledku srážek tedy píst poskakuje a poskakuje a rozechvívá i ostatní plyn – tak odevzdává energii jiným atomům a jejich pohyb se zrychluje, dokud nenastane rovnováha. K určité rovnováze dojde tehdy, když se píst bude pohybovat takovou střední kvadratickou rychlostí, že bude stejně rychle odebrat energii atomům, jako jim odevzdává. Píst tedy získává jakousi nepravidelnost rychlosti a my ji musíme určit. Když se nám to podaří, budeme blíže k vyřešení problému, protože plyny budou měnit rychlosti svých atomů do té doby, dokud nenastane taková situace, že každý plyn bude prostřednictvím pístu získávat tolik energie, kolik ztrácí.

Je velmi obtížné určit pohyb uvažovaného pístu ve všech jeho detailech. I když se tyto věci velmi snadno chápou, dost těžko se analyzují. Dřív, než se do takové analýzy pustíme, všimněme si jiného problému. Uvažujme nádobu s plynem, který je tvořen dvěma druhy molekul s hmotnostmi  $m_1$  a  $m_2$ , rychlostmi  $v_1$  a  $v_2$  atd. Proti předcházejícímu případu máme nyní mnohem těsnější kontakt dvou částí. Kdyby molekuly druhého druhu byly v klidu, netrvalo by to dlouho, protože by do nich narážely molekuly prvního druhu a udělily by jim rychlost. I kdyby se molekuly druhého druhu pohybovaly mnohem rychleji než molekuly prvního druhu, nebyl by tento stav trvalý a nakonec by tyto molekuly odevzdaly molekulám prvního druhu část své energie. Naší úlohou je najít pravidlo, které by určovalo relativní rychlosti molekul kových dvou plynů nacházejících se v jedné nádobě.

I tato úloha je velmi obtížná, ale vyřešíme ji následujícím způsobem. Nejprve se budeme zabývat jedním částečným problémem (opět jde o případ, kdy dostaneme snadno zapamatovatelný výsledek, ale odvození si vyžaduje hodně důvtipu.) Předpokládejme, že se srazí dvě molekuly, které mají různé hmotnosti a že tuto srážku pozorujeme z těžiště těchto dvou molekul, abychom se vyhnuli komplikacím. Ze zákonů pružných srážek při zachování celkové hybnosti a energie už víme, že se molekuly mohou po srážkách pohybovat pouze tak, že každá si zachová velikost své původní rychlosti a změní se jen směr jejich pohybu. Takovou typickou srážku znázorňuje *obrázek 39.3*. Na chvíli předpokládejme, že pozorujeme všechny srážky v podmínkách, kdy těžiště je v klidu. Dále si představme, že se všechny molekuly pohybují zpočátku horizontálně. Po první srážce se samozřejmě některé z molekul odchýlí o určitý úhel. Jinými slovy, i když se původně všechny pohybovaly horizontálně, budou se později aspoň některé pohybovat vertikálně. Po dalších srážkách se opět změní směr jejich pohybu a budou se pohybovat pod jiným úhlem. I kdyby zpočátku byly dokonale organizovány, rozletí se do různých směrů a tak to půjde dále. Ptáme se k čemu to nakonec povede. Odpověď je taková: *Každá dvojice atomů se bude se stejnou pravděpodobností pohybovat v každém směru prostoru*. Pak už další srážky nemohou změnit rozdělení molekul.



Obr. 39.3 Srážka dvou různých molekul v těžišťové vztažné soustavě

Co máme rozumět tím, že v každém směru se budou molekuly pohybovat se stejnou pravděpodobností? Nemůžeme samozřejmě mluvit o pravděpodobnosti pohybu v určitém směru, neboť

směr je něco velmi úzkého a my musíme vztahovat pravděpodobnost k jednotce „něčeho“. Naši myšlenku však můžeme vyjádřit tak, že danou částí kulové plochy, která má střed v bodě srážky, prochází stejné množství molekul jako kteroukoliv jinou stejně velkou částí této plochy. Výsledek srážek je pak takové rozdělení molekul podle směrů, při kterém stejným částem kulové plochy odpovídá stejná pravděpodobnost.

Mimochodem, kdybychom porovnávali původní směr se směrem odkloněným o úhel  $\vartheta$ , přišli bychom na zajímavou vlastnost: elementární ploška na kouli s jednotkovým poloměrem je rovna  $2\pi$ -násobku výrazu  $\sin \vartheta d\vartheta$ , ale to je stejný výraz jako diferenciál  $\cos \vartheta$ . To znamená, že kosinus úhlu  $\vartheta$  mezi dvěma směry se stejnou pravděpodobností nabývá libovolné hodnoty z intervalu od  $-1$  do  $+1$ .

Nyní musíme věnovat pozornost té skutečnosti, že srážky neprobíhají v těžištové soustavě, ale atomy mají před srážkou rychlosti  $v_1$  a  $v_2$ . Srážku s takovými rychlostmi můžeme pak analyzovat následujícím způsobem. Těžiště soustavy dvou atomů se pohybuje „střední“ rychlostí s váhami úměrnými hmotnostem, takže pro rychlost těžiště  $v_T$  platí:  $v_T = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$ . Pozorujeme-li srážku v těžištové soustavě, vypadá tak, jako na obr. 39.3, kdy se atomy srážejí určitou relativní rychlostí  $w$ . Tou relativní rychlostí je právě  $v_1 - v_2$ . Situace je pak taková, že soustava spojená s těžištěm se pohybuje a v této soustavě se molekuly přibližují relativní rychlostí  $w$ , srážejí se a pohybují se v nových směrech. Zatímco se to odehrává, těžiště se pohybuje nerušeně dál.

Jaké je rozdělení molekul, jež získáme takovým způsobem? Argumenty, které jsme uvedli, vedou k závěru: *V rovnováze jsou stejně pravděpodobně všechny směry  $w$  vzhledem ke směru pohybu těžiště.*<sup>47)</sup> Mezi směrem relativní rychlosti a směrem pohybu těžiště nebude nakonec žádná korelace. I kdyby byla, srážky by ji narušovaly, takže by vymizela. Proto je střední hodnota kosinu úhlu mezi  $w$  a  $v_T$  rovna nule. Platí tedy

$$\langle w \cdot v_T \rangle = 0. \quad (39.19)$$

Jenže  $w \cdot v_T$  můžeme vyjádřit pomocí  $v_1$  a  $v_2$

$$w \cdot v_T = \frac{(v_1 - v_2) \cdot (m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2) + (m_2 - m_1)(v_1 \cdot v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (39.20)$$

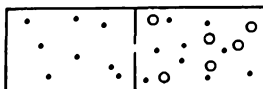
Nejprve si všimněme  $v_1 \cdot v_2$  a zeptejme se, jaká bude střední hodnota  $v_1 \cdot v_2$ . Zajímáme se tedy o to, jaká bude střední složka rychlosti jedné molekuly ve směru pohybu druhé molekuly. Je jasné, že molekula se bude stejně pravděpodobně pohybovat na jednu stranu i na stranu k ní opačnou. *Střední hodnota rychlosti  $v_2$  je v libovolném směru nulová.* Proto je i ve směru  $v_1$  střední hodnota  $v_2$  nulová. Střední hodnota  $v_1 \cdot v_2$  je tedy rovna nule! Tak jsme dospěli k tvrzení, že podle (39.20) musí být střední hodnota  $m_1 v_1^2$  rovna střední hodnotě  $m_2 v_2^2$ . To ale znamená, že *střední kinetické energie obou molekul musí být stejné*

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (39.21)$$

<sup>47)</sup> Taková argumentace, kterou kdysi použil Maxwell, má hlubší pozadí. I když je závěr správný, bezprostředně nevyplývá z úvah o symetrii, o které jsme se předtím oprali. Při přechodu ke vztažené soustavě pohybující se plynem by mohlo dojít k narušení rozdělení rychlostí. Jednoduchý důkaz našeho výsledku se nám nepodařilo najít.

Kdyby se plyn skládal ze dvou druhů atomů, bylo by možné ukázat (předpokládáme, že se nám to podařilo ukázat), že střední hodnota kinetické energie jednoho druhu atomů je stejná jako střední hodnota kinetické energie druhého druhu atomů, pokud se oba druhy atomů nacházejí v jedné nádobě a jsou v rovnováze. To znamená, že těžší atomy se pohybují pomaleji než lehčí. Snadno se o tom můžeme přesvědčit pomocí experimentu s „atomy“ různých hmotností na vzduchové dráze.

Dále se budeme zajímat o dva různé plyny *oddělené* v nádobě a ukážeme, že i takové plyny mají po dosažení rovnováhy stejné střední hodnoty kinetické energie, a to i tehdy, když nejsou v téže části nádoby. Důkaz můžeme provést různými způsoby. Jeden ze způsobů předpokládá pevnou přihrádku mezi plyny, v níž je tak nepatrný otvor (*obr. 39.4*), že jím jeden plyn může procházet, ale druhý ne, protože má příliš velké molekuly. Nastane-li rovnováha, pak se v té části, kde je směs molekul, střední hodnota energie molekul obou druhů vyrovnají. Menší molekuly však procházejí otvorem beze ztráty kinetické energie, takže střední hodnoty kinetické energie v čistém plynu a směsi musí být stejné. Tento důkaz není dost uspokojivý, neboť takový druh otvoru separující jednotlivé druhy molekul nemusí existovat.



Obr. 39.4 Dva plyny v nádobě s polopropustnou membránou

Vraťme se proto k naší úloze s pístem. Můžeme ukázat, že kinetická energie pístu musí být také rovna  $1/2 m_2 v_2^2$ . Ve skutečnosti jde o kinetickou energii čistě horizontálního pohybu pístu, a proto, když odhlédneme od jeho vertikálního pohybu, dostaneme vlastně  $1/2 m_2 v_2^2$ . Budeme-li vycházet z rovnováhy na druhé straně, můžeme stejným způsobem dokázat, že kinetická energie pístu je rovna  $1/2 m_1 v_1^2$ . I když píst není uprostřed plynu, ale na jedné jeho straně, můžeme opět tvrdit, že střední kinetická energie pístu a molekul plynu jsou v důsledku srážek stejné, i když takový důkaz je trochu obtížnější.

Kdyby nás ani takový postup neuspokojil, můžeme si vymyslet příklad, v němž by se zabezpečovala rovnováha zařízením, na které naráží molekuly každého plynu ze všech stran. Předpokládejme, že máme krátkou tyč, která prochází pístem a na každém konci má kouli. Tato tyč se může pohybovat ložiskem v pístu bez tření. Každá z koulí je vlastně jakoby velká molekula a molekuly plynu na ni mohou narážet ze všech stran. Celý takový objekt má určitou hmotnost  $m$  a opět máme molekuly plynu s hmotnostmi  $m_1, m_2$ . Stejnou analýzou srážek jako dřívě bychom zjistili, že kinetická energie objektu s hmotností  $m$  musí být v důsledku nárazů molekul z jedné strany v průměru rovna  $1/2 m_1 v_1^2$ . Podobně v důsledku srážek s molekulami na druhé straně musí být střední kinetická energie rovna  $1/2 m_2 v_2^2$ . Obě strany proto musí mít stejnou kinetickou energii, jsou-li v tepelné rovnováze. Výsledek získaný v případě směsi plynů lze takovým způsobem zobecnit na případ dvou různých, oddělených plynů při stejné teplotě.

*Máme-li tedy dva plyny se stejnou teplotou, budou střední kinetické energie molekul těchto plynů v těžištové soustavě stejné.*

Střední kinetická energie molekul je vlastností pouze „teploty“. Protože závisí na „teplotě“, a ne na samotném plynu, můžeme ji využít k definování teploty. Střední kinetická energie molekuly je tedy určitou funkcí teploty. Jakou stupnici však máme použít k určování teploty? Mohli bychom svévolně definovat teplotní stupnici tak, aby střední energie byla přímo úměrná teplotě. Nejlépe by bylo udělat to tak, že bychom samotnou střední energii nazvali „teplotou“.

## ZÁKON IDEÁLNÍHO PLYNU

To by byla nejjednodušší funkce. Bohužel teplotní stupnice byla zvolena jinak a místo toho, abychom střední energii nazvali přímo teplotou, používáme konstantní koeficient, který dává do souvislosti střední energii molekuly a stupeň absolutní teploty, který nazýváme kelvin. Konstanta úměrnosti je  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  joulu na kelvin.<sup>48)</sup> Při absolutní teplotě  $T$  je střední kinetická energie molekuly rovna  $3/2 kT$ . (Koeficient  $3/2$  jsme zavedli jen z praktických důvodů, abychom se zbavili číselných koeficientů v jiných vztazích.) Je třeba poznamenat, že kinetická energie připadající na jednu složku pohybu v kterémkoliv směru je rovna jen  $1/2 kT$ . Tři nezávislé směry pohybu vedou k hodnotě  $3/2 kT$ .

### 39.5 ZÁKON IDEÁLNÍHO PLYNU

Nyní můžeme aplikovat naši definici teploty v rovnici (39.9) a tak najít zákon závislosti tlaku plynu na teplotě, který zní: Součin tlaku a objemu je roven součinu celkového počtu atomů, univerzální konstanty  $k$  a teploty  $T$

$$pV = NkT. \quad (39.22)$$

Navíc při daných hodnotách teploty, tlaku a objemu je počet atomů přesně určen a také představuje univerzální konstantu! Stejně objemy různých plynů proto mají při stejném tlaku a stejné teplotě stejný počet molekul a to je důsledek Newtonových zákonů. Je to opravdu překvapující důsledek!

V praxi, když máme pracovat s molekulami, musíme používat velmi velká čísla, a proto chemici vybrali jedno velmi velké číslo a dali mu speciální název, a to *mol*. Molem je tedy třeba chápat určité praktické číslo. Zůstává historickou otázkou, proč nevybrali kulaté číslo např.  $10^{24}$ . Za počet objektů, který slouží jako standard, bylo vybráno číslo  $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ , a toto číslo dostalo název mol. Místo měření počtu molekul v jednotkách se měří tento počet v molech.<sup>49)</sup> Pomocí  $N_0$  můžeme vyjádřit počet molů, násobit ho počtem atomů v molu a dále násobit veličinou  $kT$ . Počet atomů v molu násobený veličinou  $k$  je vlastně molární hodnota  $k$  a používá se pro ni speciální označení  $R$ . Molární hodnota  $k$  je rovna  $8,317$  joulu:  $R = N_0 k = 8,317 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Zákon ideálního plynu tedy můžeme zapsat ve tvaru obsahujícím součin počtu molů (označujeme ho také písmenem  $N$ )<sup>50)</sup> a veličiny  $RT$  nebo součin počtu atomů a veličiny  $kT$ :

$$pV = NRT. \quad (39.23)$$

Je to stejný zákon, ale vyjádřený v jiných jednotkách. My používáme jako jednotku číslo 1, ale chemici číslo  $6 \cdot 10^{23}$ .

Ještě se zmíníme o zákonu ideálního plynu v případě, kdy máme co dělat s objekty, jež jsou odlišné od jednoatomových molekul. Do této doby jsme se zabývali pohybem atomů jednoato-

48) Celsiova stupnice je vlastně Kelvinova stupnice, v níž považujeme za nulu 273,15 stupně, takže platí:  $T = 273,15 + \text{Celsiova teplota}$ .

49) To, co chemici nazvali molekulární vahou, je vlastně hmotnost molu molekul v gramech. Mol je definován tak, že hmotnost molu atomů izotopu uhlíku 12 (jeho jádra se skládají ze 6 protonů a 6 neutronů) je rovna přesně 12 gramů.

50) V češtině se tento základní zákon nazývá stavová rovnice ideálního plynu a zapisuje se ve tvaru  $pV = nRT$ , kde počet molů (látkové množství) je označeno písmenem  $n$ . (Pozn. red.)



mového plynu v soustavě spojené s těžištěm. Ptáme se, co se stane, když se přidají i síly. Nejprve si všimneme případu, kdy je píst udržován horizontální pružinou, takže na něj působí síly. Pohyb vyvolávající nárazy mezi atomy a pístem nezávisí v žádném časovém okamžiku na tom, kde se právě píst nachází. Rovnovážné podmínky zůstávají stejné. Rychlost pohybu pístu bude nezávisle na jeho poloze právě taková, aby předával molekulám energii jako dřívě. Nezáleží tedy na pružině. *Rychlost, s níž se musí pohybovat píst, je v průměru stejná. Naše poučka, že střední hodnota kinetické energie v jednom směru je rovna  $1/2 kT$ , zůstává v platnosti bez ohledu na to, zda působí či nepůsobí síly.*

Uvažujme jako příklad dvouatomovou molekulu složenou z atomů o hmotnostech  $m_A$  a  $m_B$ . Dokázali jsme, že pohyb částí A a B v těžiškové soustavě je takový, že  $\langle 1/2 m_A v_A^2 \rangle = \langle 1/2 m_B v_B^2 \rangle = 3/2 kT$ . Jak je to ale možné, když jsou tyto části vzájemně spojeny? I když jsou spojeny, výměna energie při vzájemné rotaci a vibraci, při srážkách s jinými molekulami *závisí pouze na tom, jak rychle se pohybují*. Právě to určuje rychlost výměny energie při srážkách. V daném časovém okamžiku není síla rozhodující. Proto platí stejný princip i tehdy, působí-li síly.

Nakonec bychom měli dokázat, že zákon ideálního plynu je správný i tehdy, zanedbáme-li vnitřní pohyb molekul. Do této doby jsme vlastně s vnitřním pohybem nepočítali, protože jsme zkoumali jednoatomový plyn. Nyní však ukážeme, že rychlost těžiště libovolného objektu, který můžeme považovat za těleso o hmotnosti  $M$ , je taková, že platí

$$\frac{1}{2} M v_T^2 = \frac{3}{2} kT. \quad (39.24)$$

Jinak řečeno, můžeme sledovat buď jednotlivé části nebo těleso jako celek! Podívejme se, proč tomu tak je: Hmotnost dvouatomové molekuly je  $M = m_A + m_B$  a pro rychlost těžiště  $v_T$  platí  $v_T = (m_A v_A + m_B v_B) / M$ . Potřebujeme znát  $\langle v_T^2 \rangle$ . Umocníme-li  $v_T$ , dostaneme

$$v_T^2 = \frac{m_A^2 v_A^2 + 2 m_A m_B v_A \cdot v_B + m_B^2 v_B^2}{M^2}.$$

Násobíme-li tento výraz veličinou  $\frac{1}{2} M$  a najdeme střední hodnotu, dostaneme

$$\frac{1}{2} M v_T^2 = \frac{m_A \frac{3}{2} kT + 2 m_A m_B \langle v_A \cdot v_B \rangle + m_B \frac{3}{2} kT}{M} = \frac{3}{2} kT + \frac{2 m_A m_B \langle v_A \cdot v_B \rangle}{M}.$$

(Využili jsme skutečnost, že  $(m_A + m_B) / M = 1$ .) Čemu je rovna  $\langle v_A \cdot v_B \rangle$ ? (Nejlepší by bylo, kdyby byla rovna 0!) Abychom to zjistili, použijeme náš předpoklad, že relativní rychlost  $w = v_A - v_B$  má v každém směru stejnou pravděpodobnost, takže střední hodnota její složky do kterékoliv směru je rovna nule. Budeme tedy předpokládat, že

$$\langle w \cdot v_T \rangle = 0.$$

Co však představuje  $w \cdot v_T$ ? Je to

$$w \cdot v_T = \frac{(v_A - v_B) \cdot (m_A v_A + m_B v_B)}{M} = \frac{m_A v_A^2 + (m_B - m_A) (v_A \cdot v_B) - m_B v_B^2}{M}.$$

Protože  $\langle m_A v_A^2 \rangle = \langle m_B v_B^2 \rangle$ , vyruší se ve střední hodnotě první a poslední člen a zůstane nám

$$(m_B - m_A) \langle v_A \cdot v_B \rangle = 0.$$

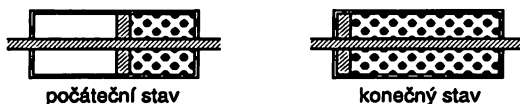
Je-li  $m_B \neq m_A$ , bude  $\langle v_A \cdot v_B \rangle = 0$ , a proto pohyb celé molekuly jako tělesa o hmotnosti  $M$  má kinetickou energii, v průměru rovnou  $3/2 kT$ .

Současně jsme ukázali, že střední kinetická energie *vnitřního* pohybu dvouatomové molekuly, neuvažujeme-li pohyb těžiště, je rovna  $3/2 kT$ . Vždyť celková kinetická energie částí molekuly je  $1/2 m_A v_A^2 + 1/2 m_B v_B^2$  a její střední hodnota je rovna  $3/2 kT + 3/2 kT$ , tedy  $3kT$ . Kinetická energie pohybu těžiště je rovna  $3/2 kT$ , a proto střední kinetická energie rotačního a vibračního pohybu dvou atomů v molekule, kterou dostaneme z rozdílu těchto energií, musí být rovna  $3/2 kT$ .

Věta o střední energii pohybu těžiště má obecný charakter: V případě libovolného objektu, který zkoumáme jako celek v přítomnosti nebo nepřítomnosti sil, je střední kinetická energie každého nezávislého pohybu rovna  $1/2 kT$ . Takové „nezávislé směry pohybu“ nazýváme *stupně volnosti* systému. Počet stupňů volnosti molekuly složené z  $r$  atomů je roven  $3r$ , neboť k určení polohy každého atomu potřebujeme tři souřadnice. Celkovou kinetickou energii molekuly lze vyjádřit buď jako součet kinetických energií jednotlivých atomů nebo jako součet kinetické energie pohybu těžiště a kinetické energie vnitřního pohybu. Vnitřní pohyb je někdy možné vyjádřit jako součet rotační a vibrační energie molekuly, ale takové vyjádření je jen určitou aproximací. Aplikujeme-li naše tvrzení na  $r$ -atomovou molekulu, zjistíme, že molekula má v průměru  $3rkT/2$  joulů kinetické energie, z čeho  $3/2 kT$  joulů připadá na kinetickou energii těžiště celé molekuly a zbytek, tj.  $3/2(r-1)kT$  joulů, připadá na vnitřní vibrační a rotační kinetickou energii.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 39.1 ■ Lze ukázat, že při adiabatickém stlačení ideálního plynu platí vztah  $pV^\gamma = \text{konst}$  (viz rovnici 34.14). Na druhé straně, za všech podmínek platí  $pV/T = \text{konst}$ . Použitím těchto údajů najdete vztahy mezi parametry  $p$  a  $T$  nebo  $V$  a  $T$  pro případ adiabatického stlačení.
- 39.2 ■ Pomocí dvoutaktní hustilky, jež se používá při nahušfování pneumatik u bicyklů lze dosáhnout tlaku 3,5 atmosféry, jestliže výchozí tlak byl normální (1 atmosféra při 20 °C neboli 293 K). Jaká je teplota vzduchu vycházejícího z hustilky ve stupních Celsia, platí-li pro vzduch  $\gamma = 1,40$ ? Zanedbejte tepelné ztráty stěnami hustilky.
- 39.3 ■ Mějme dvě identické, tepelně izolované nádoby. Každá z nádob je napůl přehrazena přepážkou s uzavíratelným otvorem. V jedné polovině každé nádoby je plynné hélium, druhá polovina je odčerpána do úplného vakuua. Uvažte dva pokusy:
- Otvor v přepážce jedné nádoby se otevírá a plyn přechází do druhé poloviny nádoby, dokud se neustaví rovnováha. Pak se přepážka začne pomalu přemísťovat k jednomu kraji nádoby.
  - Přepážku druhé nádoby pomalu přemístíme k okraji té části, v níž je vakuum.
- Porovnejte výsledný stav plynu v těchto dvou nádobách. Tření při přemísťování přepážek zanedbejte.



- 39.4 ■ a) Představte si vysoký svislý válec naplněný plynem nebo kapalinou, jejichž hustota se mění s výškou. Ukažte, že v takovém případě je závislost tlaku na výšce popsána diferenciální rovnicí  $dp/dh = -\rho(h)g$ .
- b) Řešte tuto rovnici pro případ atmosférického vzduchu (jeho molární hmotnost je  $\mu$ ) za předpokladu, že jeho teplota na výšce nezávisí.
- 39.5 ■ Atmosféra se nazývá adiabatickou, platí-li v ní pro tlak a hustotu v závislosti na výšce vztah  $p\rho^{-\gamma} = \text{konst}$ .
- Ukažte, že teplota takové atmosféry klesá s výškou lineárně a najdete koeficient úměrnosti. Takový gradient teploty se nazývá adiabatický. Najděte gradient teploty pro zemskou atmosféru.
  - Na základě energetických úvah dokažte, že atmosféra, jejíž teplotní gradient je menší nebo větší než adiabatický, bude stabilní, resp. nestabilní vůči konvekci.
- 39.6 ■ Válec s hladkou, dokonale nepropustnou přepážkou obsahuje jeden krychlový metr plynu při tlaku jedné atmosféry. Plyn budeme pomalu stlačovat při stálé teplotě až na konečný objem 0,4 m<sup>3</sup>. Jakou práci přitom vykonáme?
- 39.7 ■ Dva plyny, A a B, jež původně zaujímaly též objem  $V_0$  při téměř počátečním tlaku  $P_0$  se začnou náhle adiabaticky stlačovat, každý na polovinu původního objemu. Jaký bude konečný tlak každého plynu ve srovnání s počátečním tlakem, je-li první plyn je jednoatomový ( $\gamma_A = 5/3$ ) a druhý dvouatomový ( $\gamma_B = 7/5$ )?
- 39.8 ■ Najděte poměr prací potřebných ke stlačení plynů v úloze 39.7.

- 39.9 ■ Dvě kulové nádoby o objemech  $200 \text{ cm}^3$  a  $100 \text{ cm}^3$  jsou spojeny krátkou trubicí (viz obrázek), v níž se nachází izolovaná pórovitá přepážka. Ta vyrovnává tlaky v nádobách, ale ne teploty. Soustava má teplotu  $t = 27^\circ\text{C}$  a obsahuje kyslík pod atmosférickým tlakem. Malou kouli umístíme do nádoby s ledem při  $0^\circ\text{C}$  a velkou kouli do nádoby s párou při  $100^\circ\text{C}$ . Jaký se v soustavě ustaví tlak? Zanedbejte teplotní dilataci nádob.



- 39.10 ■ Kontejner o objemu  $50 \text{ l}$  je spojen s jiným kontejnerem o objemu  $15 \text{ l}$  pomocí krátké trubice, v níž je umístěn speciální tlakový ventil. Ten umožňuje plynu pronikat z velkého kontejneru do malého při přetlaku  $116 \text{ kPa}$ . Za teploty  $t = 17^\circ\text{C}$  velký kontejner obsahuje plyn při atmosférickém tlaku a malý kontejner je úplně evakuován. Jaký v něm bude tlak, zahřejeme-li oba kontejnery na teplotu  $162^\circ\text{C}$ ?
- 39.11 ■ Dimer oxidu dusičitého  $\text{N}_2\text{O}_4$  může disociovat na oxid dusičitý podle rovnice  $\text{N}_2\text{O}_4 \rightleftharpoons 2\text{NO}_2$ . Do evakuované nádoby o objemu  $250 \text{ cm}^3$  zavedeme  $0,90 \text{ g}$  tekutého  $\text{N}_2\text{O}_4$ . Když se kapalina vypaří při  $0^\circ\text{C}$ , tlak v nádobce bude roven atmosférickému. Kolik procent  $\text{N}_2\text{O}_4$  se přitom disociovalo?
- 39.12 ■ V izolované nádobě s posuvným víkem je na počátku  $1 \text{ mol}$  ideálního jednoatomového plynu, který zaujímá objem  $V_1$  při tlaku  $p_1$  a teplotě  $T_1 = 27^\circ\text{C}$ . Potom plyn pomalu zahříváme pomocí ohřívače umístěného uvnitř nádoby a vykonáme práci  $8,31 \text{ W} \cdot \text{h}$ . Plyn se přitom bude rozpínat za stálého tlaku  $p_1$  a dosáhne teploty  $T_2$  a zaujme objem  $V_2$ . Vypočítejte práci, kterou plyn při rozpínání vykonal a energetický obsah plynu. Určete také a)  $T_2$ , b)  $V_2/V_1$ .

# P

# Principy statistické mechaniky

---

- 40.1 EXPONENCIÁLNÍ ATMOSFÉRA
- 40.2 BOLTZMANNŮV ZÁKON
- 40.3 VYPAŘOVÁNÍ KAPALINY
- 40.4 ROZDĚLENÍ MOLEKUL PODLE RYCHLOSTI
- 40.5 MĚRNÁ TEPELNÁ KAPACITA PLYNŮ
- 40.6 SELHÁNÍ KLASICKÉ FYZIKY

## 40.1 EXPONENCIÁLNÍ ATMOSFÉRA

Už jsme mluvili o některých vlastnostech velkého počtu srážejících se atomů. Tímto předmětem se zabývá kinetická teorie. Je to vlastně popis vlastností látek z hlediska srážek mezi atomy. Tvrdíme, že vlastnosti látky jako celku lze vysvětlit na základě pohybu jeho jednotlivých částí.

Zatím se omezíme na podmínky tepelné rovnováhy, budeme tedy zkoumat pouze určitou skupinu přírodních jevů. Zákony mechaniky aplikovatelné v podmínkách tepelné rovnováhy nazýváme *statistickou mechanikou* a v této části se seznámíme s některými základními teorémy této vědní disciplíny.

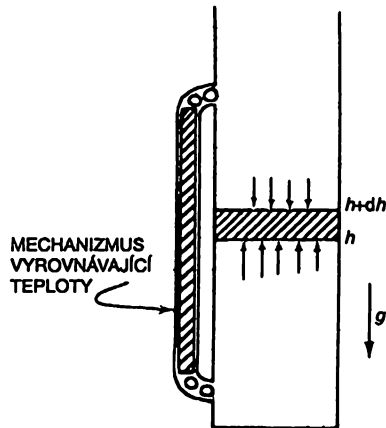
S jedním z poznatků statistické mechaniky jsme se již setkali. Bylo to tvrzení, že na každý nezávislý pohyb, tj. na každý stupeň volnosti, připadá v případě libovolného pohybu při absolutní teplotě  $T$  střední hodnota kinetické energie, která je rovna  $1/2 kT$ . Tak se dozvídáme něco o střední kvadratické rychlosti atomů. Nyní se ještě musíme dozvědět něco víc o polohách atomů, abychom uměli říci, kolik se jich nachází na tom nebo onom místě v podmínkách tepelné rovnováhy a musíme se podrobněji zabývat rozdělením atomů podle rychlostí. Je sice pravda, že známe střední kvadratickou rychlost, ale neumíme odpovědět na otázku, kolik atomů se pohybuje rychlostí, jež je trojnásobkem střední kvadratické rychlosti nebo rychlostí, která je čtvrtinou střední kvadratické rychlosti. Nebo snad mají všechny atomy stejnou rychlost?

Máme tedy dvě otázky, na něž se budeme snažit odpovědět: Jak se seskupí v prostoru molekuly, když na ně působí síly a jaké je jejich rozdělení podle rychlostí?

## EXPONENCIÁLNÍ ATMOSFÉRA

Ukazuje se, že tyto dvě otázky jsou zcela nezávislé a rozdělení podle rychlostí je vždy stejné. Jistý náznak této druhé skutečnosti jsme poznali tehdy, když jsme zjistili, že střední kinetická energie připadající na každý stupeň volnosti je rovna  $1/2 kT$  bez ohledu na to, jaké síly působí na molekuly. Rozdělení podle rychlostí molekul nezávisí na silách, neboť síly neovlivňují frekvenci srážek.

Začneme s příkladem rozdělení molekul v takové atmosféře, jakou je naše, ale za bezvětří a bez jiných poruch. Předpokládejme, že máme sloupec vzduchu plynu sahající do velké výšky a ten se nachází v tepelné rovnováze. Tím se liší od naší atmosféry, protože ta je ve větších výškách chladnější. Poznamenejme, že nerovnovážnost situace při rozdílnosti teplot v různých výškách je možné demonstrovat propojením tyčí, jež by se na horním i dolním konci dotýkala kuliček (obr. 40.1). Spodní kuličky by od molekul plynu získaly energii  $1/2 kT$  a prostřednictvím tyče by rozkmitaly kuličky nahoře a ty zase molekuly plynu v horní části. Takovým způsobem by se nakonec ustálila teplota a byla by v gravitačním poli v každé výšce stejná.



Obr. 40.1 Tlak ve výšce  $h$  musí převyšovat tlak ve výšce  $h + dh$  o tíhu plynu nacházejícího se v takto ohraničené vrstvě

Naším úkolem je zjistit, podle jakého zákona by řídla atmosféra s rostoucí výškou, kdyby teplota ve všech výškách byla stejná. Je-li  $N$  celkový počet molekul plynu v objemu  $V$  při tlaku  $p$ , pak musí platit  $pV = NkT$ , tedy  $p = nkT$ , kde  $n = N/V$  je počet molekul v jednotkovém objemu. Jinak řečeno, známe-li počet molekul v jednotkovém objemu, známe tlak a naopak. Tyto veličiny jsou navzájem úměrné, protože teplota je v tomto případě konstantní. Tlak však konstantní není, ten musí s poklesem výšky vzrůstat, neboť vlastně musí takřka jít držet tíhu všeho plynu nad ním. V tom spočívá klíč k určení závislosti změny tlaku s výškou. Uvažujeme-li jednotkovou plochu ve výšce  $h$ , pak vertikální síla, která na tuto jednotkovou plochu působí zespoda, představuje tlak  $p$ . Kdyby nebyla gravitace, musela by být vertikální síla působící směrem dolů na jednotkovou plochu ve výšce  $h + dh$  stejná. Jenže síla působící zdola musí převýšit sílu působící shora právě o tíhu plynu ve vrstvě mezi  $h$  a  $h + dh$ . Víme, že na každou molekulu působí gravitační síla o velikosti  $mg$ , přičemž  $g$  je gravitační zrychlení. Dále víme, že  $n dh$  je celkový počet molekul v uvažované vrstvě. To nám umožňuje sestavit diferenciální rovnici  $p_{h+dh} - p_h = dp = -mgn dh$ . Protože  $p = nkT$ , přičemž  $T$  je konstanta, můžeme vyloučit  $p$  nebo  $n$ . Vyloučíme-li tlak  $P$ , získáme rovnici

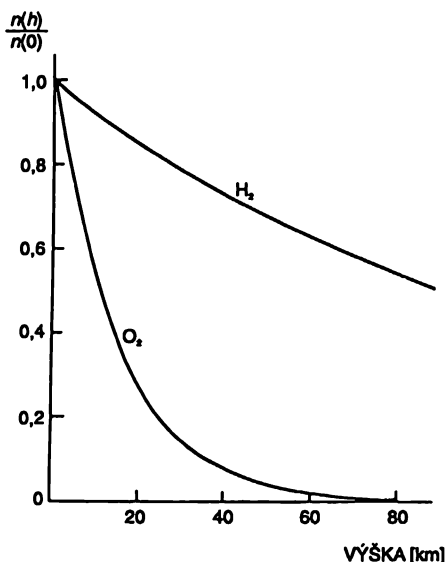
$$\frac{dn}{dh} = -\frac{mg}{kT}n,$$

a tato diferenciální rovnice nám řekne, jak se zmenšuje hustota s rostoucí výškou.

Tak jsme získali rovnici pro hustotu částic  $n$ , která se mění s výškou, a to tak, že derivace této hustoty je úměrná samotné hustotě. Víme však, že funkce s takovou vlastností je exponenciála, takže řešení uvedené diferenciální rovnice má tvar

$$n = n_0 e^{-mgh/kT}. \quad (40.1)$$

Integrační konstanta  $n_0$  je zřejmě hustota ve výšce  $h = 0$  (tu však můžeme zvolit libovolně) a hustota s výškou exponenciálně klesá.



Obr. 40.2 Normovaná hustota jako funkce výšky v gravitačním poli Země – pro kyslík a vodík při konstantní teplotě

Všimněte si, že v případě různých druhů molekul s různými hmotnostmi jsou tyto exponenciály různé. Hustota těžších molekul bude s výškou klesat rychleji než hustota lehčích molekul. Proto by bylo možné očekávat, že kyslík, který je těžší než dusík, bude v atmosféře ubývat s rostoucí výškou rychleji než dusík a relativní podíl dusíku vzhledem ke kyslíku poroste. V průměrných výškách naší atmosféry se to však nestává, neboť různé poruchy a pohyby opět promíchávají tyto plyny. Naše atmosféra není izotermická. Ve velmi velkých výškách však přece jen v atmosféře převládají lehčí plyny, jako je např. vodík, protože molekuly lehkých plynů se mohou vyskytovat i tam, kde ostatní exponenciály klesly k nule (obr. 40.2).

## 40.2 BOLTZMANNŮV ZÁKON

Nyní si všimněme zajímavé skutečnosti, že číselník v exponentu rovnice (40.1) představuje *potenciální energii* atomu. Proto můžeme tento zákon formulovat i takto: Hustota v libovolném bodě je úměrná

$$e^{-(\text{potenciální energie atomu} / kT)}$$

Mohla by to být náhoda, tj. mohlo by to platit jen v našem speciálním případě homogenního gravitačního pole. Můžeme však ukázat, že tento zákon má obecnější platnost. Předpokládejme, že na molekuly plynu působí nějaká jiná síla než gravitace. Molekuly mohou být například elektricky nabitě a může na ně působit elektrické pole nebo jiný náboj, který je přitahuje. I v důsledku vzájemného přitahování atomů nebo přitahování atomů stěnami nádoby, nějakou tuhou látkou nebo čímkoliv jiným může vzniknout přitažlivá síla, která závisí na poloze a která působí na všechny molekuly. Pro jednoduchost předpokládejme, že molekuly jsou stejné a síla působí na každou jednotlivou molekulu, takže celková síla působící na libovolnou část plynu bude prostě součin počtu molekul a síly působící na jednu molekulu. Abychom se vyhnuli zbytečným komplikacím, zvolme souřadnicovou soustavu tak, aby osa  $x$  ležela ve směru síly  $F$ .

Budeme-li v plynu podobně jako v předcházející části uvažovat dvě rovnoběžné roviny vzdálené o  $dx$ , pak síla působící na každý atom násobená počtem atomů  $n$  v  $\text{cm}^3$  (zobecnění dřívě uvažovaného výrazu  $nmg$ ) a násobená  $dx$ , musí být kompenzována tlakovou změnou:  $Fn dx = dp = kT dn$ . Tomuto zákonu můžeme dát i jiný tvar, který nám bude užitečný později:

$$F = kT \frac{d}{dx} (\ln n). \quad (40.2)$$

Zatím si uvědomte, že  $-F dx$  je práce potřebná k přemístění molekuly z  $x$  do  $x + dx$ , a je-li síla  $F$  konzervativní, tj. práci můžeme vyjádřit jako rozdíl potenciální energie, pak půjde o změnu potenciální energie (PE). Záporný diferenciál potenciální energie je vykonaná práce  $F dx$ , a proto  $d(\ln n) = -d(\text{PE})/kT$  a po integrování

$$n = (\text{konst}) e^{-\text{PE}/kT}. \quad (40.3)$$

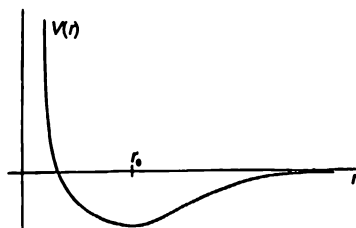
Ukazuje se tedy, že to, co jsme zjistili ve speciálním případě, má obecnou platnost. (Co by se stalo tehdy, kdyby  $F$  nebyla konzervativní? Pak by rovnice (40.2) vůbec neměla řešení. V takovém případě by nenastala rovnováha, neboť energie by přibývala nebo ubývala, jak by se atomy pohybovaly po uzavřených křivkách, pro něž není celková práce nulová. Tepelná rovnováha nemůže nastat, nejsou-li vnější síly působící na atomy konzervativní.) Rovnice (40.3), známá jako *Boltzmannův zákon*, je dalším z principů statistické mechaniky. Říká, že pravděpodobnost nalezení molekuly v dané prostorové konfiguraci se mění exponenciálně se zápornou potenciální energií této konfigurace dělenou  $kT$ .

Tak se dozvídáme o rozdělení molekul: Předpokládejme, že v kapalině máme kladný ion, který přitahuje záporné ionty z okolí. Ptáme se, kolik jich bude v různých vzdálenostech od tohoto kladného iontu. Víme-li, jak se mění se vzdáleností potenciální energie, pak poměr počtu iontů v různých vzdálenostech je určen právě tímto zákonem. Aplikací tohoto zákona je opravdu mnoho.



### 40.3 VYPAŘOVÁNÍ KAPALINY

K složitějším úlohám, které se řeší ve statistické mechanice, patří následující důležitý problém. Uvažujme soubor molekul, jež se vzájemně přitahují a předpokládejme, že síla mezi libovolnými molekulami, např.  $i$  a  $j$ , závisí pouze na vzdálenosti  $r_{ij}$  mezi nimi a lze vyjádřit jako derivaci potenciálové funkce  $V(r_{ij})$ . Na obr. 40.3 je znázorněno, jaký tvar může mít taková funkce. Pro  $r > r_0$  energie klesá s přibližováním se molekul, proto se molekuly přitahují. Když se molekuly příliš přiblíží, energie rychle roste a tehdy dochází k jejich silnému odpuzování. Takové je chování molekul v hrubých rysech.



Obr. 40.3 Graf závislosti potenciální energie dvou molekul na jejich vzdálenosti

Nyní předpokládejme, že máme nádobu plnou takových molekul a zajímáme se o to, jak se v průměru uspořádají. Odpověď na tuto otázku dává výraz  $\exp(-pE/kT)$ . Předpokládáme-li, že síly jsou párové (ve složitých problémech se mohou vyskytnout i trojčásticové síly, ale např. elektrické síly jsou párové), pak bude celková potenciální energie součtem přes všechny páry. Proto bude pravděpodobnost toho, že molekuly vytvářejí konfiguraci s určitými kombinacemi vzdáleností  $r_{ij}$ , úměrná

$$\exp\left[-\sum_{i,j} V(r_{ij})/kT\right].$$

Kdyby teplota byla velmi vysoká, takže  $kT \gg |V(r_0)|$ , byl by exponent téměř všude relativně malý a pravděpodobnost výskytu molekuly by téměř nezávisela na poloze molekuly. Všimněme si případu dvou molekul: v takovém případě bude  $\exp(-pE/kT)$  udávat pravděpodobnost toho, že se nacházejí ve vzájemné vzdálenosti  $r$ . Je jasné, že pravděpodobnost je největší tam, kde má potenciál největší zápornou hodnotu a je téměř nulová tam, kde se potenciál blíží k nekonečnu, to se stává při velmi malých vzdálenostech. To ukazuje, že atomy v plynu se nemohou dostat těsně k sobě, protože se silně odpuzují. Vztahujeme-li pravděpodobnost na jednotkový objem, můžeme prohlásit, že největší pravděpodobnost nalezení molekuly je v bodě  $r_0$ . Do jaké míry je větší proti ostatním místům, závisí na teplotě. Je-li teplota velmi malá ve srovnání s rozdílem energií mezi  $r = r_0$  a  $r = \infty$ , je exponenciála téměř vždy blízká jedné. V takovém případě, když střední kinetická energie (řádově  $kT$ ) značně převyšuje potenciální energii, nezáleží příliš na silách. S poklesem teploty však pravděpodobnost nalezení molekul ve vzdálenosti  $r_0$  postupně roste ve srovnání s pravděpodobnostmi jejich výskytu na jiných místech, a je-li  $kT$  mnohem menší než  $|V(r_0)|$ , bude v okolí  $r_0$  poměrně velký kladný exponent. Jinak řečeno: V daném objemu budou molekuly mnohem větší pravděpodobností ve vzdálenosti odpovídající minimu energie než daleko od této vzdálenosti. Při poklesu teploty se atomy přibližují, shlukují se a vytvářejí kapaliny, tuhé látky a molekuly a při zahřátí se vypařují.

Kdybychom chtěli přesně určit, jak se látky vypařují, co se skutečně děje v daných podmínkách, museli bychom postupovat následujícím způsobem. Nejprve bychom museli přesně znát zákon molekulárních sil  $V(r)$ , a to z kvantové mechaniky nebo např. z experimentu. Kdybychom znali zákon mezimolekulárních sil, stačilo by nám jen analyzovat funkci  $\exp(-\sum V_{ij}/kT)$ , aby-  
chom zjistili, jak se bude chovat miliarda molekul. Je až překvapující, že přes velkou jednodu-  
chost této funkce i celé myšlenky a po nalezení potenciálu nás čeká *ohromně složitá* úloha a ta  
složitost spočívá v příliš velkém počtu proměnných.

Přes tyto těžkosti je to vzrušující a zajímavá úloha. Často se uvádí jako příklad „úlohy mnoha  
částic“ a jde skutečně o zajímavý problém. V jediném vztahu popisujícím tuto úlohu musí být  
zahrnutý např. všechny podrobnosti o přechodu plynu v tuhou látku nebo o krystalických for-  
mách, jichž taková tuhá látka může nabýt. Mnozí se pokoušeli takový vztah získat, ale matema-  
tické těžkosti jsou příliš velké, přičemž těžkost nespočívá v zápisu tohoto zákona, ale v práci  
s velkým počtem proměnných.

A to je vše, co se týká rozdělení částic v prostoru. Je to prakticky konec klasické statistické me-  
chaniky, protože když známe síly, můžeme v principu najít prostorové rozdělení a rozdělení  
podle rychlostí je něco, co získáme jednou provždy a co se nemění od případu k případu. Nej-  
větší problém spočívá v získání konkrétní informace z našeho formálního řešení, a to je hlavním  
předmětem klasické statistické mechaniky.

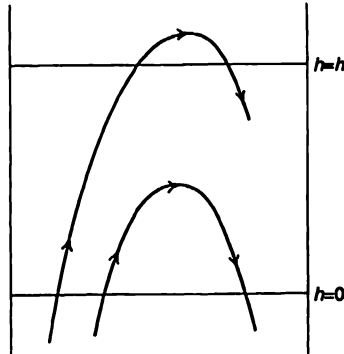
## 40.4 ROZDĚLENÍ MOLEKUL PODLE RYCHLOSTI

Nyní se budeme věnovat úvahám o rozdělení molekul podle rychlosti, protože je zajímavé  
a někdy velmi užitečné znát počet molekul, jež se pohybují tou či onou rychlostí. Využijeme  
přitom poznatky, k nimž jsme dospěli při zkoumání plynu v atmosféře. Plyn budeme považovat  
za ideální, tak jako jsme to udělali tehdy, když jsme při vyjádření potenciální energie neuvažovali  
energii vzájemného přitahování atomů. Jedinou potenciální energií, s níž jsme v našem prvním  
příkladě počítali, byla energie pocházející od gravitace. Kdybychom zahrnuli síly působící mezi  
atomy, dostali bychom samozřejmě složitější výraz. Předpokládáme tedy, že mezi atomy nepůsobí  
síly a na chvíli zapomeneme i na srážky; později se vrátíme k odůvodnění takového předpokladu.  
Viděli jsme, že ve výšce  $h$  je méně molekul než v nulové výšce; podle vztahu (40.1) počet molekul  
s rostoucí výškou exponenciálně klesá. Proč je ve větší výšce méně molekul? Nedostanou se  
nakonec do výšky  $h$  všechny molekuly, které se v nulové výšce pohybovaly směrem nahoru? Ne,  
nedostanou, neboť některé z těch, které se v nulové výšce pohybovaly směrem nahoru, se  
pohybovaly příliš pomalu a nemohly se dostat na potenciálový vrch do výšky  $h$ . S tímto klíčem  
k řešení se nám už podaří vypočítat, kolik molekul musí mít tu kterou rychlost, neboť ze vztahu  
(40.1) už víme, kolik molekul má menší rychlost než je ta, která je potřebná pro výstup na  
potenciálový vrch do výšky  $h$ . Právě tyto molekuly přispívají k tomu, že hustota ve výšce  $h$  je menší  
než hustota v nulové výšce.

Zformulujme nyní tuto myšlenku přesněji: vypočítejme, kolik molekul prochází zdola nahoru  
rovinou  $h = 0$  (tím, že nějakou výšku nazýváme nulovou, nepředpokládáme, že to je dno; je to  
prostě vhodné označení a v záporných výškách může plyn existovat také). Molekuly plynu se  
pohybují všemi směry, ale některé z nich procházejí touto rovinou. V každém okamžiku jí  
prochází zdola nahoru různými rychlostmi určité množství molekul za sekundu. Nyní si  
všimněme následující skutečnosti. Označíme-li symbolem  $u$  rychlost potřebnou k dosažení výšky  
 $h$  (kinetická energie  $mu^2/2 = mgh$ ), pak počet molekul procházejících za sekundu nahoru dolní

rovinou ve vertikálním směru se složkou rychlosti větší než  $u$  je stejný jako počet molekul, které procházejí horní rovinou s libovolnou nahoru směřující rychlostí. Molekuly, jejichž vertikální rychlost nepřevyšuje  $u$ , se horní rovinou nedostanou. Je tedy vidět, že

$$\begin{aligned} & \text{počet molekul procházejících rovinou } h=0 \text{ s } v_z > u = \\ & = \text{počet molekul procházejících rovinou } h=h \text{ s } v_z > 0. \end{aligned}$$



Obr. 40.4 Výšky  $h$  dosahují jen ty molekuly, které se ve výšce  $h=0$  pohybovaly dostatečně rychle.

Jenže počet molekul, které procházejí rovinou  $h$  s libovolnou rychlostí větší než 0, je menší než počet molekul procházejících dolní rovinou libovolnou rychlostí větší než 0, protože dole je víc molekul. A to je vše, co potřebujeme. Už víme, že rozdělení molekul podle rychlostí je stejné ve všech výškách, protože teplotu považujeme za konstantní v celé atmosféře. Je-li rozdělení podle rychlostí všude stejné a dole je *víc molekul*, musí být poměr počtu molekul  $n_{>0}(h)$  procházejících s kladnou rychlostí výškou  $h$  k počtu molekul  $n_{>0}(0)$  procházejících s kladnou rychlostí nulovou výškou roven poměru hustot v těchto výškách a ten je roven  $\exp(-mgh/kT)$ . Víme však, že  $n_{>0}(h) = n_{>u}(0)$  a dále  $1/2 mu^2 = mgh$ , a proto můžeme psát

$$\frac{n_{>u}(0)}{n_{>0}(0)} = \exp(-mgh/kT) = \exp(-mu^2/2kT).$$

Jinak řečeno: Počet molekul procházejících za sekundu jednotkovou plochou v nulové výšce se zovou složkou rychlosti větší než  $u$  je roven součinu  $\exp(-mu^2/2kT)$  a celkového počtu molekul, které procházejí touto rovinou rychlostí větší než nula.

Platí to nejen pro libovolně zvolenou nulovou výšku, ale samozřejmě pro jakoukoliv výšku, a proto je rozdělení podle rychlosti všude *stejné* (Výsledné tvrzení neříká nic o výšce  $h$ , ta se objevuje jen v průběžných úvahách.) Jako výsledek dostáváme obecné tvrzení o rozdělení podle rychlostí. Kdybychom do plynového potrubí vyvrtali malou dírkou, tak malou, aby tam jen zřídka docházelo ke srážkám a vzdálenost mezi dvěma srážkami by byla mnohem větší než průměr dírkou, pak by ve shodě s odvozeným tvrzením měly vyletující částice různé rychlosti, ale ta část částic, která by vyletovala s rychlostí větší než  $u$ , by se rovnala  $\exp(-mu^2/2kT)$ .

Vraťme se nyní k otázce zanedbání srážek. Proč jsou srážky nepodstatné? Mohli bychom argumentovat stejně jako předtím, ale místo konečné výšky brát infinitezimální výšku  $h$ , která je tak malá, že srážka mezi 0 a  $h$  nepřichází v úvahu. To však není třeba. Náš důkaz je totiž

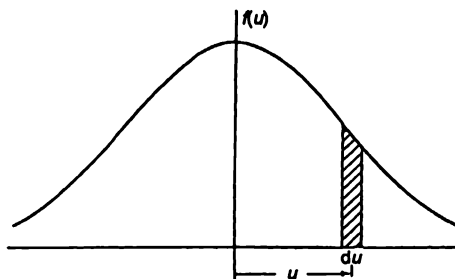
založen na analýze hodnot energie a na zachování energie a při srážkách dochází k výměně energie mezi molekulami. Nemusíme se však starat o to, zda sledujeme stejnou molekulu, neboť k výměně energie dochází pouze s druhou molekulou. Ukazuje se, že i při důkladnější analýze (a ta je přirozeně namáhavější) dostaneme stejný výsledek.

Je zajímavé, že rozdělení podle rychlostí, které jsme našli, má tvar

$$n_{>u} \sim \exp(-\text{kin. energie} / kT). \quad (40.4)$$

Takový způsob popisu rozdělení podle rychlostí, při němž určujeme počty molekul procházejících danou plochou s určitou minimální z-ovou složkou rychlosti, není nejvhodnější. Často nás například zajímá, kolik molekul se v plynu pohybuje rychlostí, jejíž z-ová složka je z intervalu mezi dvěma danými hodnotami, a to přímo vztah (40.4) neudává. I když to, o čem jsme psali, je celkem obecné, chtěli bychom náš výsledek vyjádřit ve vhodnější formě. *Všimněte si, že nemůžeme tvrdit, že kterákoliv molekula má přesně určitou hodnotu rychlosti.* Žádná z molekul nemá rychlost, která by byla rovna *přesně*  $1,796\,289\,9173 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Aby naše tvrzení mělo smysl, musíme se ptát, kolik molekul má rychlost z intervalu od 1,796 do 1,797 apod. Kdybychom se chtěli vyjádřit matematicky, zavedli bychom  $f(u) du$  tak, aby představovala tu část molekul, které mají rychlosti mezi  $u$  a  $u + du$  nebo, což je totéž (je-li  $du$  infinitezimální), mají rychlost  $u$  s přesností na  $du$ . Obr. 40.5 znázorňuje možný tvar funkce  $f(u)$  a vyšrafovaná část šířky  $du$  a střední výšky  $f(u)$  představuje uvažovanou část  $f(u) du$ . Tedy poměr šrafované plochy a celkové plochy pod křivkou je roven relativnímu počtu molekul s rychlostí  $u$  z intervalu šířky  $du$ . Definujeme-li funkci  $f(u)$  tak, že relativní počet molekul s rychlostí z tohoto intervalu je roven přímo vyšrafované ploše, musí celková plocha představovat 100 % molekul, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1. \quad (40.5)$$



Obr.40.5 Distribuční (rozdělovací) funkce rychlostí. Vyšrafovaná plocha představuje  $f(u) du$ , tj. relativní počet částic s rychlostmi z intervalu šířky  $du$  v okolí  $u$

Nyní nám zbývá pouze určit toto rozdělení porovnáním se vztahem, který jsme odvodili už dříve. Nejprve musíme vědět, jak lze pomocí  $f(u)$  vyjádřit počet molekul procházejících za sekundu danou plochou rychlostí větší než  $u$ . Na první pohled by se zdálo, tento počet je dán integrálem  $\int_u^{\infty} f(u) du$ . To však není pravda, protože se zajímáme o počet molekul procházejících plochou za *sekundu*. Rychlejší molekuly budou procházet plochou častěji než pomalejší a abychom vyjádřili, kolik jich prošlo, musíme násobit rychlostí. (Už jsme o tom mluvili v před-

cházející kapitole, když jsme diskutovali o počtu srážek.) Celkový počet molekul, které v daném čase  $t$  procházejí povrchem, je dán počtem molekul schopných dosáhnout povrchu a to jsou ty, které přišly ze vzdálenosti  $u$ . Počet molekul dosahujících povrchu vyjadřujeme tedy jako počet molekul, které jsou v jednotkovém objemu, násobený vzdáleností, kterou překonaly na cestě k ploše, již mají projít, a ta je úměrná  $u$ . Proto potřebujeme vyjádřit integrál z  $u$  násobeného  $f(u) du$ , integrál přes nekonečnou oblast s dolní mezí  $u$  a až na konstantu úměrnosti musíme dostat to, co v předcházejících úvahách, tedy  $\exp(-mu^2/2kT)$ . Tak máme

$$\int_u^\infty u f(u) du = \text{konst.} \exp(-mu^2/2kT), \quad (40.6)$$

a konstantu úměrnosti určíme později.

Derivujeme-li tento integrál podle  $u$ , dostaneme podintegrální výraz, tj. integrand (se znaménkem minus, protože  $u$  je dolní mez), a když derivujeme pravou stranu, dostaneme stejnou exponenciálu násobenou  $u$  (a nějaké konstanty). Vykrátíme-li na obou stranách  $u$ , dostaneme vztah

$$f(u) du = C \cdot \exp(-mu^2/2kT) du. \quad (40.7)$$

Na obou stranách ponecháme  $du$ , aby nám to připomínalo, že jde o rozdělení. Tato rovnice nám udává relativní počet molekul s rychlostmi z intervalu od  $u$  do  $u + du$ .

Konstantu  $C$  je třeba určit tak, aby integrál vystupující v rovnici (40.5) byl roven jedné. Můžeme ukázat<sup>51)</sup>, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}.$$

Použijeme-li tento výsledek, snadno zjistíme, že  $C = \sqrt{m/(2\pi kT)}$ .

Protože jsou rychlost a hybnost navzájem úměrné, můžeme prohlásit, že rozdělení molekul podle hybností je také úměrné  $\exp(-\text{kin. energie}/kT)$ , na jednotkový interval hybnosti. Ukazuje se, že tento teorém platí i v teorii relativity, je-li vyjádřen pomocí hybností, ale neplatí v prostoru rychlostí. Proto je výhodné si ho pamatovat ve tvaru vyjádřeném pomocí hybností

$$f(p) dp = C \cdot \exp(-\text{kin. energie} / kT) dp. \quad (40.8)$$

Zjistili jsme, že pravděpodobnosti jsou v případě různých druhů energií – jak kinetické, tak i potenciální – vyjádřeny stejně: pomocí  $\exp(-\text{energie}/kT)$ , a proto si tento krásný poznatek můžeme snadno zapamatovat.

Dosud jsme mluvili jen o „vertikálním“ rozdělení rychlostí. Můžeme se však zajímat i o pravděpodobnost toho, že molekula se pohybuje v jiném směru. Je samozřejmé, že taková rozdělení vzájemně souvisí a úplné rozdělení můžeme získat z rozdělení, které už známe, neboť úplné

51) Abychom vypočítali tento integrál, označme.  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx$

Pak platí  $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x^2 + y^2)] dx dy.$

To je však dvojný integrál přes celou rovinu  $xy$  a můžeme ho vyjádřit pomocí polárních souřadnic ve tvaru  $I^2 = \int_0^\infty \exp(-r^2) 2\pi r dr = \pi \int_0^\infty \exp(-t) dt = \pi.$

rozdělení závisí pouze na druhé mocnině absolutní hodnoty rychlosti a ne na  $z$ -ové složce. Musíme dostat něco nezávislého na směru a taková funkce může vyjadřovat jen pravděpodobnost různých velikostí rychlosti. Už známe rozdělení  $z$ -ové složky a z ní můžeme získat rozdělení ostatních složek. Jako výsledek dostaneme, že pravděpodobnost je i nadále úměrná  $\exp(-\text{kin. energie}/kT)$ , ale nyní se kinetická energie skládá ze tří částí:  $m v_x^2/2$ ,  $m v_y^2/2$ ,  $m v_z^2/2$  a v exponentu postupuje součet těchto částí. Můžeme to však vyjádřit i ve tvaru součinu

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \sim \exp(-m v_x^2/2 kT) \cdot \exp(-m v_y^2/2 kT) \cdot \exp(-m v_z^2/2 kT) \cdot dv_x dv_y dv_z. \quad (40.9)$$

O správnosti tohoto vztahu se můžete přesvědčit. Za prvé: Je v souladu s původním požadavkem být funkcí pouze  $v^2$ . A zadruhé, pravděpodobnosti jednotlivých hodnot  $v_z$ , jež dostaneme integrováním přes všechny  $v_x$  a  $v_y$ , jsou právě ty, které vyhovují vztahu (40.7). Funkce (40.9) vyhovuje tedy oběma požadavkům!

## 40.5 MĚRNÁ TEPELNÁ KAPACITA PLYNŮ

Nyní si všimněme některých způsobů ověření teorie a odhadněme, jak úspěšná je klasická teorie plynů. Již dříve jsme poznali, že je-li  $U$  vnitřní energie  $N$  molekul, pak možná v některých případech pro některé plyny platí vztah  $PV = NkT = (\gamma - 1)U$ . Víme i to, že v případě jednoatomového plynu je tento výraz roven  $2/3$  kinetické energie pohybu atomů v těžiškové soustavě. V případě jednoatomového plynu je však kinetická energie rovna vnitřní energii, a proto  $\gamma - 1 = 2/3$ . Předpokládejme však, že jde o složitější molekulu, u níž může dojít k rotaci a vibraci a dále předpokládejme (v klasické mechanice je takový předpoklad správný), že energie vnitřních pohybů jsou také úměrné  $kT$ . Pak má molekula při dané teplotě kromě kinetické energie  $kT$  i vnitřní vibrační nebo rotační energii. Celková energie  $U$  obsahuje nejen vnitřní kinetickou energii, ale i rotační energii, a proto máme jinou hodnotu  $\gamma$ . Technicky nejlepším způsobem měření  $\gamma$  je měření měrné tepelné kapacity představující změnu energie s teplotou. K tomuto způsobu měření se ještě vrátíme. Zatím budeme předpokládat, že  $\gamma$  jsme experimentálně určili z křivky  $pV^\gamma$  odpovídající adiabatickému stlačování.

Vypočítejme nyní  $\gamma$  pro některé speciální případy. Nejprve uvažujeme jednoatomový plyn, který má celkovou energii  $U$  stejnou jako kinetickou energii, a tehdy, jak už víme, je  $\gamma = 5/3$ . Jako příklad dvouatomového plynu bychom mohli vzít kyslík, jodovodík, vodík apod. a přitom předpokládat, že dvouatomový plyn se skládá z dvojic atomů vázaných podobným druhem sil, jaké znázorňuje obr. 40.3. Dále můžeme předpokládat (a to se ukazuje správné), že při teplotách, které nás v případě dvouatomových plynů zajímají, mají dvojice atomů silnou tendenci zakotvit ve vzájemné vzdálenosti  $r_0$ , tj. ve vzdálenosti odpovídající minimu potenciální energie. Kdyby to tak nebylo a pravděpodobnost by se se vzdáleností atomů výrazně neměnila, většina atomů by se nemusela nacházet v blízkosti minima energie. Pak by musel být plynný kyslík směsí  $O_2$  a jednotlivých atomů kyslíku v netriviálním poměru. Víme však, že v kyslíku je jen velmi málo samostatných atomů, což znamená, že minimum potenciální energie je podstatně větší co do velikosti než  $kT$ , a to jsme i předpokládali. Jsou-li atomy molekuly silně vázány na vzdálenost  $r_0$ , budeme z potenciálové křivky potřebovat pouze část blízkou minimu a tu můžeme aproximovat parabolou. Parabolický potenciál ale odpovídá harmonickému oscilátoru a molekulu kyslíku si opravdu můžeme velmi dobře představit jako dva atomy spojené pružinou.

Čemu je rovna celková energie takové molekuly při teplotě  $T$ ? Víme, že kinetická energie každého z atomů je rovna  $3/2 kT$ , a proto je kinetická energie obou atomů rovna  $3/2 kT + 3/2 kT$ . To však můžeme vyjádřit i jiným způsobem: na tyto  $3/2$  plus  $3/2$  se můžeme dívat jako na kinetickou energii těžiště ( $3/2$ ), kinetickou energii rotace ( $2/2$ ) a kinetickou energii vibrace ( $1/2$ ). Na kinetickou energii vibrace připadá  $1/2$ , neboť jde o jednorozměrný pohyb a víme, že každému stupni volnosti odpovídá energie  $1/2 kT$ . Pokud jde o rotaci, může se uskutečňovat kolem dvou os, takže máme dva nezávislé pohyby. Atomy si představujeme jako jakési body, a proto nepředpokládáme rotaci kolem jejich spojnice. Na to musíme pamatovat, protože objeví-li se rozpory, mohou mít svůj původ právě v takovém předpokladu. Je tady však ještě i *potenciální* energie vibrací a nás zajímá její velikost. V případě harmonického oscilátoru je střední potenciální energie stejná jako střední kinetická energie, tj. rovná se  $1/2 kT$ . Pro celkovou energii molekuly proto platí:  $U = 7/2 kT$  nebo  $kT = 2/7 U$  na atom. To znamená, že  $\gamma$  je rovno  $9/7$ , a ne  $5/3$ , tedy  $\gamma = 1,286$ .

Tyto hodnoty můžeme porovnat se skutečně naměřenými hodnotami  $\gamma$  vyjádřenými v tabulce 40.1. Když si všimneme hélia, které je jednoatomovým plynem, zjistíme hodnotu velmi blízkou  $5/3$  a odchyłka od této hodnoty je pravděpodobně experimentální chyba, i když při takové nízké teplotě se mohou objevit síly vzájemného působení mezi atomy. I krypton a argon, oba jednoatomové, dávají hodnoty, jejichž odchyłka je v mezích experimentální chyby.

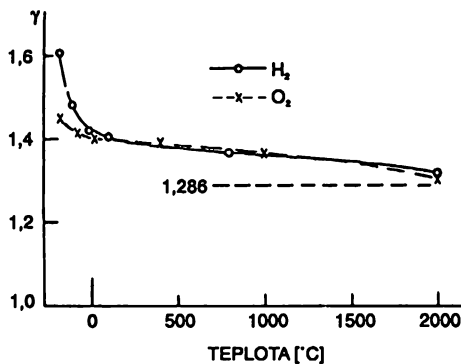
Tab.40.1 Hodnoty poměru měrných tepelných kapacit  $\gamma$  různých plynů

Plyn	$T$ (°C)	$\gamma$
He	-180	1,660
Kr	19	1,680
Ar	15	1,668
H <sub>2</sub>	100	1,404
O <sub>2</sub>	100	1,399
HI	100	1,400
Br <sub>2</sub>	300	1,320
I <sub>2</sub>	185	1,300
NH <sub>3</sub>	15	1,310
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	15	1,220

Přejdeme-li k dvouatomovým plynům a všimneme si vodíku s hodnotou 1,404, musíme konstatovat, že nesouhlasí s teoretickou hodnotou 1,286. Kyslík s hodnotou 1,399 je velmi podobný vodíku a také nesouhlasí s teorií. Podobně je to i s jodovodíkem, jenž má hodnotu 1,40. Vypadá to tak, jakoby  $\gamma$  mělo mít hodnotu 1,40, ale budeme-li v porovnávání pokračovat a všimneme si bromu, zjistíme, že mu odpovídá hodnota 1,32 a dále jódu 1,30. Protože hodnota 1,30 je blízká hodnotě 1,286, můžeme v případě jódu mluvit o souhlasu s experimentem, což nebylo možné v případě kyslíku. Stojíme tedy před dilematem. Pro jedny molekuly máme souhlas, pro druhé nesouhlas a bude třeba mnoho důvtipu, abychom tuto situaci vysvětlili.

Všimněme si, jak to bude s ještě složitějšími molekulami, které mají mnoho částí a jako příklad zvolme ethan – C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>. Ethan má osm atomů a ty rotují a kmitají v rozmanitých kombinacích, takže celková vnitřní energie se bude skládat z velkého počtu  $kT$ . Jen kinetická energie musí být aspoň  $12 kT$ , a proto musí být  $\gamma - 1$  velmi blízké nule, tedy  $\gamma$  musí být téměř

přesně rovno jedné. Tato hodnota je opravdu nižší než v předcházejících případech, ale 1,22 není zase tak málo a je to víc než 11/12, což představuje hodnotu vypočítanou při započítání pouze kinetické energie. To je ale nepochopitelné!



Obr. 40.6 Experimentální hodnoty  $\gamma$  jako funkce teploty pro vodík a kyslík. Klasická teorie předpovídá  $\gamma = 1,286$  nezávisle na teplotě.

Tato záhada má ještě hlubší kořeny, protože dvouatomovou molekulu nemůžeme ani v limitě považovat za tuhou. I kdyby byla vazba mezi atomy nekonečně silná, atomy by nepřestaly úplně kmitat. V molekule by stále zůstávala vibrační energie  $kT$ , protože ta nezávisí na síle vazby. Kdybychom si přece jen představili *absolutně* tuhou molekulu nacházející se ve stavu, kdy přestávají všechny kmity a zbavili se tak jednoho stupně volnosti, pro dvouatomový plyn bychom dostali  $U = 5/2 kT$  a  $\gamma = 1,40$ . Tato hodnota vypadá slibně i pro  $H_2$  a  $O_2$ . Problém by se tím však nevyřešil, neboť v případě kyslíku i vodíku závisí  $\gamma$  na teplotě! Z naměřených hodnot znázorněných na obr. 40.6 je vidět, že v případě  $H_2$  se  $\gamma$  mění z hodnoty přibližně 1,6 při  $-185^\circ\text{C}$  na hodnotu 1,3 při  $2000^\circ\text{C}$ . Tato změna je v případě vodíku výraznější než v případě kyslíku, ale i v případě kyslíku je zřejmé, že  $\gamma$  roste s poklesem teploty.

## 40.6 SELHÁNÍ KLASICKÉ FYZIKY

Musíme tedy přiznat, že máme určité těžkosti. Místo myšlené pružiny působící na atomy bychom mohli zkoušet působení nějaké jiné síly, ale to vše by pouze zvětšovalo hodnotu  $\gamma$ . Kdybychom zahrnuli více forem energie,  $\gamma$  by se v rozporu se skutečností více blížilo jedné. Všechny klasické teorie by situaci jen zhoršily. Faktem je, že v každém atomu jsou elektrony a z atomových spekter víme, že jim odpovídá vnitřní pohyb. Každý z elektronů musí mít kinetickou energii aspoň  $1/2 kT$  a ještě i určitou potenciální energii a vezmeme-li je v úvahu bude  $\gamma$  ještě menší. To je absurdní. Určitě je to nesprávné.

První významný článek o dynamické teorii plynů publikoval Maxwell v roce 1859. Na základě myšlenek, o nichž jsme již mluvili, byl Maxwell schopen přesně vysvětlit mnoho známých vztahů, jako například Boyleův zákon, teorii difúze, viskozitu plynů a jevy, o nichž budeme mluvit v následujících kapitolách. V souhrnu své práce uvádí výčet těchto významných úspěchů a nakonec říká: „Stanovením potřebného vztahu mezi postupným a rotačním pohybem neseferických částic (měl tím namysli poučku o  $1/2 kT$ ) jsme dokázali, že systém takových částic nespĺňuje známý vztah platný mezi dvěma měrnými tepelnými kapacitami.“ Mluví zde o  $\gamma$  (později uvidíme, že



tato veličina souvisí s dvěma způsoby měření měrné tepelné kapacity) a upozorňuje na to, že tento problém neumíme vyřešit.

V přednášce, kterou měl o deset let později, Maxwell řekl: „Nyní jsem vás seznámil s tím, co považuji za největší problém, s nímž se bude muset molekulární teorie vypořádat.“ Tato slova jsou prvním upozorněním na chybnost zákonů klasické fyziky. Byl to první náznak toho, že chyba je v podstatě, neboť správně dokázaná poučka byla v rozporu s experimentem. Kolem roku 1890 se o této záhadě znovu zmínil Jeans. Často slyšíme, že fyzici konce devatenáctého století byli přesvědčeni o tom, že znají všechny podstatné zákony a už jim nezůstává nic jiného, jen upřesňovat výpočty na víc desetinných míst. Možná to někdo jednou řekl a ostatní to po něm opakovali. Jenže důkladné studium literatury té doby ukazuje, že fyzici byli něčím velmi znepokojeni. Jeans o tomto problému mluvil jako o záhadném jevu, z něhož jakoby vyplývalo, že při poklesu teploty „zamrzají“ některé druhy pohybu.

Kdybychom mohli například předpokládat, že kmitavý pohyb neexistuje při nízkých teplotách, ale existuje při vysokých teplotách, pak bychom si uměli představit existenci takového plynu, v němž není při dostatečně nízké teplotě vůbec kmitavý pohyb a  $\gamma = 1,40$ , ale při vyšší teplotě, když se objevují kmity,  $\gamma$  klesá. Totéž můžeme říci o rotaci. Kdyby bylo možné vyloučit rotaci, například protože „zamrzá“ při dostatečně nízkých teplotách, pak by nám byla pochopitelná skutečnost, že  $\gamma$  vodíku při poklesu teploty dosahuje hodnoty 1,66. Čím to však můžeme vysvětlit? Je jasné, že takové „zamrzání“ pohybu nelze vysvětlit klasickou mechanikou. K pochopení takového jevu došlo až po objevení kvantové mechaniky.

Bez důkazu zformulujeme výsledky statistické mechaniky založené na kvantověmechanické teorii. Podle kvantové mechaniky má potenciálem vázaný systém, například oscilátor, diskrétní soubor energetických hladin, tj. stavů s různou energií. Vzniká otázka: Jak je třeba modifikovat statistickou mechaniku, aby byla v souladu s kvantověmechanickou teorií? Je skutečně zajímavé, že i když převážná většina problémů je obtížnější v kvantové mechanice než v klasické mechanice, jsou problémy statistické mechaniky při kvantověmechanickém přístupu mnohem jednodušší! Jednoduchý výsledek klasické mechaniky, že  $n = n_0 \cdot \exp(-\text{energie}/kT)$ , se stane v kvantové teorii velmi důležitým poznatkem: Označíme-li energie souboru molekulárních stavů  $E_0, E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ , pak v tepelné rovnováze je pravděpodobnost nalezení molekuly ve stavu s energií  $E_i$  úměrná  $\exp(-E_i/kT)$ . Tak se určují pravděpodobnosti obsazení jednotlivých stavů. Jinými slovy: relativní pravděpodobnost obsazení stavu  $E_1$  proti stavu  $E_0$  je rovna

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\exp(-E_1/kT)}{\exp(-E_0/kT)}, \quad (40.10)$$

což je totéž jako

$$n_1 = n_0 \cdot \exp[-(E_1 - E_0)/kT], \quad (40.11)$$

protože  $P_1 = n_1/N$ ,  $P_0 = n_0/N$ . Obsazení stavu s vyšší energií je tedy méně pravděpodobné než obsazení stavu s nižší energií. Poměr počtu atomů ve vyšším stavu k počtu atomů v nižším stavu je roven mocnině  $e$  (exponent je záporně vzatý rozdíl energií dělený  $kT$ ) – a to je velmi jednoduchý vztah.

Ukazuje se, že v případě harmonického oscilátoru jsou každé dvě sousední hladiny stejně vzdálené. Jestliže nejnižší energetické hladině přisoudíme hodnotu  $E_0 = 0$  (ve skutečnosti se tato hodnota trochu liší od nuly, ale posunem všech energetických hladin o stejnou hodnotu se nestane nic nepřístupného), první hladina bude mít hodnotu  $E_1 = \hbar\omega$ , druhá  $2\hbar\omega$ , třetí  $3\hbar\omega$  atd.

Nyní si všimneme, co se stane. Předpokládejme, že zkoumáme kmity dvouatomové molekuly a aproximujeme je harmonickým oscilátorem. Ptáme se, jaká je relativní pravděpodobnost nalezení molekuly ve stavu  $E_1$  místo ve stavu  $E_0$ . Odpověď na tuto otázku je taková, že pravděpodobnost nalezení molekuly ve stavu  $E_1$  proti pravděpodobnosti nalezení molekuly  $E_0$  klesá jako  $\exp(-\hbar\omega/kT)$ . Nyní předpokládejme, že  $kT$  je mnohem menší než  $\hbar\omega$ , tj. máme co činit s nízkými teplotami. Potom je pravděpodobnost výskytu ve stavu  $E_1$  mimořádně malá. Prakticky všechny atomy jsou ve stavu  $E_0$ . I když změníme teplotu, ale ta zůstane stále malá, bude pravděpodobnost výskytu ve stavu  $E_1 = \hbar\omega$  nekonečně malá – energie oscilátoru zůstane téměř nulová. To se nezmění pokud je teplota mnohem menší než  $\hbar\omega$  – energie oscilátoru se s teplotou nemění. Všechny oscilátory jsou v nejnižším stavu, jejich pohyb je efektivně „zmrazený“ a *nepřispívají k měrné tepelné kapacitě*. Z tabulky 40.1 můžeme usoudit, že při  $100^\circ\text{C}$ , neboli  $373\text{ K}$ , je  $kT$  mnohem menší než energie kmitavého pohybu kyslíkových a vodíkových molekul, ale ne molekul jódu. Příčina tohoto rozdílu spočívá v tom, že atom jódu je velmi těžký ve srovnání s atomem vodíku, a i když síly působící mezi atomy jódu a atomu vodíku jsou srovnatelné, je molekula jódu příliš těžká a vlastní frekvence jejích kmitů příliš malá ve srovnání s vlastní frekvencí vodíku. Při pokojové teplotě je  $kT$  takové, že  $\hbar\omega$  vodíku je větší než  $kT$  a  $\hbar\omega$  jódu je menší než  $kT$ , a proto se pouze jód vyznačuje klasickou vibrační energií. Zvyšujeme-li teplotu plynu od velmi malých hodnot  $T$ , kdy se téměř všechny molekuly nacházejí v nejnižším stavu, postupně se objevuje nenulová pravděpodobnost jednotlivých vyšších stavů. Pokud máme nenulové pravděpodobnosti mnoha stavů, blíží se chování plynu k tomu, které předpokládá klasická fyzika, neboť kvantové stavy se stávají téměř nerozlišitelnými od energetického kontinua a systém může nabýt téměř libovolnou energii. Při vzrůstu teploty bychom tedy měli opět dostat výsledky klasické fyziky a na to ukazuje *obr. 40.6*. Stejným způsobem můžeme ukázat, že rotační stavy atomů jsou také kvantovány, ale tyto stavy jsou rozmístěny tak těsně, že za normálních podmínek je  $kT$  mnohem větší než jejich rozestup. Proto je vybudeno mnoho hladin a rotační kinetická energie systému se projevuje klasickým způsobem. Jen vodík se nechová při pokojových teplotách zcela podle tohoto tvrzení.

To je poprvé, co jsme porovnáním teoretických a experimentálních výsledků zjistili, že v klasické fyzice je nějaká chyba a z těžkostí jsme se snažili dostat pomocí kvantové mechaniky způsobem, který se velmi podobal metodě použité v průběhu vývoje fyziky. Až po 30 nebo 40 letech od tohoto problému se objevila další obtíž, jež také souvisela se statistickou mechanikou, ale v tomto případě s mechanikou fotonového plynu. Tento problém vyřešil Planck na začátku našeho století.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 40.1 ■ V radiometru molekuly plynu bombardují tenká lehká křídélka vrtulky, jež jsou z jedné strany začerněna a z druhé pokryta lesklou barvou. Dopadají-li na křídélka záření, je pohlcovaná energie unášena především molekulami, jež bombardují začerněnou stranu křídélek. Tak vzniká nerovnováha sil, která roztáhne vrtulku. Mějme nádobu, jež obsahuje v jednotce objemu  $n$  molekul o hmotnosti  $m$  při absolutní teplotě  $T$ . Tenké křídélko jednotkového plošného obsahu umístěné uvnitř nádoby pohlcuje za jednotku času energii záření  $P$  wattů, přičemž tato energie je unášena izotropně molekulami, jež dopadají jen na jednu stranu křídélka. Odhadněte přibližně velikost síly, která působí na křídélko ve vzduchu za pokojové teploty.
- 40.2 ■ Plyn v nádobě je v tepelné rovnováze. Jaká část jeho molekul, které za jednotku času dopadají na stěnu nádoby má kinetickou energii
- a) větší než střední tepelnou,
  - b) 3krát větší než střední tepelnou?
- 40.3 ■ Molární tepelná kapacita látky při stálém objemu  $C_v$  je množství energie potřebné ke zvýšení teploty 1 molu látky o  $1^\circ\text{C}$  zůstává-li objem stejný. Čemu je rovna molární tepelná kapacita látky při stálém objemu a) ideálního jednoatomového plynu, b) ideálního dvouatomového plynu?
- 40.4 ■ Plyn za normálního tlaku a teploty je nasáván rychlostí  $v$  v trubici s hladkými stěnami a stálém průřezu obsahu  $A$  do reaktivního motoru. Když plyn prochází drátěnou sítkou, jež neklade odpor proudění, zahřívá se a získává výkon  $Q$  wattů. Z trubice vytéká plyn rychlostí  $v'$ . Napište rovnice, které vyjadřují zákony zachování hmotnosti, hybnosti a energie pro případ proudění vzduchu a pak určete
- a)  $v'$ ;
  - b) výslednou teplotu  $T$ ,
  - c) výslednou tažnou sílu  $F$  (základní charakteristika reaktivního motoru).
- 40.5 ■ Posuďte přednosti vzduchového reaktivního motoru na základě výsledků předchozí úlohy, jestliže spotřebovává 100 kg vzduchu a 2,00 kg leteckého benzínu za sekundu. Výhřevnost paliva je asi  $4,65 \cdot 10^7$  J/kg. Jaké okolnosti mohou učinit váš odhad nespolehlivým?
- 40.6 ■ Maxwellův rozdělovací zákon má tvar  $\frac{dN}{N} = Av^2 e^{-bv^2}$ .  
Může být vyjádřen jako  $y = x^2 \exp(-x^2) dx$
- a) Nakreslete graf této funkce pro  $0 \leq x \leq 3,0$  a ukažte, že při růstu  $x$  hraje hlavní úlohu exponenciální člen.
  - b) Najděte maximum  $y$ .
- 40.7 ■ Podle barometrického vzorce platí  $n = n_0 e^{-mgh/kr}$ , kde  $kT/mg$  je charakteristický parametr úlohy. Vypočítejte tento parametr pro zemskou atmosféru a pro prostor v okolí Slunce, jestliže relativní molekulová hmotnost částic v okolí Země je 29,0 a v okolí Slunce 1,5, dále  $T_z = 300$  K,  $T_s = 5500$  K a  $g_z = 9,8$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ ,  $g_s = 270$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ .

# Brownův pohyb

## 41.1 EKVIPARTIČNOST ENERGIE

## 41.2 TEPELNÁ ROVNOVÁHA ZÁŘENÍ

## 41.3 EKVIPARTIČNOST A KVANTOVÝ OSCILÁTOR

## 41.4 NÁHODNÁ PROCHÁZKA

### 41.1 EKVIPARTIČNOST ENERGIE

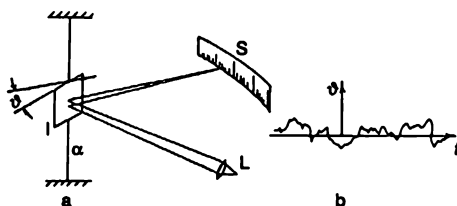
V roce 1827 objevil botanik Robert Brown Brownův pohyb. Při sledování mikroskopického života zpozoroval malé částice rostlinného pylu, jak poskakují v tekutině, kterou zkoumal. Byl dost moudrý, aby si uvědomil, že nejde o živé organizmy, ale o drobné částičky nečistoty pohybující se ve vodě. Aby dokázal, že opravdu nejde o živou hmotu, vzal starý kus křemene, v němž bylo zachyceno trochu vody. Ta tam byla uvězněna po milióny let, a přece v ní uviděl stejný pohyb. Pohled, který se nám naskytne, to je nepřetržitý rej drobných částíček.

Později se ukázalo, že jde o jeden z účinků *molekulárního pohybu*, který můžeme kvalitativně pochopit, představíme-li si obrovský mřč na hřišti plném lidí postrkujících ho v nejrozmanitějších směrech a my se na vše díváme z velké vzdálenosti. Lidi nemůžeme vidět, neboť jsou příliš daleko, ale vidíme mřč a pozorujeme, že se pohybuje zcela nepravidelně. Z pouček, o nichž jsme mluvili v předcházejících kapitolách, už víme, že střední kinetická energie malé částice vznášející se v kapalině nebo plynu je rovna  $3/2 kT$ , i když je tato částice mnohem těžší než molekula. Je-li velmi těžká, znamená to, že je relativně pomalá, ale ve skutečnosti její rychlost není příliš malá. Je-li střední kinetická energie takové částice  $3/2 kT$ , dostáváme v případě objektu s průměrem jednoho nebo dvou mikrometrů rychlost kolem milimetru za sekundu. Pozorování pohybu takové částice není snadné ani při použití mikroskopu, protože částice neustále mění směr svého pohybu, a tak se vlastně nikam nedostane. Kam se až dostane, o tom budeme mluvit na konci této kapitoly. Tento problém byl poprvé vyřešen Einsteinem na začátku dvacátého století.

Mimochodem, když říkáme, že střední kinetická energie částice je rovna  $3/2 kT$ , požadujeme odvození tohoto výsledku z kinetické teorie, tj. z Newtonových zákonů. Uvidíme, že z kinetické teorie můžeme odvodit ty nejrozmanitější a nejpozoruhodnější věci, a co je nejzajímavější, to vše získáme z tak mála. Tím samozřejmě nemyslíme, že Newtonovy zákony jsou „málo“ – samy o sobě jsou hluboké – ale máme na mysli že *nám* stačilo udělat málo. Jak se nám daří tak mnoho získat? Odpověď na tuto otázku spočívá v tom, že jsme soustavně vycházeli z jednoho důležitého předpokladu; je-li daný systém při určité teplotě v tepelné rovnováze, pak při této teplotě bude *s čímkoliv* v tepelné rovnováze. Například, když chceme zjistit, jak by se částice pohybovala, kdyby

se skutečně srážela s vodou, můžeme si představit, že máme plyn složený z částic jiného druhu, droboučkových kuliček, které (podle našeho předpokladu) neinteragují s vodou, ale jenom silně narážejí na uvažovanou částici. Předpokládejme, že z částice vyčnává osten a naše kuličky ho musí zasáhnout. O tomto představovaném plynu kuliček při teplotě  $T$  víme všechno – je to ideální plyn. Voda je složitá, ale ideální plyn je jednoduchý. *Naše částice musí být v rovnováze s plynem kuliček.* Střední pohyb částice musí být takový, jak to určují srážky s plynem. Kdyby se totiž částice nepohybovala správnou rychlostí vzhledem k vodě, ale byla by například rychlejší, znamenalo by to, že kuličky od ní získávají energii a stávají se teplejší než voda. Jenže my jsme začali při stejné teplotě a předpokládáme, že cokoliv se dostalo do rovnováhy, v rovnováze zůstane. Některé části se samovolně nestanou teplejší a jiné chladnější.

Tento předpoklad je správný a ze zákonů mechaniky ho lze dokázat, ale důkaz je příliš složitý a je možné ho provést jen použitím náročnějších partii mechaniky. Důkaz je mnohem snadnější v kvantové než v klasické mechanice. Poprvé ho provedl Boltzmann a my nyní budeme prostě předpokládat, že platí. Pak můžeme tvrdit, že naše částice musí mít energii  $3/2 kT$ , když se sráží s umělými kuličkami, a proto také musí mít energii  $3/2 kT$ , když naráží na vodu při stejné teplotě, takže můžeme kuličky vypustit a energie je  $3/2 kT$ . Je to divný, ale zcela správný způsob argumentace.



Obr. 41.1 a) citlivý zrcadlový galvanometr. Světlo ze zdroje  $L$  se odrazí od malého zrcátka na stupnici b) schématický záznam údaje na stupnici jako funkce času

Kromě pohybu koloidních částic, při němž byl Brownův pohyb objeven, existuje řada jiných jevů v laboratorních i jiných podmínkách, kdy můžeme Brownův pohyb pozorovat. Pokusíme-li se zkonstruovat to nejjemnější zařízení, například velmi malé zrcátko na tenkém křemenném vlákně velmi citlivého balistického galvanometru (obr. 41.1), zrcátko nebude stát na místě, ale bude se stále chvět, v každém okamžiku. Dopadne-li na něj světelný paprsek a budeme sledovat jeho odraz, nebudeme mít dokonalé zařízení, protože zrcátko bude stále v pohybu. Proč? Protože střední kinetická energie takového zrcátka je  $1/2 kT$ .

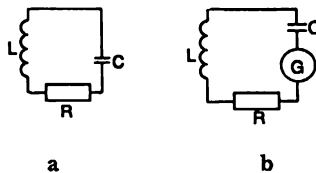
Jaký je střední kvadratický úhel, o nějž se zrcátko odchyluje? Předpokládejme, že jsme zjistili periodu vlastních kmitů zrcátka tím, že jsme klepli na jednu jeho stranu a zjistili, jak dlouho trvá pohyb vpřed a zpět, a známe také jeho moment setrvačnosti  $I$ . Známe vztah pro kinetickou energii rotace – vyjadřuje ho rovnice (19.8):  $T = 1/2 I \omega^2$ . Taková je kinetická energie, příslušná potenciální energie je úměrná druhé mocnině úhlu a je rovna  $V = 1/2 \alpha \vartheta^2$ . Známe-li periodu kmitů  $t_0$  a pomocí ní vypočítáme vlastní frekvenci  $\omega_0 = 2\pi/t_0$ , dostaneme potenciální energii  $V = 1/2 I \omega_0^2 \vartheta^2$ . Víme, že střední kinetická energie je  $1/2 kT$ , ale jde-li o harmonický oscilátor, střední potenciální energie je také  $1/2 kT$ . Proto

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 \langle \vartheta^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$$

neboli

$$\langle i^2 \rangle = \frac{kT}{L\omega_0^2}. \quad (41.1)$$

Tak můžeme vypočítat kmity zrcátka galvanometru a najít hranice přesnosti našeho zařízení. Chceme-li zmenšit kmity, musíme zrcátko ochladit. Můžeme položit zajímavou otázku: *Kde je třeba zrcátko ochladit?* Závisí to na tom, odkud přijímá nárazy. Jestliže od vlákna, ochladíme ho nahoře. Je-li zrcátko obklopeno plynem a do pohybu se dostává hlavně v důsledku srážek s atomy plynu, je lépe ochladit plyn. Ukazuje se, že zdroj *tlumení* kmitů je vždy i *zdrojem fluktuací* a k tomuto problému se ještě vrátíme.



Obr. 41.2 Rezonanční obvod s velkou hodnotou  $Q$ .

a) skutečný obvod při teplotě  $T$

b) umělý obvod s ideálním bezšumovým odporem a „generátor šumu“  $G$

Dost překvapuje, že tytéž fluktuace působí i v *elektrických obvodech*. Předpokládejme, že stavíme velmi citlivý, přesný zesilovač na určitou frekvenci, a aby byl velmi citlivý na zvolenou frekvenci, používáme na jeho vstupu, podobně jako v radiopřijímači, velmi kvalitní rezonanční obvod (obr. 41.2). Předpokládejme, že se chceme dostat až úplně na dolní hranici citlivosti zařízení, a tak snímáme napětí například z indukčnosti a podáváme ho na zesilovač. V každém takovém obvodu existují, samozřejmě, určité ztráty. Není to dokonalý rezonanční obvod, ale je to přece jen velmi dobrý rezonanční obvod, který má jenom malý odpor (v schématu je zakreslen rezistor, předpokládáme, že má malý odpor). Chtěli bychom zjistit, jaké jsou fluktuace změn napětí na indukčnosti. Odpověď na takovou otázku je následující. Víme, že  $1/2 L\dot{I}^2$  je „kinetická energie“ – energie, kterou má cívka v rezonančním obvodu (kapitola 25). Proto je střední hodnota  $1/2 L\dot{I}^2$  rovna  $1/2 kT$ . Tak zjistíme střední kvadratickou hodnotu proudu a z ní můžeme určit střední kvadratickou hodnotu napětí. Vztah pro napětí na indukčnosti je totiž  $\dot{U}_L = i\omega L\dot{I}$  a střední kvadratická absolutní hodnota napětí na indukčnosti je  $\langle U_L^2 \rangle = L^2 \omega_0^2 \langle I^2 \rangle$ . Po dosazení do  $1/2 L \langle I^2 \rangle = 1/2 kT$  dostaneme

$$\langle U_L^2 \rangle = L \omega_0^2 kT. \quad (41.2)$$

Tak můžeme navrhovat obvody a předpovídat, jaký budou mít *Johnsonův šum*, tj. šum podmíněný tepelnými fluktuacemi. Odkud se nyní vzaly fluktuace? Pocházejí opět z *rezistorů* – jsou důsledkem skutečnosti, že elektrony odporového materiálu se chaoticky pohybují, protože jsou v tepelné rovnováze s látkou rezistoru, a tak vznikají fluktuace elektronové hustoty. Tak vznikají nepatrná elektrická pole, která působí na rezonanční obvod.

Elektrotechničtí inženýři odpovídají na takovou otázku jiným způsobem. Z fyzikálního hlediska je zdrojem šumu rezistor. Skutečný obvod se skutečným fyzikálním rezistorem, který vytváří šum, však můžeme nahradit fiktivním obvodem, který obsahuje malý generátor a ten

*představuje zdroj šumu. Rezistor bude potom ideální – nebude produkovat šum. Všechn šum pochází z fiktivního generátoru. Kdybychom znali charakteristiky šumu produkovaného rezistorem, a kdybychom je uměli analyticky vyjádřit, mohli bychom vypočítat, jak bude obvod na tento šum reagovat. Potřebujeme tedy znát vztah pro šumové fluktuace.*

Šum generovaný rezistorem obsahuje všechny frekvence, protože samotný rezistor není rezonanční. Samozřejmě, že rezonanční obvod „slyší“ jen tu část fluktuací, která je blízko rezonanční frekvence, ale rezistor má i mnoho jiných frekvencí. Sílu generátoru můžeme popsat takto: Střední výkon, který by rezistor absorboval, kdyby byl přímo připojen na generátor šumu, by byl  $\langle U_G^2 \rangle / R$ , kde  $U_G$  je napětí generátoru. Chtěli bychom však podrobněji znát, jaký výkon připadá na jednotlivé frekvence. Na každou frekvenci připadá jen velmi malý výkon; jde o rozdělení. Nechť  $P(\omega) d\omega$  je výkon, který generátor dodává ve frekvenčním rozsahu  $d\omega$  téměř rezistoru. Pak můžeme dokázat (dokážeme to v jiném případě, ale stejným matematickým postupem), že dodávaný výkon je

$$P(\omega) d\omega = (2/\pi) kT d\omega, \quad (41.3)$$

a v tomto vyjádření *tedy nezávisí na odporu.*

## 41.2 TEPELNÁ ROVNOVÁHA ZÁŘENÍ

Nyní se budeme zabývat složitější, ale velmi zajímavou situací. Předpokládejme, že máme nabitý oscilátor podobný tomu, o němž jsme mluvili při zkoumání světla, řekněme, elektron kmitající v atomu. Když kmitá, vyzařuje světlo. Předpokládejme, že tento oscilátor se nachází ve velmi řídkém plynu jiných atomů a čas od času se s nimi srazí. V rovnováze, po delší době, tento oscilátor shromáždí energii tak, že kinetická energie jeho kmitů bude  $1/2 kT$ , a protože jde o harmonický oscilátor, jeho celková energie pohybu bude  $kT$ . Samozřejmě, zatím je to špatný popis, protože oscilátor nese *elektrický náboj*, a má-li energii  $kT$ , kmitá sem tam a *vyzařuje světlo*. Proto je nemožné dosáhnout rovnováhy jen v látce, jsou-li v ní atomy vyzařující světlo. Je-li vyzařováno světlo, uniká energie, oscilátor v průběhu času ztrácí svou energii  $kT$  a plyn, který s oscilátorem interaguje, postupně chladne. Takovým způsobem chladnou i horká kamna za studené noci. Do okolí vyzařují energii, protože v atomech kmitají náboje, spojitě vyzařují a v důsledku tohoto vyzařování kmitavý pohyb pomalu slábne.

Obklopte-li však uvažovaný systém jakousi krabicí, takže světlo záření nemůže uniknout do nekonečna, *můžeme* nakonec dosáhnout tepelné rovnováhy. Plyn můžeme umístit v nádobě, v jejíž stěnách jsou jiné zářiče vysílající světlo nazpět nebo, co je ještě hezčí příklad, můžeme předpokládat, že nádoba má zrcadlové stěny. Bude jednodušší uvažovat právě tento případ. Předpokládáme tedy, že všechno záření oscilátoru se uchovává v nádobě. I v takovém případě začne oscilátor kmitat, ale brzy si bude udržovat hodnotu  $kT$  své kinetické energie přestože vyzařuje. Je vlastně ozařován svým vlastním světlem odraženým od stěn nádoby. Za krátkou dobu bude v nádobě hodné světla, a i když oscilátor určité světlo vyzařuje, světlo přichází zpět a vrací část energie, která byla vyzářena.

Nyní určíme, kolik světla musí být v takové nádobě při teplotě  $T$ , aby dopad světla na oscilátor vytvářel právě takovou energii, jaká je potřebná k udržení záření.

Nechť je atomů plynu velmi málo a ať jsou od sebe velmi vzdálené, takže máme ideální oscilátor, který nemá žádný jiný odpor, než radiační. Všimněme si, že v tepelné rovnováze dělá oscilátor současně dvě věci. Za prvé – má střední energii  $kT$ , a tak můžeme vypočítat, kolik záření

emituje. Za druhé – množství tohoto záření musí být přesně stejné jako množství světla, které oscilátor za dopadajícího světla rozptyluje. Když energie nemůže zmizet nikam jinam, toto efektivní záření je skutečně všechno rozptýlené světlo v nádobě.

Nejdříve tedy počítáme energii, kterou oscilátor vyzáří za sekundu, pokud nějakou energii má. (Z kapitoly 32 „O radiačním odporu“ si vypůjčíme některé rovnice aniž bychom se vraceli k jejich odvození.) Poměr energie vyzářené za sekundu a energie oscilátoru se označuje  $1/Q$  (viz (32.8):  $1/Q = (dW/dt)/\omega_0 W$ . Použitím veličiny  $\gamma$ , konstanty útlumu, můžeme tedy psát vztah ve tvaru  $1/Q = \gamma/\omega_0$ , kde  $\omega_0$  je vlastní frekvence oscilátoru. Předpokládáme, že  $\gamma$  je velmi malé a  $Q$  velmi velké. Energie vyzářená za sekundu je pak

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\omega_0 W}{Q} = \frac{\omega_0 W \gamma}{\omega_0} = W \gamma. \quad (41.4)$$

Energie vyzářená za sekundu je prostě  $\gamma$ -násobek energie oscilátoru. Oscilátor má však mít střední energii  $kT$ , takže  $\gamma kT$  je střední hodnota energie vyzářené za sekundu

$$\langle dW/dt \rangle = \gamma kT. \quad (41.5)$$

Nyní už potřebujeme vědět pouze to, jaké je  $\gamma$ . Tuto veličinu můžeme snadno najít z rovnice (32.12). Je rovna

$$\gamma = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2}{c}, \quad (41.6)$$

kde  $r_0 = e^2/mc^2$  je klasický poloměr elektronu a položili jsme  $\lambda = 2\pi c/\omega_0$ .

Náš konečný výsledek pro střední rychlost vyzařování světla v blízkosti frekvence  $\omega_0$  je tento

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2 kT}{c}. \quad (41.7)$$

Dále se budeme ptát, kolik světla musí dopadat na oscilátor. Musí ho být tolik, aby oscilátorem absorbovaná energie (která je pak rozptýlena) byla rovna uvedené veličině. Jinak řečeno: emitované světlo je rozptýlené světlo ze světla, které svítí na oscilátor v dutině. Proto nyní musíme vypočítat, kolik světla oscilátor rozptýlí, dopadá-li na něj určité neznámé množství záření. Budiž  $I(\omega)d\omega$  energie světla s frekvencí  $\omega$  z intervalu  $d\omega$  (protože nemáme světlo, jež by mělo přesně danou frekvenci; vždy máme určité spektrum).  $I(\omega)$  je určité *spektrální rozdělení*, které budeme hledat – je to barva pece při teplotě  $T$ , kterou vidíme, díváme-li se otevřenými dvířky dovnitř. Ptáme se, kolik světla se absorbovalo. Už jsme určili množství záření absorbovaného z daného dopadajícího světelného svazku a vyjádřili jsme ho pomocí *účinného průřezu*. Odpovídá to tomu, jako bychom řekli, že všechno světlo dopadající na určitý průřez je absorbováno. Proto celkové množství, které je opětovně vyzářeno (rozptýleno) je součinem dopadající intenzity  $I(\omega)d\omega$  a účinného průřezu  $\sigma$ .

Náš vztah pro účinný průřez (rovnice (31.19)) neobsahoval tlumení. Nebude těžké zopakovat odvození a započítat předtím zanedbaný člen odpovídající odporu. Kdybychom to udělali, dostali bychom pro účinný průřez vyjádření



$$\sigma_s = \frac{8 \pi r_0^2}{3} \left( \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right). \quad (41.8)$$

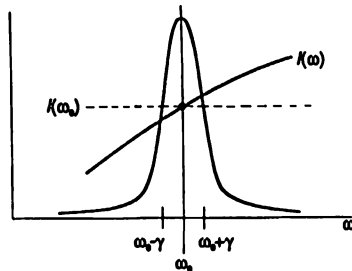
Účinný průřez  $\sigma_s$  má významnou hodnotu jako funkce frekvence jen pro  $\omega$  velmi blízké vlastní frekvenci  $\omega_0$ . (Vzpomeňme si, že v případě vyzařujícího oscilátoru je  $Q$  řádově  $10^8$ .) Oscilátor rozptyluje velmi silně, když je  $\omega$  rovno  $\omega_0$  a velmi slabě při jiných hodnotách  $\omega$ . Proto můžeme nahradit  $\omega$  veličinou  $\omega_0$  a  $\omega^2 - \omega_0^2$  veličinou  $2\omega_0(\omega - \omega_0)$ . Tak dostaneme

$$\sigma_s = \frac{2 \pi r_0^2 \omega_0^2}{3 [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.9)$$

Celá křivka je soustředěna v okolí  $\omega = \omega_0$ . (Není nevyhnutné dělat aproximace, ale výpočet integrálů bude mnohem jednodušší, když si rovnici trochu zjednodušíme.) Násobíme-li intenzitu v daném frekvenčním rozsahu účinným průřezem rozptylu, dostaneme množství energie rozptýlené v intervalu  $d\omega$ . Celková rozptýlená energie je pak integrálem tohoto výrazu přes všechna  $\omega$ . Tak dostaneme

$$\frac{dW_s}{dt} = \int_0^\infty I(\omega) \sigma_s(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{2 \pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega) d\omega}{3 [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.10)$$

Položme nyní  $dW_s/dt = 3\gamma kT$ . Proč je tam koeficient 3? Protože při naší analýze účinného průřezu v kapitole 32 jsme předpokládali takovou polarizaci světla, která umožňovala rozkmitání oscilátoru. Kdybychom použili oscilátor schopný kmitat jen v jednom směru a světlo by bylo nesprávně polarizované, nedošlo by k rozptylu. Musíme proto buď zprůměrovat účinný průřez oscilátoru schopného kmitat pouze v jednom směru přes všechny směry dopadu a polarizace světla, nebo – a to je jednodušší – představit si oscilátor, který bude sledovat pole bez ohledu na to, jakým směrem je orientováno. Takový oscilátor, který může stejně kmitat ve třech směrech, bude mít střední energii  $3kT$ , protože má tři stupně volnosti. Proto máme tedy  $3\gamma kT$ .



Obr. 41.3 Průběh podintegrální funkce (41.10). Rezonanční křivka má strmý průběh. V blízkosti rezonance můžeme  $I(\omega)$  nahradit  $I(\omega_0)$ .

Nyní musíme vypočítat integrál. Předpokládejme, že neznámé spektrální rozdělení světla  $I(\omega)$  je hladkou křivkou a ve velmi úzké frekvenční oblasti, kde má  $\sigma_s$  ostré maximum, se příliš nemění (obr. 41.3). Potom výrazný příspěvek k integrálu bude pocházet jen od těch hodnot  $\omega$ ,

## TEPELNÁ ROVNOVÁHA ZÁŘENÍ

kteřé jsou velmi blízke  $\omega_0$  a od této hodnoty se liší jen o velmi malou veličinu  $\gamma$ . I kdyby  $I(\omega)$  byla neznámá a složitá funkce, bude důležitá pouze oblast blízko  $\omega = \omega_0$  a tam můžeme hladkou křivku nahradit „konstantou“ o stejné výšce. Jinak řečeno, prostě vytkneme  $I(\omega)$  před znak integrálu a nahradíme  $I(\omega_0)$ . I ostatní konstanty můžeme dát před integrál a tak dostaneme

$$\frac{2}{3} \pi \tau_0^2 \omega_0^2 I(\omega_0) \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} = 3 \gamma kT. \quad (41.11)$$

Integrál by se měl brát od 0 do  $\infty$ , ale 0 je už tak daleko od  $(\omega_0)$ , že křivka je tam nulová, a proto můžeme dolní mez nahradit minus  $\infty$  a takový integrál se počítá mnohem snadněji. Integrál je typu  $\int dx/(x^2 + a^2)$  a vede na funkci arcustangens. V příručce bychom našli, že je roven  $\pi/a$  našem případě tedy  $2\pi/\gamma$ . Po určitých úpravách bychom dostali

$$I(\omega_0) = \frac{9 \gamma^2 kT}{4 \pi^2 \tau_0^2 \omega_0^2}. \quad (41.12)$$

Pak dosadíme místo  $\gamma$  vzorec (41.6) (pro stručnost vynecháme označení  $\omega_0$ , protože výraz platí pro jakékoliv  $\omega_0$ , a napíšeme prostě  $\omega$ ) a vztah pro  $I(\omega)$  má tvar

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^2}. \quad (41.13)$$

Tento vztah nám určuje rozdělení světla v horké peci. Říká se mu *záření černého tělesa*. Černého proto, protože otvor v peci, do něhož hledíme, by byl při nulové teplotě černý.

Vztah (41.13) udává rozložení energie záření uvnitř uzavřené nádoby při teplotě  $T$  podle klasické teorie. Všimněme si nejdřív pozoruhodného charakteru tohoto výrazu. Náboj oscilátoru, hmotnost oscilátoru, všechny jeho charakteristické vlastnosti *vytizely*, protože když jsme se dosáhli rovnováhy s jedním oscilátorem, musíme být v rovnováze s jakýmkoliv jiným oscilátorem s jinou hmotností, jinak bychom se dostali do těžkostí. To je důležitý způsob ověření předpokladu, že rovnováha nezávisí na tom, s čím jsme v rovnováze, ale závisí *jen na teplotě*. Nakreslíme si teď obrázek znázorňující křivku  $I(\omega)$  (*obr. 41.4*). Z něj se dozvíme, kolik světla připadá na jednotlivé frekvence.

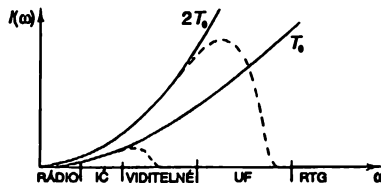
Intenzita v nádobě připadající na jednotkový frekvenční interval se chová jako druhá mocnina frekvence. To znamená, že při libovolné teplotě by z nádoby vycházelo velké množství rentgenového záření!

To, samozřejmě, není pravda. Když otevřeme pec a podíváme se do ní, rentgenové záření nám oči nespálí. Je to tedy nesmysl. Navíc, *celková energie* v nádobě, celková intenzita sčítaná přes všechny frekvence, by měla být rovna obsahu plochy pod touto nekonečnou křivkou. V samotné podstatě musí být proto něco naprosto špatně.

Klasická teorie byla proto *úplně neschopná* správně vyjádřit rozložení záření černého tělesa, právě tak jako byla neschopna správně vyjádřit měrnou tepelnou kapacitu plynů. Fyzikové zkoumali toto odvození z mnoha různých hledisek, ale nenacházeli východisko. Je to předpověď klasické fyziky. Vztah (41.13) se nazývá *Rayleighův zákon*, je předpovědí klasické fyziky a je zřejmě absurdní.

### 41.3 EKVIPARTIČNOST A KVANTOVÝ OSCILÁTOR

Uvedená těžkost je jen další část téhož problému klasické fyziky, který se projevil obtížemi souvisejícími s měrnou tepelnou kapacitou plynů a teď se soustředil na rozložení světla v černém tělese. Zatímco teoretici studovali tento problém, bylo provedeno mnoho měření skutečné křivky. Ukázalo se, že správná křivka vypadá tak jako přerušované čáry na obr. 41.4. Tedy žádné rentgenové paprsky. Kdybychom snižovali teplotu, křivka by se snižovala úměrně s teplotou podle klasické teorie, ale měřená křivka se také při nízké teplotě dříve odřízne. Nízkofrekvenční konec teoretické křivky je správný, ale vysokofrekvenční ne. Z jakých důvodů? Když se James Jeans zabýval problémem měrné tepelné kapacity plynů, všiml si, že pohyb s vysokými frekvencemi „zamrzá“ při snižování teploty. Když je teplota příliš nízká a frekvence příliš vysoká, oscilátory *nemají* střední hodnotu energie  $kT$ . Připomeňme si, jak jsme odvodili vztah (41.13). Vše záviselo na energii oscilátoru v tepelné rovnováze. To  $kT$ , které jsme dosadili do (41.5), bylo stejné jako  $kT$  v (41.13), neboli střední energie harmonického oscilátoru s frekvencí  $\omega$  při teplotě  $T$ . V klasické fyzice to je  $kT$ , ale experiment říká něco jiného: při příliš nízkých teplotách nebo při příliš vysokých frekvencích oscilátoru taková závislost neplatí. Důvod pro teoretická křivka nevyhovuje je tedy stejný jako příčina selhání staré teorie měrné tepelné kapacity plynů. Je jednodušší zkoumat křivku záření černého tělesa, než měrné tepelné kapacity plynů, která je příliš složitá. Soustředíme se tedy na určení správné křivky záření černého tělesa, protože z ní se dovíme, jak střední energie harmonického oscilátoru při libovolné frekvenci ve skutečnosti závisí na teplotě.



Obr. 41.4 Rozdělení intenzity záření černého tělesa při dvou teplotách podle klasické fyziky (plné čáry). Přerušované čáry znázorňují skutečné rozdělení.

Zkoumáním této křivky se zabýval Planck. Nejdříve našel řešení empiricky tak, že srovnáním naměřené závislosti a známých funkcí vybral takovou, která výborně vystihovala takovou závislost. Našel tedy empirický vztah pro střední energii oscilátoru jako funkci frekvence. Jinými slovy, získal *správný* vztah místo  $kT$  a pak se mu podařilo tento vztah i odvodit za velice zvláštního předpokladu. Tento předpoklad spočíval v tom, že *harmonický oscilátor může nabývat energii jen v množstvích  $\hbar\omega$* . Představa, že může mít *jakoukoliv* energii, je nesprávná. To byl, samozřejmě, začátek konce klasické mechaniky.

Nyní odvodíme vztah, k němuž se dospělo jako k první správné kvantověmechanické formuli. Předpokládejme, že dovolené energetické hladiny harmonického oscilátoru jsou rovnoměrně rozloženy tak, že sousedící jsou od sebe vzdálené o  $\hbar\omega_0$ , a oscilátor může tedy nabývat energie jen některé z těchto hladin (obr. 41.5). Planck sice použil složitější zdůvodnění než my, protože kvantová mechanika byla ve svých počátcích a musel některé věci dokázat. My prostě přijmeme jako fakt (který Planck na tomto případě demonstroval), že pravděpodobnost obsazení hladiny s energií  $E$  je  $P(E) = \alpha e^{-E/kT}$ . Budeme-li vycházet z této skutečnosti, dospějeme k správnému

výsledku.

$$\begin{array}{l}
 \frac{N_4}{\text{---}} \quad E_4=4\hbar\omega \quad P_4=A\exp(-4\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_3}{\text{---}} \quad E_3=3\hbar\omega \quad P_3=A\exp(-3\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_2}{\text{---}} \quad E_2=2\hbar\omega \quad P_2=A\exp(-2\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_1}{\text{---}} \quad E_1=\hbar\omega \quad P_1=A\exp(-\hbar\omega/kT) \\
 \frac{N_0}{\text{---}} \quad E_0=0 \quad P_0=A
 \end{array}$$

Obr. 41.5 Energetické hladiny harmonického oscilátoru jsou ekvidistantní:  $E_n = n\hbar\omega$

Předpokládejme, že máme mnoho oscilátorů a každý z nich kmitá s frekvencí  $\omega_0$ . Některé z nich jsou v nejnižším kvantovém stavu, jiné jsou na následující hladině atd. Nás zajímá střední energie těchto oscilátorů. Najdeme ji tak, že spočítáme celkovou energii všech oscilátorů a vydělíme ji počtem oscilátorů. Tak dostaneme střední energii na oscilátor v tepelné rovnováze a je to také energie, která je v rovnováze se zářením černého tělesa. Tu je třeba dosadit do rovnice (41.13) místo  $kT$ . Nechť  $N_0$  je počet oscilátorů, které jsou v základním stavu (nejnižším energetickém stavu);  $N_1$  je počet oscilátorů ve stavu  $N_1$ ,  $N_2$  je počet oscilátorů ve stavu  $N_2$  atd. Podle hypotézy (kterou jsme neověřili), nahradíme klasické výrazy pro pravděpodobnosti  $e^{-P.E/kT}$  nebo  $e^{-K.E/kT}$  v kvantové mechanice výrazem  $e^{-\Delta E/kT}$ , kde  $\Delta E$  je přebytek energie. Proto můžeme předpokládat, že počet oscilátorů  $N_1$ , které jsou v prvním stavu, bude roven  $e^{-\hbar\omega/kT}$  krát počet oscilátorů  $N_0$ , které jsou v základním stavu, tj.  $N_1 = N_0 e^{-\hbar\omega/kT}$ . Podobně  $N_2$ , počet oscilátorů v druhém stavu, je roven  $N_2 = N_0 e^{-2\hbar\omega/kT}$ . Pro zjednodušení algebry zavedeme  $x = e^{-\hbar\omega/kT}$ . Pak lze počet oscilátorů jednoduše vyjádřit:  $N_1 = N_0 x$ ,  $N_2 = N_0 x^2$ , ...  $N_n = N_0 x^n$ .

Nejdříve musíme najít celkovou energii všech oscilátorů. V základním stavu má oscilátor nulovou energii. V prvním stavu je jeho energie  $\hbar\omega$  a takových oscilátorů je  $N_1$ . Z těchto oscilátorů můžeme tedy získat  $N_1 \hbar\omega$  nebo  $\hbar\omega N_0 x$  energie. V druhém stavu mají oscilátory energii  $2\hbar\omega$  a je jich  $N_2$ , proto dostáváme energii  $N_2 \cdot 2\hbar\omega = 2\hbar\omega N_0 x^2$  atd. Když to všechno sečteme, dostaneme  $E_{\text{celk}} = N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)$ .

Kolik je tam oscilátorů?  $N_0$  je, samozřejmě, počet oscilátorů v základním stavu,  $N_1$  v prvním stavu atd. Když je všechno sečteme dostaneme  $N_{\text{celk}} = N_0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$ . Pro střední energii proto platí

$$\langle E \rangle = \frac{E_{\text{celk}}}{N_{\text{celk}}} = \frac{N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{N_0 (1 + x + x^2 + \dots)} \quad (41.14)$$

Potěšení pohrát si s takovými dvěma součty ponecháme čtenáři. Kdybychom vše sečetli a za  $x$  dosadili odpovídající výraz – a nedopustili se žádné chyby při sčítání – dostali bychom

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (41.15)$$

To byl vlastně první kvantověmechanický vztah, který byl znám a diskutován, a představoval krásné vyústění celých desetiletí zmatků. Maxwell věděl, že něco není v pořádku a problém byl v tom, že se nevědělo, co je vlastně *správné*. Tady je kvantitativní odpověď na otázku, co je třeba

vzít místo  $kT$ . Samozřejmě by tento výraz měl konvergovat ke  $kT$ , když  $\omega \rightarrow 0$  nebo  $T \rightarrow \infty$ . Zkuste to dokázat – procvičte se tak v matematice.

Výraz pro střední energii představuje slavný odřezávající faktor, po kterém pátral Jeans a dosadíme-li ho místo  $kT$  do vztahu (41.13), pro rozdělení světla v černé skřínce dostaneme vyjádření

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (41.16)$$

Je vidět, že i přestože máme v čitateli  $\omega^3$ , bude při velkých  $\omega$  křivka opět klesat a nevyskočí nahoru, neboť ve jmenovateli bude exponenciální funkce obsahovat velmi velký exponent – a proto se ultrafialové světlo a rentgenové paprsky neobjeví tam, kde je neočekáváme!

Mohli byste namítnout, že při odvození (41.16) jsme použili kvantovou teorii pro energetické hladiny harmonického oscilátoru, ale klasickou teorii pro určení účinného průřezu  $\sigma_e$ . Jenže kvantová teorie světla interagujícího s harmonickým oscilátorem dává přesně stejný výsledek jako klasická teorie. Proto jsme si mohli dovolit věnovat tolik času určování indexu lomu a rozptylu světla a modelovat přitom atomy malými oscilátory – kvantové výrazy vycházejí v podstatě stejně.

Vraťme se nyní k Johnsonovu šumu rezistorů. Už jsme se zmínili, že teorie šumu je ve skutečnosti stejná jako klasická teorie záření černého tělesa. Dokonce jsme s trochou humoru poznamenali, že když odpor v obvodu není skutečným odporem, ale anténou (anténa se chová jako odpor, neboť vyzařuje energii), radičním odporem, lze snadno vypočítat vyzařovaný výkon. Je to ten výkon, který anténa dostává od světla, jež ji obklopuje a měli bychom dospět ke stejnému rozdělení až na jeden či dva faktory. Můžeme předpokládat, že rezistor je generátor s neznámým spektrem výkonu  $P(\omega)$ . Spektrum je dáno skutečností, že tento generátor připojený k rezonančnímu obvodu *libovolné frekvence*, jako na obr. 41.2b, generuje v indukčnosti napětí, jehož velikost je dána rovnicí (41.2). To nás přivádí ke stejnému integrálu jako v (41.10) a stejný postup vede k rovnici (41.3). Samozřejmě v případě nízkých teplot musíme nahradit  $kT$  v (41.3) výrazem (41.15). Tyto dvě teorie (záření černého tělesa a Johnsonův šum) i fyzikálně úzce souvisí, protože rezonanční obvod můžeme připojit k *anténě*, takže odpor  $R$  je pak čistým *radičním odporem*. Protože (41.2) nezávisí na fyzikálním původu odporu, bude generátor  $G$  stejný pro skutečný odpor jako pro radiční odpor. Co je zdrojem generovaného výkonu  $P(\omega)$ , je-li odporem  $R$  jen ideální anténa v rovnováze s jejím okolím při teplotě  $T$ ? Je to záření  $I(\omega)$  v prostoru při teplotě  $T$ , jež dopadá na anténu a jako „přijatý signál“ vytváří efektivní generátor. Proto, postupujeme-li od (41.13) k (41.3), můžeme odvodit přímý vztah mezi  $P(\omega)$  a  $I(\omega)$ .

Vše, o čem jsme mluvili – Johnsonův šum a Planckovo rozdělení – a také správná teorie Brownova pohybu, jsou výsledky získané přibližně během prvního desetiletí 20. století. Se získanými poznatky a znalostí historického pozadí se vrátíme k Brownovu pohybu.

#### 41.4 NÁHODNÁ PROCHÁZKA

Zkoumejme, jak se mění s časem poloha chaoticky se pohybující částice, zajímáme-li se o dobu, jež jsou velmi velké ve srovnání s dobou mezi nárazy. Uvažujme malou částici Brownova pohybu, která poskakuje, protože je bombardována ze všech stran nepravidelně narážejícími molekulami vody. Ptáme se: Jak daleko od počáteční polohy se dostane částice za určitou dobu? Tento problém vyřešili Einstein a Smoluchovski. Představíme-li si čas rozdělený na malé intervaly, například setiny sekundy, dostane se částice po první setině sekundy na určité místo, v další

setině se dostane o kus dál, v další setině zase jinam atd. Vzhledem k frekvenci, jakou je částice bombardována, představuje setina sekundy velmi dlouhou dobu. Čtenář si může snadno ověřit, že počet srážek, kterých se zúčastní jedna molekula vody za sekundu, je kolem  $10^{14}$ , takže za setinu sekundy je to  $10^{12}$  srážek, a to je velmi mnoho! Proto si po setině sekundy částice nepamatuje, co se s ní dělo předtím. Jinými slovy, srážky jsou *náhodné*, takže „krok“ částice nezávisí na předcházejícím „kroku“. Podobá se to známému problému opilého námořníka, který vychází z hospody a udělá řadu kroků, jenže každý krok je náhodný, námořník volí kroky v libovolném úhlu (obr. 41.6). Klademe si otázku: Kam se dostane námořník po dlouhé době? To samozřejmě nevíme! Na tuto otázku nemůžeme odpovědět. Můžeme říci jen tolik, že se kamsi více méně náhodně dostal. Kam se tedy dostal aspoň v průměru? *Jaká je střední vzdálenost od hospody, kam námořník došel?* Na tuto otázku jsme však už odpověděli, neboť jsme zkoumali superpozici světla přicházejícího od množství rozličných zdrojů s různými fázemi a museli jsme sčítat velké množství šipek v rozmanitých směrech (kapitola 32). Tehdy jsme zjistili, že střední hodnota druhé mocniny vzdálenosti mezi konci řetězce náhodných kroků (představující intenzitu světla) je rovna součtu intenzit jednotlivých příspěvků. Použijeme-li tedy stejnou matematiku, můžeme ihned dokázat, že střední kvadratická vzdálenost od počátku je úměrná počtu kroků. Je-li  $R_N$  vektor vzdálenosti od počátku po  $N$  krocích, pak  $\langle R_N^2 \rangle = NL^2$ , kde  $L$  je délka každého kroku. Je-li počet kroků v našem problému úměrný času, je *střední kvadratická vzdálenost úměrná času*

$$\langle R^2 \rangle = \alpha t. \tag{41.17}$$

To neznamenaá, že *střední vzdálenost* je úměrná času. Kdyby byla střední vzdálenost úměrná času, znamenalo by to, že pohyb probíhá pěkně ustálenou rychlostí. Námořník sice postupuje dopředu, ale jen tak, že jeho *kvadratická vzdálenost* je úměrná času. To je charakteristický rys náhodné procházky.



Obr. 41.6 Náhodná procházka 36 kroků délky  $L$ . Jak je daleko  $S_{36}$  od  $B$ ? Odpověď: v průměru asi o 6  $L$

Lze snadno ukázat, že každý krok zvětšuje střední kvadratickou vzdálenost v průměru o  $L^2$ . Když totiž zapíšeme  $R_N = R_{N-1} + L$ , zjistíme, že pro  $R_N$  platí

$$R_N \cdot R_N = R_N^2 = R_{N-1}^2 + 2 R_{N-1} \cdot L + L^2,$$

a průměrováním přes mnoho pokusů dostaneme  $\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + L^2$ , protože  $\langle R_{N-1} \cdot L \rangle = 0$ . Indukcí získáme výsledek

$$R_N^2 = NL^2. \tag{41.18}$$

Teď bychom měli vypočítat koeficient  $\alpha$  v (41.17), ale dříve než k tomu přistoupíme, musíme si ještě něco připomenout. Budeme předpokládat, že bude-li na částici působit síla, částice bude reagovat následujícím způsobem (tato síla nesouvisí s Brownovým pohybem – zatím se zabýváme vedlejším problémem). Především se projeví setrvačnost. Nechť  $m$  je koeficient setrvačnosti,

efektivní hmotnost objektu (nemusí to být skutečná hmotnost skutečné částice, neboť při pohybu částice vodou se bude pohybovat i voda v okolí částice). Mluvíme-li tedy o pohybu částice v jednom směru, máme na jedné straně rovnice výraz typu  $m(d^2 x/dt^2)$ . Dále budeme předpokládat, že při působení stálého tahu na objekt bude objekt brzděn kapalinou a toto brzdění bude úměrné rychlosti objektu. Kromě setrvačnosti kapaliny je zde ještě odpor proti proudění vyvolaný viskozitou a složitostí kapaliny. Pro vznik fluktuací je bezpodmínečně nutná *existence nevratných ztrát*, něčeho, co se podobá odporu. Bez takových ztrát není možné získat  $kT$ . Příčina fluktuací velmi těsně souvisí s těmito ztrátami. Později uvidíme, jaký je mechanismus tohoto brzdění, až budeme mluvit o silách úměrných rychlosti, a o tom, odkud pocházejí. Nyní však předpokládejme, že takový odpor existuje. Potom vztah vyjadřující pohyb pod vlivem vnější síly, působící na částici obvyklým způsobem, vypadá takto:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{ext}. \quad (41.19)$$

Veličinu  $\mu$  můžeme určit přímo z experimentu. Můžeme například pozorovat pád kapky pod vlivem gravitace. Tehdy víme, že síla je  $mg$  a  $\mu$  je  $mg$  dělené rychlostí, které padající kapka nakonec dosáhne. Případně bychom mohli dát kapku do odstředivky a pozorovat rychlost sedimentace. Je-li kapka nabitá, mohli bychom na ni aplikovat elektrické pole. Veličina  $\mu$  je tedy měřitelná veličina, ne jen něco umělého a je známá pro mnoho druhů koloidních částic.

Použijme stejný vztah i v případě, kdy síla není vnější, ale je rovna nepravidelným silám Browanova pohybu. Místo toho, abychom uvažovali vzdálenosti v třírozměrném prostoru, budeme se zajímat pouze o jeden rozměr a abychom se připravili na řešení úlohy, hledejme střední hodnotu  $x^2$ . (Je zřejmé, že střední hodnota  $x^2$  je stejná jako střední hodnota  $y^2$  a střední hodnota  $z^2$ , a proto střední kvadratická vzdálenost je trojnásobek toho, co budeme počítat). Je jasné, že  $x$ -ová složka nepravidelných sil je právě tak nepravidelná jako kterákoliv jiná složka. Jaká je rychlost změny  $x^2$ ? Platí  $d(x^2)/dt = 2x(dx/dt)$ , a tak musíme hledat střední hodnotu součinu polohy a rychlosti. Ukážeme, že je konstantní, a proto bude střední kvadratický poloměr narůstat úměrně s časem. Určíme rychlost nárůstu. Vynásobíme-li rovnici (41.19)  $x$ , získáme  $m x(d^2 x/dt^2) + \mu x(dx/dt) = x F_x$ . Potřebujeme znát časový průměr  $x(dx/dt)$ , a proto zprůměrujeme celou rovnici a budeme zkoumat její tři členy. Co můžeme říci o součinu  $x$  a síly? Když se částice dostala do určité vzdálenosti  $x$ , pak následující impuls může být v libovolném směru vzhledem k  $x$ , neboť působící síla je zcela nahodilá a nerozezná, odkud částice vyšla. Když bude  $x$  kladné, není důvod, proč by střední síla měla být v tomto směru. Se stejnou pravděpodobností může být v jednom i v druhém směru. Bombardující síly ji nepoženu v určitém směru. Proto je střední hodnota součinu  $x$  a  $F$  rovna nule. V případě členu  $m x(d^2 x/dt^2)$  však musíme být trochu vynalézaví a zapsat ho v podobě

$$m x \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d[x(dx/dt)]}{dt} - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Původní výraz jsme vyjádřili pomocí dvou členů a tyto členy musíme zprůměrovat. Všimněme si, jak vypadá součin polohy a rychlosti. Má střední hodnotu, která se nemění s časem, neboť, když se částice dostane do určité polohy, už si nepamatuje, kde byla předtím a veličiny takového druhu se nemění s časem. Časová derivace této veličiny je proto v průměru nulová. Zůstává nám

veličina  $mv^2$ , o níž víme jen to, že  $mv^2/2$  má střední hodnotu  $1/2 kT$ . Proto rovnice

$$\left\langle mx \frac{d^2 x}{dt^2} \right\rangle + \mu \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = \left\langle x F_x \right\rangle$$

dává

$$-\langle mv^2 \rangle + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 0$$

neboli

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = 2 \frac{kT}{\mu}. \quad (41.20)$$

Proto pro střední kvadratickou vzdálenost  $\langle R^2 \rangle$  částice v čase  $t$  platí

$$\langle R^2 \rangle = 6 k T \frac{t}{\mu}. \quad (41.21)$$

Tak můžeme vlastně určit, *jak daleko* se částice dostanou! Nejprve musíme určit, jak reagují na konstantní sílu, jak rychle putují pod vlivem známé síly (abychom určili  $\mu$ ) a pak můžeme určit, jak daleko se dostanou při svém náhodném pohybu. Tato rovnice má velký historický význam, neboť se na ní zakládal jeden z prvních způsobů určení konstanty  $k$ . Můžeme totiž změřit  $\mu$ , čas, vzdálenost, do které se částice dostanou a určit průměr. Určení  $k$  bylo tak důležité, neboť ve stavové rovnici  $pV = RT$  pro jeden mol můžeme změřit  $R$ , a  $R$  je rovno  $k$ -násobku počtu atomů v jednom molu. Mol byl původně definován jako určitý počet *gramů* nuklidu kyslíku  $^{16}\text{O}$  (dnes se používá uhlík), takže počet *atomů* v jednom molu nebyl původně znám. Je to samozřejmě velmi zajímavý a důležitý problém. Jak velké jsou atomy? Kolik jich je? A tak se jedno z prvních určení počtu atomů zakládalo na určení toho, jak daleko se dostane drobná částice nečistoty, když ji určitý čas trpělivě pozorujeme mikroskopem. Když bylo už změřeno  $R$ , bylo možné určit Boltzmannovu konstantu  $k$  a Avogadrovu konstantu  $N_0$ .



---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 41.1 ■ Vypočítejte a zapamatujte si
- teplotu  $T$ , pro níž  $kT = 1$  eV;
  - velikost  $kT$  (v eV) při pokojové teplotě;
  - vlnovou délku fotonu odpovídající kvantovému přechodu s rozdílem energií 1 eV.
- 41.2 ■ Rozdělení záření absolutně černého tělesa má tvar  $I(\omega)d(\omega) = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}$ .  
Přejděte k nové proměnné  $x = \hbar\omega/kT$  a ukažte, že
- celková intenzita záření zintegrovaná v celém rozsahu frekvencí je úměrná čtvrté mocnině absolutní teploty.
  - frekvence  $\omega_m$ , při níž má  $I(\omega)$  maximální hodnotu, je úměrná absolutní teplotě.
- 41.3 ■ Najděte relativní intenzity světla o vlnové délce  $0,31 \mu\text{m}$  vyzařovaného dvěma absolutně černými tělesy, jež mají termodynamické teploty 2000 K a 4000 K.

# Aplikace kinetické teorie

---

## 42.1 VYPAŘOVÁNÍ

## 42.2 TERMOEMISE

## 42.3 TERMOIONIZACE

## 42.4 CHEMICKÁ KINETIKA

## 42.5 EINSTEINOVY ZÁKONY ZÁŘENÍ

### 42.1 VYPAŘOVÁNÍ

V této kapitole budeme mluvit o některých dalších aplikacích kinetické teorie. V předcházející kapitole jsme zdůraznili jeden zvláštní rys kinetické teorie, konkrétně, že střední kinetická energie každého stupně volnosti molekuly nebo jiného objektu je rovna  $1/2 kT$ . Hlavním předmětem našich úvah bude nyní skutečnost, že pravděpodobnost nalezení částice v jednotkovém objemu na určitém místě se mění podle závislosti  $\exp(-\text{potenc. energie}/kT)$ . Tuto skutečnost využijeme v řadě případů.

Jevy, které chceme zkoumat jsou poměrně složité: vypařování kapaliny, vyletování elektronů z povrchu kovů nebo chemické reakce zahrnující velký počet atomů. V takových případech už není možné vyvozovat z kinetické teorie jednoduché a přitom přesné závěry, neboť situace je příliš složitá. Proto je tato kapitola poměrně nepřesná, až na případy, na které zvlášť upozorňujeme. Chtěli bychom zdůraznit pouze to, že pomocí kinetické teorie můžeme do určité míry tyto jevy pochopit. Použitím termodynamických argumentů nebo některých měření určitých kritických veličin o nich můžeme získat přesnější představu.

Je však velmi užitečné poznat, i když jen částečně, proč děje probíhají určitým způsobem, protože v nové situaci nebo v situaci, kterou se jen chystáme analyzovat, můžeme přibližně říci, co by se mělo stát. Taková analýza je sice velmi nepřesná, ale v podstatě správná – zakládá se na správné myšlence, jen je trochu zjednodušená, řekneme v některých jemných detailech.

První příklad, který budeme uvažovat, je vypařování kapaliny. Předpokládejme, že máme nádobu s velkým objemem částečně zaplněnou kapalinou, která je v rovnováze s párou při určité teplotě. Budeme předpokládat, že molekuly páry jsou od sebe poměrně vzdálené a molekuly v kapalině jsou natěsnané. Naší úlohou je zjistit, kolik molekul je v plynné fázi ve srovnání

s počtem molekul, jež jsou v kapalině. Jak je hustá pára při dané teplotě a jak závisí tato hustota na teplotě?

Ať  $n$  je počet molekul páry v jednotkovém objemu. Samozřejmě, tento počet se mění s teplotou. Přidáme-li teplo, zvýší se vypařování. Zavedme jinou veličinu  $1/V_a$ , která je rovna počtu atomů v jednotkovém objemu kapaliny. Předpokládáme, že každá molekula kapaliny zaujímá určitý objem. Je-li v kapalině více molekul, obsadí spolu větší objem. Je-li tedy  $V_a$  objem zaujímaný jednou molekulou, počet molekul v jednotkovém objemu bude roven jednotkovému objemu dělenému objemem připadajícím na jednu molekulu. Dále budeme předpokládat, že mezi molekulami působí přitažlivé síly, které je v kapalině drží pohromadě. Jinak bychom nemohli pochopit, proč dochází ke kondenzaci. Předpokládejme tedy, že taková síla existuje a existuje vazbová energie molekul v kapalině, která se ztrácí, když molekuly přecházejí do páry. Budeme tedy předpokládat, že k vytržení molekuly z kapaliny do páry je třeba vynaložit určité množství práce  $W$ . Existuje určitý rozdíl  $W$  mezi energií molekuly v kapalině a její energií v páře, protože ji musíme odtrhnout od ostatních molekul, které ji přitahují!

Nyní využijeme obecný princip, podle něhož je počet atomů v jednotkovém objemu ve dvou různých oblastech roven  $n_2/n_1 = \exp[-(E_2 - E_1)/kT]$ . Tedy počet molekul  $n$  v jednotkovém objemu páry dělený počtem molekul  $1/V_a$  v jednotkovém objemu kapaliny je roven

$$n V_a = \exp[-W/kT]. \quad (42.1)$$

To je vlastně obecné pravidlo. Podobá se to situaci v atmosféře v gravitačním poli, kde je plyn dole hustší než nahoře, protože ke zdvižení molekuly plynu do výšky  $h$  je třeba práce  $mgh$ . V kapalině jsou molekuly hustší než v plynu, protože ven bychom je dostali jen přes energetický val  $W$  a poměr hustot je  $\exp(-W/kT)$ .

To jsme právě chtěli odvodit – že hustota páry se mění jako  $e$  na mínus nějakou energii dělenou  $kT$ . Koeficient před tímto výrazem nás vlastně ani nezajímá, neboť ve většině případů je hustota páry mnohem menší než hustota kapaliny. V podmínkách, kdy nejsme blízko kritického bodu, kde jsou hustoty kapaliny a páry téměř stejné, ale kdy je hustota páry  $n$  mnohem menší než hustota kapaliny  $1/V_a$ , je tato skutečnost vyvolána tím, že v exponentu je  $W$  mnohem větší než  $kT$ . Vztahy typu (42.1) jsou tedy zajímavé jen tehdy, když  $W$  je mnohem větší než  $kT$ , protože umocňujeme  $e$  na velmi velkou zápornou mocninu. Změní-li se  $T$  jen málo, vyvolá to změnu této velké mocniny a hodnota exponenciální funkce bude mnohem významnější než jakýkoli vliv koeficientu stojícího před ní. Proč by se však měly měnit takové veličiny jako  $V_a$ ? Protože naše analýza byla jen přibližná. Koneckonců každá molekula nemá ve skutečnosti vymezen stálý objem; při změně teploty nezůstává objem  $V_a$  stálý, neboť kapalina se roztahuje. Působí i jiné podobné vlivy, takže skutečná situace je mnohem složitější. Všude se vyskytují pomalu se měnící faktory závislé na teplotě. Dokonce i o  $W$  samotném můžeme říci, že v malé míře závisí na teplotě, protože při vyšší teplotě, při jiném molekulárním objemu bude jiné průměrné přitahování atd. Mohli bychom sice myslet, že máme vzorec, v němž se všechno mění neznámým způsobem s teplotou, ale ve skutečnosti bychom žádný vzorec neměli. Uvědomíme-li si, že exponent  $W/kT$  je obecně velmi velký, pochopíme, že největší změna křivky závislosti hustoty páry na teplotě je vyvolána exponenciálním faktorem a budeme-li  $W$  považovat za konstantu a koeficient  $1/V_a$  za přibližně konstantní, dostaneme dobrou aproximaci pro krátké úseky křivky. Jinými slovy: podstatné změny mají obecný průběh  $\exp(-W/kT)$ .

Ukazuje se, že v přírodě je velmi mnoho jevů, jež jsou charakterizovány tím, že se energie v nich odkudsi čerpá a jejich hlavním rysem je teplotní závislost  $e$  na mínus energie  $W$  dělená

$kT$ . Tento fakt je užitečný jen tehdy, když je energie velká ve srovnání s  $kT$ , takže hlavní část změn je určena změnou  $kT$  a ne změnou konstant a jiných faktorů.

Uvažujme nyní jiný způsob jak dospět k podobnému výsledku pro vypařování, takový, při němž budeme více přihlížet k podrobnostem. Abychom získali (42.1), použili jsme prostě pravidlo platné při rovnováze. Chceme-li lépe chápat podstatu věcí, nebude na škodu se podrobněji podívat na to, co se vlastně při vypařování děje. Můžeme to popsat takovým způsobem: molekuly páry soustavně bombardují povrch kapaliny; při nárazu se mohou odrazit nebo uváznout. Nevíme, s jakou pravděpodobností se realizují tyto možnosti – možná v poměru 50 ku 50, možná 10 ku 90. Předpokládejme, že molekuly páry vždy uváznou v kapalině – později můžeme situaci sledovat za předpokladu, že se také někdy odrazí. V daném časovém okamžiku bude určitý počet molekul kondenzovat na povrchu kapaliny. Počet kondenzujících molekul, počet těch, které prošly jednotkovou plochou, je roven součinu počtu molekul  $n$  v objemové jednotce a rychlosti  $v$ . Tato rychlost závisí na teplotě, protože  $1/2 m v^2$  je v průměru rovno  $3/2 kT$ . Proto  $v$  představuje jakousi střední rychlost. Samozřejmě musíme integrovat přes úhly a udělat určité zprůměrování, ale výsledek je zhruba úměrný střední kvadratické rychlosti až na nějaký koeficient. Tedy

$$N_k = n v \quad (42.2)$$

představuje počet molekul, jež proniknou jednotkovou plochou povrchu kapaliny a zkondenzují.

Současně se však molekuly kapaliny chaoticky pohybují a čas od času některá z nich kapalinu opouští. Naším úkolem je odhadnout, jak často se to stává. Budeme vycházet z toho, že v rovnováze je počet molekul vylétujících z kapaliny za jednu sekundu roven počtu molekul, které do kapaliny za jednu sekundu přicházejí.

Kolik molekul vylétuje z kapaliny? Aby se molekula dostala ven, musí nějakým způsobem získat přebytek energie ve srovnání se svými sousedy – značný přebytek, protože je velmi silně upoutána ostatními molekulami kapaliny. Obvykle kapalinu neopouští, neboť je velmi silně přitahována, ale při srážkách může náhodně takovou energii získat. Je-li  $W \gg kT$ , pravděpodobnost, že získá v našem případě potřebnou energii  $W$ , je velmi malá. Pravděpodobnost toho, že molekula získala větší energii než  $W$ , je vlastně  $\exp(-W/kT)$ . Takový je obecný princip kinetické teorie: Pravděpodobnost získání energie, která je o  $W$  větší než průměr, je rovna takové mocnině  $e$ , jejíž exponent je roven mínus  $W$  dělenému  $kT$ . Předpokládejme, že některé molekuly získaly takovou energii. Musíme určit, kolik takových molekul opouští za jednu sekundu povrch kapaliny. To, že má molekula potřebnou energii ještě neznamená, že se opravdu odpaří, neboť může být příliš hluboko v kapalině, nebo i když je při povrchu, může se pohybovat nevhodným směrem. Počet molekul, které opouštějí jednotkovou plochu za sekundu, bude takový: Počet molekul v blízkosti povrchu připadajících na jednotku plochy dělený časem, který molekula potřebuje k úniku a násobený pravděpodobností  $\exp(-W/kT)$  toho, že molekuly mají dostatečnou energii.

Budeme předpokládat, že každá molekula na povrchu kapaliny zabírá určitou plošku  $A$ . Potom počet molekul připadajících na plochu povrchu kapaliny jednotkového obsahu je roven  $1/A$ . Kolik času potřebuje molekula k opuštění kapaliny? Pohybují-li se molekuly určitou střední rychlostí  $v$  a musí projít, řekněme, vzdálenost odpovídající průměru molekuly  $D$ , tedy tloušťce povrchové vrstvy, potom čas, který potřebují k překonání této vzdálenosti, je čas potřebný k úniku molekuly, jež má dostatečnou energii. Tento čas se bude roven  $D/v$ . Pro počet odpařujících molekul bude přibližně platit

$$N_v = (1/A) (v/D) \exp(-W/kT) . \quad (42.3)$$

Plocha zaujímaná molekulou násobená tloušťkou vrstvy je přibližně stejná jako objem  $V_a$ , který molekula zabírá. Aby nastala rovnováha, musí platit  $N_k = N_v$ , tedy

$$nv = (v/V_a) \exp(-W/kT) . \quad (42.4)$$

Rychlosti  $v$  nám z rovnice vypadnou; i když na jedné straně rovnice představuje  $v$  rychlost molekuly v páře a na druhé straně rovnice rychlost odpařujících se molekul. Tyto rychlosti jsou stejné, neboť jejich střední kinetická energie (v jednom směru) je  $1/2 kT$ . Možná bude někdo z vás namítat, že jde o zvlášť rychle se pohybující molekuly – ty, které získaly přebytečnou energii. To však není pravda, neboť v okamžiku, kdy se vydaly na cestu z kapaliny, *ztratily* tento přebytek na úkor potenciální energie. Když opouštějí povrch, jsou už zpomaleny na rychlost  $v$ ! Situace je stejná jako při rozdělení rychlostí molekul v atmosféře. V dolních vrstvách měly molekuly určité rozdělení energie, a ty, které dosáhly horní vrstvy, mají *stejně* rozdělení energie, protože pomalé molekuly tam vůbec nedošly a rychlé byly zpomaleny. Molekuly, které se vypařují, mají stejné rozdělení energie jako vnitřní molekuly – a to je pozoruhodná skutečnost. Nemá však velký význam posuzovat náš vztah přísně, neboť obsahuje i jiné nepřesnosti. Neuvažovali jsme například, pravděpodobnost odrazu molekul od povrchu kapaliny, místo jejich kondenzace atd. Získali jsme hrubou představu o rychlosti vypařování a kondenzace a už víme, že hustota páry  $n$  se mění stejně jako předtím, nyní to však chápeme detailněji a ne pouze jako svévolnou formuli.

Takové hlubší chápání nám dovolí objasnit řadu věcí. Předpokládejme, například, že odsáváme páru tak rychle, že ji odstraníme ihned po vytvoření (máme-li dobrá čerpadla a kapalina se vypařuje velmi pomalu). Ptáme se, jakou rychlostí bude probíhat vypařování, budeme-li udržovat teplotu kapaliny na hodnotě  $T$ . Předpokládejme, že jsme již experimentálně určili rovnovážnou hustotu páry, takže víme, kolik molekul v jednotkovém objemu je v rovnováze s kapalinou při dané teplotě. Zajímá nás, jaká bude *rychlost* vypařování. I když naše analýza vypařování byla jen hrubá, počet přicházejících molekul páry jsme neodhadli špatně, neuvažujeme-li neznámý koeficient odrazu. Můžeme proto využít skutečnost, že v rovnováze je počet odcházejících molekul stejný jako počet přicházejících molekul. Ve skutečnosti je pára odstraňována, a tak molekuly kapalinu jenom opouštějí, ale kdybychom páru ponechali samu sobě, dosáhla by rovnovážné hustoty, při níž se počet odcházejících molekul rovná počtu přicházejících. Proto snadno nahlédneme, že počet molekul, které za sekundu vycházejí z povrchu kapaliny, je roven neznámému koeficientu odrazu  $R$  násobenému počtem molekul, jež by za sekundu vycházely z povrchu, kdybychom páru neodčerpávali. To je totiž počet molekul, který vyrovnává ztráty vypařováním.

$$N_v = n v R = (v R/V_a) \exp(-W/kT) . \quad (42.5)$$

Je samozřejmé, že se snáze vypočítá počet molekul páry dopadajících na kapalinu, protože nemusíme tolik vědět o silách, než když uvažujeme o průniku molekul povrchem kapaliny. Je mnohem jednodušší postupovat naopak.

## 42.2 TERMOEMISE

Můžeme uvést další příklad často se vyskytující situace, která se natolik podobá vypařování kapaliny, že si nevyžaduje zvláštní analýzu. Je to v podstatě též problém. V elektronce existuje zdroj elektronů, konkrétně žhavené wolframové vlákno, a kladně nabitá destička, která přitahuje elektrony. Každý elektron, který unikl z povrchu wolframu, je ihned unášen k destičce. To je naše ideální „čerpadlo“, které soustavně odvádí elektrony. Ptáme se: Kolik elektronů můžeme dostat za sekundu z kousku wolframu a jak se tento počet mění s teplotou? Odpověď na tuto otázku představuje vztah (42.5), neboť v kousku kovu jsou elektrony přitahovány k iontům nebo atomům kovu. Zhruba řečeno jsou udržovány v kovu. K vytržení elektronu z kovu je třeba určité energie, musíme vykonat určitou práci. Tato práce je pro různé kovy různá. Ve skutečnosti tato práce závisí dokonce i na vlastnostech povrchu daného kovu, ale celková práce představuje jen několik elektronvoltů, což je typická hodnota energie chemických reakcí. V tomto směru je užitečné si připomenout, že napětí galvanických článků využívajících chemické reakce, používaných např. v baterkách, je přibližně jeden volt.

Jak můžeme zjistit, kolik elektronů vychází z vlákna za sekundu? Bylo by dost těžké analyzovat, co se děje s elektrony, které vycházejí z kovu; jednodušší bude opačný postup. V našich úvahách můžeme vycházet z představy, že vyletující elektrony nejsou odváděny pryč, ale jako plyn se mohou vracet zpět do kovu. Bude proto existovat určitá rovnovážná hustota elektronů, kterou bude možno vyjádřit přesně stejným vztahem jako je (42.1), kde  $V_a$  bude zhruba objem připadající na jeden elektron v kovu a  $W$  je rovno  $q_e \varphi$ , kde  $\varphi$  je tzv. *výstupní potenciál*, neboli napětí potřebné k vytržení elektronu z povrchu kovu. Z tohoto vztahu se dovíme, kolik elektronů musí být v okolním prostoru a musí narážet na kov, aby nahradily ty, které povrch opustily. Pak můžeme snadno vypočítat, kolik elektronů opouští povrch kovu, když je všechny odvádíme pryč, neboť počet těch, jež vystupují z povrchu, je přesně stejný jako počet těch, které by pronikly povrchem do kovu při známé hustotě elektronové „páry“. Jinak řečeno, elektrický proud procházející jednotkovou plochou je roven součinu náboje elektronu a počtu elektronů, které procházejí za sekundu touto plochou, přičemž tento počet je roven součinu rychlosti a počtu elektronů v jednotkovém objemu. Proto, tak jak jsme to viděli už mnohokrát, platí

$$I = q_e n v = (q_e v / V_a) \exp(-q_e \varphi / kT). \quad (42.6)$$

Víme, že jeden elektronvolt odpovídá  $kT$  při teplotě 11 600 K. Vlákno elektronky pracuje při teplotě asi 1 100 K, takže exponenciální faktor je přibližně  $e^{-10}$ ; změníme-li trochu teplotu, tento faktor se značně změní. Opět máme charakteristickou závislost na teplotě  $\exp(-q_e \varphi / kT)$ . Koeficient před exponentou je vlastně nesprávný – ukazuje se, že chování elektronů v kovu správně vystihuje kvantová a ne klasická mechanika, ale to způsobí jen malou změnu tohoto koeficientu. Dodnes vlastně nikdo tento koeficient přesně nespočítal, i když mnozí se o to snažili a používali přitom prvotřídní kvantověmechanickou teorii. Velký problém spočívá v tom, zda se  $W$  mění aspoň trochu s teplotou. Mění-li se, pak nemůžeme rozlišit pomalu se měnící  $W$  od pozmeněného koeficientu před exponentou. Kdyby se, například,  $W$  měnilo lineárně s teplotou, takže  $W = W_0 + \alpha kT$ , měli bychom

$$\exp(-W/kT) = \exp[-(W_0 + \alpha kT)/kT] = \exp(-\alpha) \exp(-W_0/kT).$$

Lineární teplotní závislost  $W$  je tedy rovnocenná změně koeficientu. Pokus o přesné určení tohoto koeficientu je tedy těžká a obvykle i bezúspěšná úloha.

### 42.3 TERMOIONIZACE

Všimněme si jiného příkladu, v němž se uplatňuje táž myšlenka. Týká se ionizace. Předpokládejme, že v plynu je velké množství atomů, které jsou původně neutrální, ale po zahřátí plynu se mohou stát ionizovanými. Zajímá nás, kolik je tam iontů v daných podmínkách, tj. při určité hustotě atomů v jednotkovém objemu a při určité teplotě. Opět budeme uvažovat nádobu, v níž je  $N$  atomů a ty si udržují elektrony. (Atom zbavený elektronu se nazývá *iont* a neutrální atom budeme nazývat prostě atomem.) Předpokládejme, že v daném okamžiku je koncentrace neutrálních atomů  $n_a$ , koncentrace iontů je  $n_i$  a koncentrace elektronů je  $n_e$ . Ptáme se, jaký je vztah mezi těmito veličinami?

Především máme dvě podmínky nebo dvě omezení pro tato tři čísla. Například, když měníme různé podmínky, jako teplotu nebo jiné, zůstává  $n_a + n_i$  konstantní, neboť to je počet  $n$  atomových jader v jednotkovém objemu nádoby. Zachováme-li stálý počet jader v jednotkovém objemu a měníme např. teplotu, pak se celkový počet atomů a iontů nemění, tj.  $n_a + n_i = n$ , i když se v důsledku ionizace některé atomy mění na ionty. Další podmínka spočívá v tom, že elektrická neutralita plynu jako celku (při zanedbání dvojnásobné nebo trojnásobné ionizace) si vyžaduje rovnost počtu iontů a počtu elektronů v každém okamžiku, tedy  $n_i = n_e$ . To jsou pomocné rovnice, které vyjadřují zachování náboje a zachování počtu atomů.

Tyto rovnice jsou správné a nakonec je použijeme, až budeme řešit konkrétní problém. Chceme však získat i jiný vztah mezi těmito veličinami, a to můžeme udělat takto. Opět využijeme myšlenku, že k vytržení elektronu z atomu je třeba určité energie, kterou nazýváme *ionizační energie* a budeme jí označovat symbolem  $W$ , aby se všechny vztahy podobaly. Nechť tedy  $W$  představuje energii potřebnou k vytržení elektronu z atomu a vzniku iontu. Opět tvrdíme, že počet volných elektronů v jednotkovém objemu „páry“ je roven počtu elektronů vázaných na atom v jednotkovém objemu násobenému exponenciálou ze záporně vzatého energetického rozdílu mezi vázaným a volným stavem děleného  $kT$ . To je opět základní rovnice. Jak ji můžeme zapsat? Počet volných elektronů v jednotkovém objemu bude samozřejmě roven  $n_e$ , vždyť taková je definice  $n_e$ . Co můžeme říci o počtu elektronů v jednotkovém objemu, jež jsou vázány na atomy? Celkový počet míst, na která můžeme dát elektrony, je zřejmě roven  $n_a + n_i$  a budeme předpokládat, že jsou-li elektrony vázané, každému přísluší objem  $V_a$ . Celkový objem, který mají vázané elektrony k dispozici, je roven  $(n_a + n_i) V_a$  a náš vztah můžeme vyjádřit va tvaru

$$n_e = \frac{n_a}{(n_a + n_i) V_a} \exp(-W/kT).$$

Tento vztah je však z jednoho důležitého hlediska nesprávný. Nachází-li se jeden elektron v atomu, druhý elektron už do tohoto objemu nemůže vstoupit! Jinými slovy: ne všechny objemy, které by elektron mohl obsazovat, jsou pro něj dostupné a při rozhodování, zda zaujme místo v páře nebo v kondenzovaném stavu, se objevuje zvláštní rys spočívající v tom, že elektron nemůže jít tam, kde už je druhý elektron – odtud je vypuzován. Právě proto musíme uvažovat jen tu část objemu, která je pro elektron přístupná. Místa, jež jsou už elektronem obsazena, nepatří k takovému přístupnému objemu. Jediným dovoleným objemem je prostor iontů, kde

se nacházejí nezaplňená místa, která elektron může obsadit. Uvážíme-li tyto okolnosti, dospějeme k přesnějšímu vyjádření našeho vztahu

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{1}{V_a} \exp(-W/kT). \quad (42.7)$$

Tento vztah se nazývá *Sahova ionizační rovnice*. Podívejme se, zda je možné kvalitativně pochopit správnost takové rovnice pomocí argumentů založených na kinetice probíhajících dějů.

Elektron každou chvíli naráží na iont a rekombinuje v atom. Každou chvíli se však i atom zúčastní srážky a rozpadá se na iont a elektron. Četnosti těchto procesů musí být stejné. Jak rychle se najdou elektron a iont? Tato rychlost se určitě zvýší, vzroste-li počet elektronů v jednotkovém objemu. Zvýší se i tehdy, když vzroste počet iontů v jednotkovém objemu. Proto je celková rychlost rekombinace určitě úměrná součinu koncentrace elektronů a iontů. Dále musí celková četnost ionizace v důsledku srážek lineárně záviset na počtu atomů schopných ionizace. Rychlostí obou procesů budou vyvážené, když se ustálí určitý poměr mezi součinem  $n_e n_i$  a počtem atomů  $n_a$ . Skutečnost, že tento vztah je vyjádřen rovnicí, v níž vystupuje ionizační energie  $W$ , dává samozřejmě trochu bohatší informaci, ale snadno lze zjistit, že taková rovnice musí obsahovat koncentrace elektronů, iontů a atomů v kombinaci  $n_e n_i / n_a$ , která může záviset pouze na teplotě, atomových účinných průřezích a jiných konstantách.

Všimněme si také, že rovnice obsahuje počty v *jednotkovém objemu*, a proto ve dvou experimentech s daným celkovým počtem atomů a iontů  $N$ , tedy s určitým pevným počtem jader, jsou při použití nádob s různým objemem počty  $n$  menší ve větší nádobě. Když se poměr  $n_e n_i / n_a$  nemění, bude *celkový počet* elektronů a iontů větší ve větší nádobě. Abychom se o tom přesvědčili, předpokládejme, že máme  $N$  jader v nádobě s objemem  $V$ , a že  $f$ -tá část z nich je ionizována. Pak  $n_e = fN/V = n_i$  a dále  $n_a = (1 - f)N/V$ . V takovém případě naše rovnice přejde do tvaru

$$\frac{f^2 N}{1 - f} \frac{1}{V} = \frac{e^{-W/kT}}{V_a}. \quad (42.8)$$

Jinými slovy, bereme-li stále menší hustotu atomů nebo stále větší a větší objem nádoby, musí relativní počet elektronů a iontů  $f$  vzrůstat. Ionizace pocházející z „expanze“, při níž klesá hustota, je příčinou, proč věříme, že při velmi nízkých hustotách – jaké se vyskytují ve studeném mezihvězdném prostoru – mohou existovat ionty, i když z energetického hlediska je nám to těžko pochopitelné. Přestože k vytvoření iontů je potřebná energie mnohonásobně převyšující  $kT$ , ionty tam přece jsou.

Proč jsou tam ionty přítomné jen tehdy, když je kolem nich tak mnoho místa, zatímco při vzrůstu hustoty projevují snahu vymizet? Uvažujme atom. Čas od času světlo nebo jiný atom nebo iont nebo cokoliv jiného, co udržuje tepelnou rovnováhu, na tento atom naráží. Velmi řídce – neboť si to vyžaduje obrovské množství přebytečné energie – se elektron odtrhne od atomu a zůstane iont. Je-li prostor obrovský, tento elektron putuje a k iontu se možná nepříblíží celé roky. Jednou za velmi dlouhou dobu se přece jen vrátí a spolu s iontem vytvoří atom. Rychlost, s níž elektrony opouštějí atomy, je velmi malá. Je-li však objem obrovský, elektron, který unikl, potřebuje tak dlouhou dobu než najde jiný iont, s nímž by rekombinoval, že pravděpodobnost rekombinace je příliš malá. Proto i přes velkou přebytečnou energii potřebnou k ionizaci může být počet elektronů značný.



## 42.4 CHEMICKÁ KINETIKA

S podobným jevem jako je ionizace se setkáváme při chemických reakcích. Například, když se dvě látky  $A$  a  $B$  slučují a vytvářejí látku  $AB$ , pak při kratší úvaze docházíme k tomu, že  $AB$  je to, co jsme nazývali atomem,  $B$  je to, co jsme nazývali elektronem a  $A$  zase to, co jsme nazývali iontem. Po takové záměně rovnice rovnováhy jsou co do formy stejné jako předtím

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = c e^{-W/kT}. \quad (42.9)$$

Samozřejmě tento vztah není přesný, neboť „konstanta“  $c$  závisí na tom, v jakém objemu se mohou  $A$  a  $B$  slučovat atd. Pomocí termodynamiky však můžeme určit význam veličiny  $W$  vystupující v exponentu a ukazuje se, že tato veličina úzce souvisí s energií potřebnou k reakci.

Pokusme se pochopit tento vztah jako výsledek srážek, tedy přibližně tak, jak jsme chápali vzorec pro vypařování, když jsme si všimli počtu elektronů, které odcházely z prostoru a které se do něj vracely za jednotku času. Předpokládejme, že  $A$  a  $B$  se čas od času při srážkách slučují a vytvářejí  $AB$ . Dále předpokládejme, že sloučenina  $AB$  je složitá molekula, která se také pohybuje a na níž narážejí jiné molekuly a občas získá dost energie na to, aby se opět rozpadla na  $A$  a  $B$ .

V chemických reakcích dochází k situaci, kdy přibližující se atomy mají příliš malou energii, a i když se v reakci další energie uvolní, sblížení atomů  $A$  a  $B$  nemusí ještě reakci nastartovat. Obvykle se vyžaduje, aby srážka byla dost tvrdá. Měkká srážka mezi  $A$  a  $B$  nemusí stačit k uskutečnění reakce, i když se během reakce energie uvolnila. Předpokládejme tedy, že obvyklým rysem chemických reakcí je skutečnost, že pro  $A$  a  $B$  nestačí k vytvoření  $AB$  pouhá srážka, ale musí to být srážka s dostatečnou energií. Tato energie se nazývá *aktivační energie* – energie potřebná k aktivování reakce. Nechť  $A^*$  je aktivační energie, tedy přebytek energie potřebný při srážce k uskutečnění reakce. Pak rychlost  $R_p$  s níž  $A$  a  $B$  vytvářejí  $AB$ , by měla obsahovat součin počtu atomů  $A$  a  $B$  násobený rychlostí, s níž jednotlivý atom naráží na určitou plošku  $\sigma_{AB}$  a násobený faktorem  $e^{-A^*/kT}$ , představujícím pravděpodobnost toho, že atomy mají dostatečnou energii:

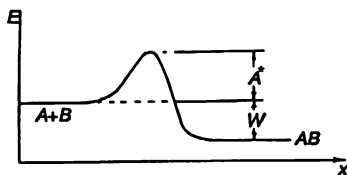
$$R_p = n_A n_B v \sigma_{AB} e^{-A^*/kT}. \quad (42.10)$$

Dále potřebujeme znát rychlost opačného procesu  $R_r$ . Je určitá pravděpodobnost, že  $A$  a  $B$  se rozejdou. Aby se rozešly, nestačí jen energie  $W$  potřebná k jejich samostatné existenci, ale stejně jako v případě slučování musí  $A$  a  $B$  překonat určitou bariéru k tomu, aby se oddělily. Musí mít dost energie nejen k vzájemnému odtržení, ale ještě něco navíc. Připomíná to výstup na kopec, když se chceme dostat do hlubokého údolí. Napřed musely šplhat přes kopec, aby se dostaly do údolí, a pak musí opět přes kopec při zpáteční cestě (obr. 42.1). Proto rychlost přeměny  $AB$  na  $A$  a  $B$  bude úměrná počtu  $n_{AB}$  molekul  $AB$  násobenému faktorem  $\exp[-(W + A^*)/kT]$

$$R_r = \zeta n_{AB} e^{-(W + A^*)/kT}. \quad (42.11)$$

Koeficient  $\zeta$  bude obsahovat objem atomů a pravděpodobnost srážek, kterou bychom získali podobným způsobem jako při vypařování pomocí obsahů ploch, dob a tloušťek – to však dělat nebudeme. To, co nás nyní nejvíc zajímá, je skutečnost, že v případě rovnosti těchto rychlostí bude

jejich poměr roven jedné. To znamená, že podobně jako dříve se  $n_A n_B / n_{AB} = c \exp(-W/kT)$ , kde  $c$  obsahuje průřezy, rychlosti a jiné faktory nezávislé na koncentracích  $n$ .



Obr. 42.1 Energetická závislost reakce  $A + B \rightarrow AB$

Je zajímavé, že rychlost reakcí se také mění podle zákona  $\exp(-\text{konst}/kT)$ , když konstanta je nyní jiná než v případě koncentrací. Aktivační energie  $A^*$  je něco zcela jiného než  $W$ . Energie  $W$  určuje poměry  $A$ ,  $B$  a  $AB$  v rovnovážném stavu, ale když chceme vědět, jak rychle se slučuje  $A + B$  na  $AB$ , to už nesouvisí s rovnováhou. V tom případě rychlost reakce určuje prostřednictvím exponenciálního faktoru jiná energie – *aktivační energie*.

Kromě toho  $A^*$  není základní konstantou jako  $W$ . Předpokládejme, že se na povrchu stěny – nebo v nějakém jiném místě – mohou  $A$  a  $B$  nacházet dočasně takovým způsobem, že se snáze slučují. Jinými slovy, bariéra je nižší nebo skrz ní vede tunel. V důsledku platnosti zákona zachování energie nakonec vždy z  $A$  a  $B$  vznikne  $AB$ , takže energetický rozdíl  $W$  bude nezávislý na cestě, jíž se reakce uskutečnila. Ale aktivační energie  $A^*$  na této cestě silně závisí. To je důvod proč jsou rychlosti chemických reakcí velmi citlivé na vnější podmínky. Rychlost reakce můžeme změnit, změníme-li povrchy reagujících látek. Dáme-li látku do jiného prostředí, reakce proběhne jinou rychlostí, ale ta závisí na povaze povrchu. Nebo přidáme-li nakonec třetí látku, můžeme silně změnit rychlost reakce. Některé látky vyvolávají obrovské změny reakčních rychlostí i nepatrnými změnami aktivačních energií  $A^*$  – takové látky nazýváme *katalyzátory*. Například reakce se vůbec nemusí uskutečnit, protože  $A^*$  je příliš velké při dané teplotě, ale přidáním specifické látky – katalyzátoru – se  $A^*$  sníží a reakce velmi rychle proběhne.

Mimořádně, při reakci, kdy  $A$  a  $B$  dávají  $AB$ , jsou určité těžkosti, neboť, když se snažíme dostat dva předměty k sobě tak, aby vznikl jeden, který je stabilnější, nemůžeme zachovat i energii i hybnost. Potřebujeme proto přinejmenším třetí předmět  $C$ , a tak skutečná reakce je mnohem složitější. Rychlost přímé reakce musí obsahovat součin  $n_A n_B n_C$  a mohlo by se proto zdát, že náš vzorec je nesprávný, jenže není to tak! Všimneme-li si rychlosti, s jakou se  $AB$  rozpadá, zjistíme, že i zde je potřebná srážka s  $C$ , a proto je rychlost zpětné reakce úměrná  $n_{AB} n_C$  a  $n_C$  se ve vztahu pro rovnovážné koncentrace vyruší. Rovnovážný zákon (42.9) je zcela správný bez ohledu na to, jaký je mechanismus reakce!

## 42.5 EINSTEINOVY ZÁKONY ZÁŘENÍ

Nyní věnujme pozornost zajímavé situaci, která je obdobou toho, o čem jsme mluvili a která souvisí se zákonem záření černého tělesa. V předcházející kapitole jsme odvodili distribuční zákon záření v dutině takovým způsobem, jak to udělal Planck, který uvažoval záření oscilátoru. Oscilátor měl určitou střední energii, a když kmital, musel vyzařovat. Toto záření se hromadilo v dutině, dokud se neustavila rovnováha mezi emisí a absorpcí. Tak jsme pro intenzitu záření s úhlovou frekvencí  $\omega$  našli vztah

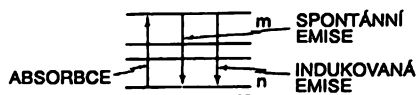
$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (42.12)$$

Tento výsledek předpokládá, že oscilátor produkující záření má určité od sebe stejně vzdálené energetické hladiny. Nic jsme neřekli o tom, že světlo jsou fotony nebo něco podobného. Nemluvili jsme ani o tom, jakým způsobem se při přechodu atomu z jedné hladiny na druhou přenáší kvantum energie  $\hbar\omega$  ve formě světla. Původní Planckova myšlenka spočívala v tom, že látka je kvantována, ale světlo ne: oscilátory látky nemohou přijímat libovolnou energii, ale jen určité dávky energie. Další těžkost spočívala v tom, že odvození bylo částečně klasické. Počítali jsme intenzitu záření oscilátoru podle klasické fyziky a pak jsme změnili názor a prohlásili jsme: „Ne, tento oscilátor má mnoho energetických hladin.“ Abychom dospěli ke správnému výsledku, důsledně kvantověmechanickému, byl zapotřebí pomalý postupný vývoj, který kulminoval v roce 1927 završením kvantové mechaniky. Mezitím se však Einstein pokusil pozměnit Planckův názor, že pouze látkové oscilátory jsou kvantovány a přišel s myšlenkou, že světlo jsou skutečně fotony a můžeme je v určitém smyslu chápat jako částice s energií  $\hbar\omega$ . Dále Bohr poukázal na to, že *jakýkoliv* systém atomů má energetické hladiny, které však nejsou od sebe nezbytně stejně vzdáleny jako v případě Planckova oscilátoru. Tak vznikla potřeba nového odvození nebo alespoň prodiskutování zákona záření z úplnějšího kvantověmechanického hlediska.

Einstein předpokládal, že Planckův výsledný vztah je správný a použil ho k získání nového, předtím neznámého poznatku o interakci záření s látkou. Uvažoval takto: Mějme dvě z mnoha energetických hladin atomu, například  $m$ -tou a  $n$ -tou hladinu (obr. 42.2), a ať na takový atom dopadá světlo vhodné frekvence. Pak takový atom může světelný foton absorbovat a přejít ze stavu  $n$  do stavu  $m$ . Pravděpodobnost realizace tohoto děje samozřejmě závisí na těchto dvou energetických hladinách, ale je úměrná *intenzitě dopadajícího světla*. Označme konstantu úměrnosti  $B_{nm}$ , aby nám připomínala, že nejde o univerzální konstantu přírody, ale že závisí na příslušném páru hladin; některé hladiny se vybudí obtížně, jiné snadno. Jaký bude výraz pro pravděpodobnost emise při přechodu z  $m$  do  $n$ ? Einstein předpokládal, že se musí skládat ze dvou částí. Není-li světlo, existuje určitá pravděpodobnost, že se atom z vybuděného stavu dostane do nižšího stavu a vyžádá foton; tento úkaz nazýváme *spontánní emise*. Takový předpoklad je obdobou představy, že oscilátor s určitou energií, dokonce i v klasické fyzice, nemůže tuto energii udržet, ale ztrácí ji zářením. Obdobou spontánního záření klasického systému je tedy skutečnost, že atom má ve vybuděném stavu určitou pravděpodobnost  $A_{mn}$  přechodu ze stavu  $m$  do nižšího stavu  $n$  a tato pravděpodobnost opět závisí na energetických hladinách, ale nezávisí na tom, zda na atom dopadá nebo nedopadá světlo. Einstein však šel dále a porovnáním s klasickou fyzikou a pomocí dalších argumentů dospěl k závěru, že emise záření je ovlivňována i přítomností světla – dopadá-li na atom světlo vhodné frekvence, vzrůstá pravděpodobnost vyzáření fotonu úměrně s intenzitou světla s konstantou úměrnosti  $B_{nm}$ . Kdyby se nám později podařilo dokázat, že tento koeficient je nulový, dokázali bychom, že se Einstein mýlil. My se však přesvědčíme o tom, že měl pravdu.

Einstein předpokládal, že existují tři druhy procesů: absorpce úměrná intenzitě světla, emise úměrná intenzitě světla (nazývaná *indukovaná emise* nebo *stimulovaná emise*) a spontánní emise, která nezávisí na světle.

Nyní předpokládejme, že při teplotě  $T$  se ustálila rovnováha a ve stavu  $n$  se nachází určitý počet atomů  $N_n$  a ve stavu  $m$  zase  $N_m$ . Pak je celkový počet atomů, které přecházejí za sekundu z  $n$  do  $m$ , roven součinu počtu atomů ve stavu  $n$  a pravděpodobností přechodu atomu ze stavu  $n$  do stavu  $m$



Obr. 42.2 Přechody mezi dvěma energetickými hladinami atomu

$$R_{n \rightarrow m} = N_n B_{nm} I(\omega) . \quad (42.13)$$

Počet atomů přecházejících z  $m$  do  $n$  vyjádříme stejným způsobem, tj. jako součin počtu atomů  $N_m$ , které jsou ve stavu  $m$  a pravděpodobnosti, že atom přejde za sekundu do stavu  $n$ . Tak dostaneme vyjádření

$$R_{m \rightarrow n} = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)] . \quad (42.14)$$

Nyní předpokládejme, že v tepelné rovnováze je počet atomů postupujících do vyššího stavu stejný jako počet atomů přecházejících do nižšího stavu. Alespoň je to jeden ze způsobů zachování stálého počtu atomů na každé hladině.<sup>52)</sup>

Proto považujeme v rovnováze rychlosti přechodů za stejné. Máme však ještě jednu informaci: víme, jak velké je  $N_m$  ve srovnání s  $N_n$  – poměr těchto dvou veličin je  $\exp[-(E_m - E_n)/kT]$ . Dále Einstein předpokládal, že pro přechody ze stavu  $n$  do stavu  $m$ , je účinné jen to světlo, jehož frekvence odpovídá energetickému rozdílu, tedy ve všech našich vztazích je  $E_m - E_n = \hbar\omega$ . Proto

$$N_m = N_n \exp(-\hbar\omega/kT) . \quad (42.15)$$

Považujeme-li tedy výše uvedené rychlosti přechodů za stejné, pak  $N_n B_{nm} I(\omega) = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)]$ , a když tento vztah dělíme výrazem  $N_m$ , dostaneme

$$B_{nm} I(\omega) \exp(\hbar\omega/kT) = A_{mn} + B_{mn} I(\omega) . \quad (42.16)$$

Z této rovnice můžeme vypočítat  $I(\omega)$ . Snadno zjistíme, že

$$I(\omega) = \frac{A_{mn}}{B_{nm} \exp(\hbar\omega/kT) - B_{mn}} . \quad (42.17)$$

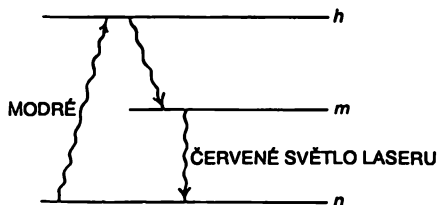
Jenže podle Plancka musí mít tento vztah tvar (42.12). Z toho můžeme na něco usoudit. Především, že  $B_{nm}$  musí být rovno  $B_{mn}$ , protože jinak bychom nezískali  $[\exp(\hbar\omega/kT) - 1]$ . Tak Einstein objevil některé vztahy, jejichž přímé odvození neznal, konkrétně, že *pravděpodobnosti indukované emise a absorpce musí být stejné*. To je zajímavé. Dále, aby (42.17) a (42.12) souhlasily, musí být

$$A_{mn}/B_{mn} = \hbar\omega^3/\pi^2 c^2 . \quad (42.18)$$

<sup>52)</sup> Není to jediný způsob, jak zachovat stálé počty atomů na jednotlivých hladinách, ale je to právě ten způsob, jímž se toto zachování skutečně realizuje. Skutečnost, že v tepelné rovnováze musí být každý proces vyvážen k němu opačným procesem, se nazývá *princip detailní rovnováhy*.

Známe-li například pravděpodobnost absorpce pro danou hladinu, můžeme určit pravděpodobnost spontánní emise a pravděpodobnost indukované emise nebo jakoukoliv jejich kombinaci.

To je vše, na co mohl Einstein nebo kdokoliv jiný přijít použitím takových argumentů. Ke skutečnému výpočtu pravděpodobnosti spontánní emise nebo jiných atomových přechodů je třeba znát vlastnosti atomu, jimiž se zabývá kvantová elektrodynamika. Ta však byla zformulována až o jedenáct let později. Einsteinova práce, o níž byla řeč, pochází z roku 1916.



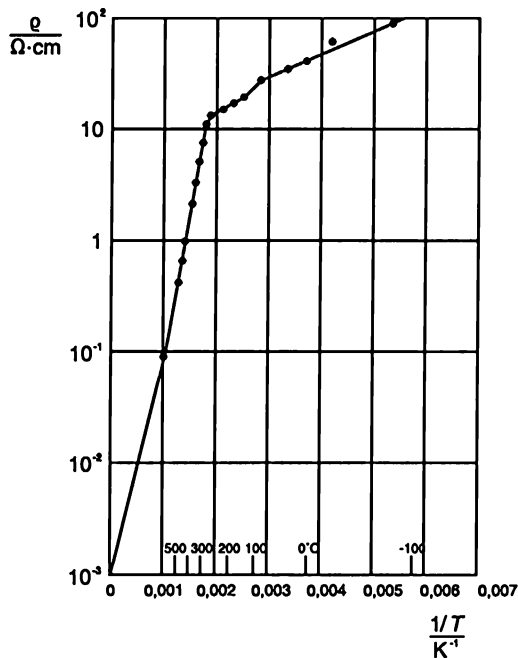
Obr. 42.3 Při vybuzení např. modrým světlem se atom dostává do vyššího stavu  $h$  a emisí fotonu přejde do stavu  $m$ . Bude-li počet atomů ve stavu  $m$  dostatečně velký, může nastartovat činnost laseru.

Možnost indukované emise našla dnes zajímavé uplatnění. Dopadající světlo má snahu vyvolat přechody atomů směrem dolů. Takový přechod zvětší světelnou energii o  $\hbar\omega$ , existují-li atomy, které obsadily vyšší stav. Dodáváním energie nějakým jiným způsobem než zahříváním můžeme připravit takový plyn, v němž je počet atomů ve stavu  $m$  mnohem větší než počet ve stavu  $n$ . Taková situace se velmi liší od rovnovážné a nemůžeme pro ni použít vzorec  $\exp(-\hbar\omega/kT)$  platný pro případ rovnováhy. Dokonce můžeme dosáhnout to, že počet atomů v horním stavu bude velmi velký, zatímco v dolním stavu bude prakticky nulový. Pak světlo s frekvencí odpovídající energetickému rozdílu  $E_m - E_n$  bude jen velmi slabě absorbováno, neboť atomů, jež se nacházejí ve stavu  $n$  a jež jsou schopny toto světlo absorbovat, je velmi málo. Na druhé straně, dopadající světlo bude indukovat emisi z horního stavu! Máme-li mnoho atomů v horním stavu, nastane jakási řetězová reakce. Začnou-li atomy vyzařovat, přinutí vyzařovat i další, takže všechny se náhle ocitnou v dolním stavu. Takový zdroj záření nazýváme *laser* nebo v případě mikrovlnné oblasti *maser*.

K získání atomů ve stavu  $m$  se používají různé triky. Mohou existovat výše položené hladiny, na které se atomy dostanou, ozáříme-li je silným světelným paprskem vysoké frekvence. Z těchto vysoce položených hladin se mohou atomy dostávat na nižší hladiny při současném vyzařování fotonů dokud nezůstanou na hladině  $m$ . Setrvávají-li na této hladině delší dobu bez vyzařování, nazýváme tento stav *metastabilní*. Z takového stavu se pak všechny dostávají dolů najednou indukovanou emisí. Ještě jeden technický detail – vložíme-li takový systém do obvyčejné nádoby, budou atomy zářit spontánně všemi směry a to nám komplikuje situaci, zajímáme-li se o indukované záření. Naštěstí můžeme indukovaný jev zesílit zvýšením jeho účinnosti tak, že umístíme téměř dokonalá zrcadla na koncích nádoby. Emitované světlo se odráží od zrcadel, prochází plynem znovu a znovu a indukuje emisi dalších atomů. I když jsou zrcadla téměř stoprocentně odrazivá, mají přece jen nepatrnou propustnost a malá část světla se přece jen dostane ven. Nakonec však, podle zákona zachování energie, všechno indukované záření vyrazí ven v podobě krásného soustředěného paprsku a tak se dnes v laserech generují intenzivní světelné svazky.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 42.1 ■ Aktivační energie, molární skupenské teplo vypařování, rekombinace a disociace se obvykle vyjadřují v joulech na mol nebo v elektronvoltech na atom. Jaký je vztah mezi těmito jednotkami?
- 42.2 ■ a) Sestrojte graf závislosti hustoty rtuťových par na  $1/T$  v semilogaritmické stupnici (potřebné číselné údaje vyhledejte v literatuře). Pomocí tohoto grafu určete skupenské výparné teplo rtuťi a porovnejte s hodnotami v tabulkách.  
b) Proveďte totéž pro případ vody.
- 42.3 ■ Výparné teplo rtuťi se v teplotním intervalu 0–300 °C mění jen o 3 % (v průměru je rovno 0,61 eV/atom). Jaké chyby se dopustíte při výpočtu hustoty rtuťových par při 0 °C, použijete-li hodnotu výparného tepla pro 300 °C místo správné hodnoty odpovídající 0 °C. Všimněte si, že malý relativní rozdíl v exponentu může přivést ke značné chybě.
- 42.4 ■ Na připojeném grafu je znázorněna závislost měrného elektrického odporu téměř čistého křemíku na teplotě. Co můžete na základě tohoto grafu usoudit o povaze vodivostního proudu v této látce při teplotách vyšších a nižších než 300 °C ?



# 43 Difuze

## 43.1 SRÁŽKY MOLEKUL

## 43.2 STŘEDNÍ VOLNÁ DRÁHA

## 43.3 DRIFTOVÁ RYCHLOST

## 43.4 IONTOVÁ VODIVOST

## 43.5 MOLEKULOVÁ DIFUZE

## 43.6 TEPELNÁ VODIVOST

### 43.1 SRÁŽKY MOLEKUL

Dosud jsme uvažovali pohyb molekul jen v takovém plynu, který je v tepelné rovnováze. Nyní se pustíme do zkoumání situace, kdy plyn není v rovnováze, ale má k ní velmi blízko. Kdyby se plyn odchýlil hodně od rovnováhy, nastaly by pro nás velké komplikace, ale v blízkosti rovnováhy se nám podaří snadno určit, co se děje. Musíme se vrátit ke kinetické teorii. Statistická mechanika a termodynamika se týkají rovnovážné situace. Chceme-li však zjistit, co se děje mimo rovnováhu, musíme si všimnout takřka každému atomu za atomem.

Jako jednoduchý příklad nerovnovážné situace uvažujme difuzi iontů v plynu. Předpokládejme, že v plynu se nachází poměrně málo iontů – elektricky nabitých molekul. Působí-li na plyn elektrické pole, bude na každý iont působit síla, jež se liší od síly působící na neutrální molekulu plynu. Kdyby nebyly jiné molekuly, iont by měl konstantní zrychlení, dokud by nedosáhl stěny nádoby. Přítomnost ostatních molekul však způsobuje, že se bude chovat jinak; jeho rychlost bude vzrůstat jen do té doby, dokud se nesrazí s nějakou molekulou a neztratí svou hybnost. Pak znovu začne nabírat rychlost, ale opět ztratí svou hybnost. Výsledek je takový, že iont se pohybuje po nepravidelné dráze, ale přitom se posouvá ve směru elektrického pole. Pozorujeme, že iont driftuje střední rychlostí, která je úměrná elektrickému poli – čím je pole silnější, tím se iont pohybuje rychleji. Zatímco pole působí a iont se podél něho pohybuje, samozřejmě *nenastala* tepelná rovnováha, ale systém se snaží dostat do rovnováhy, v níž se ionty rozloží na koncích nádoby. Pomocí kinetické teorie můžeme vypočítat driftovou rychlost.

Ukazuje se, že naše současné matematické schopnosti nestačí. K *přesnému* výpočtu toho, co se stane, ale můžeme získat přibližné výsledky, které nám ukážou všechny podstatné rysy problému. Můžeme určit, jak se bude měnit situace s tlakem, teplotou atd., ale nemůžeme přesně vypočítat číselné koeficienty před takovými výrazy. Proto se při našem odvození nebudeme starat

o přesné hodnoty číselných koeficientů. Ty je možné získat jen velmi důmyslným matematickým postupem.

Dříve než budeme uvažovat, co se stane v nerovnovážných situacích, musíme si pozorněji všimnout, co se odehrává v plynu, který je v tepelné rovnováze. Například musíme znát průměrnou dobu mezi po sobě následujícími srážkami molekuly.

Každá molekula projde posloupností srážek s jinými molekulami – to se samozřejmě děje náhodně. Vybraná molekula narazí za dlouhý časový interval  $T$   $N$ krát. Zdvoujnásobíme-li časový interval, zdvojnásobí se počet nárazů. Počet srážek je tedy úměrný času  $T$ . Můžeme ho vyjádřit následující způsobem

$$N = \frac{T}{\tau}. \quad (43.1)$$

Koeficient úměrnosti jsme napsali jako  $1/\tau$ , kde  $\tau$  má rozměr času. Konstanta  $\tau$  je *střední doba* mezi dvěma srážkami. Například předpokládáme-li, že za hodinu se uskuteční 60 srážek, potom  $\tau$  je jedna minuta. Říkáme, že  $\tau$  (jedna minuta) je *střední doba* mezi srážkami.

Často máme odpovědět na takovou otázku: „Jaká je *pravděpodobnost*, že molekula podstoupí srážku v průběhu *krátkého časového intervalu*  $dt$ “ Dovtšípíme se, že odpověď je  $dt/\tau$ . Pokusme se uvést přesvědčivější argument. Předpokládejme, že máme velmi velký počet molekul  $N$ . Kolik z nich se srazí v průběhu časového intervalu  $dt$ ? Existuje-li rovnováha, pak se v *průměru* s časem nic nemění. Proto se  $N$  molekul srazí za dobu  $dt$  právě tolikrát jako jedna molekula za dobu  $Ndt$ . O tomto počtu však víme, že je roven  $N dt/\tau$ . Počet nárazů  $N$  molekul za dobu  $t$  je  $N dt/\tau$  a pravděpodobnost srážky nějaké molekuly je  $1/N$ -tá část této veličiny, tedy  $(1/N)(N dt/\tau) = dt/\tau$ , ve shodě s naším původním tvrzením. Můžeme to říci i tak, že ze všech molekul podstoupí srážku za čas  $dt$  část, která je rovna  $dt/\tau$ . Pro ilustraci předpokládejme, že  $\tau$  je rovno jedné minutě; pak se za sekundu srazí jedna šedesátina všech molekul. To znamená, že když se 1/60 molekul dostala do dostatečné blízkosti těch, s nimiž se má srazit, uskuteční se jejich srážky v následující minutě.

Říkáme-li, že  $\tau$  (střední doba mezi srážkami) je jedna minuta, nemyslíme tím, že srážky jsou navzájem odděleny přesně minutovými intervaly. Určitá částice může po srážce čekat i déle než minutu, dokud se nezúčastní další srážky. Intervaly mezi následujícími srážkami se dost mění. I když to nebudeme potřebovat k našim dalším úvahám, trochu odbočíme a položíme si otázku: „Jaké jsou časové intervaly mezi srážkami?“ Už víme, že v uvedeném případě je *střední doba* rovna jedné minutě, ale může nás například zajímat, jaká je pravděpodobnost, že se v průběhu *dvou* minut neuskuteční žádná srážka.

Odpovíme na obecnější otázku: „Jaká je pravděpodobnost toho, že se molekula nesrazí za dobu  $t$  ani jednou?“ V určitém libovolném okamžiku – nazveme ho  $t = 0$  – začneme pozorovat určitou molekulu. Jaká je pravděpodobnost, že vydrží až do okamžiku  $t$ , aniž by se srazila s jinou molekulou? Abychom mohli tuto pravděpodobnost vypočítat, pozorujme, co se stane se všemi  $N_0$  molekulami v nádobě. Po čase  $t$  se některé z nich srazí. Nechť  $N(t)$  je počet těch molekul, které se *nesrazily* až do okamžiku  $t$ .  $N(t)$  musí být samozřejmě menší než  $N_0$  a my ho umíme určit, neboť víme, jak se mění s časem. Víme-li, že za dobu  $t$  zůstalo bez srážek  $N(t)$  molekul, potom  $N(t + dt)$  je počet molekul, jež zůstaly bez srážek až do okamžiku  $t + dt$ . Tento počet je *menší* než  $N(t)$  o ty molekuly, jež se srazily v intervalu  $dt$ .

Počet molekul, které se srazily v intervalu  $dt$ , jsme vyjádřili již dříve pomocí střední doby  $\tau$  ve tvaru:  $dN = N(t) d(t)/\tau$ . Tak přicházíme k rovnici

$$N(t + dt) = N(t) - N(t) \frac{dt}{\tau}. \quad (43.2)$$



Veličinu, která je na levé straně této rovnice,  $N(t + dt)$ , můžeme ve shodě s pravidly diferenciálního počtu vyjádřit jako  $N(t) + (dN/dt) dt$ . Takovou substitucí přechází rovnice (43.2) na tvar

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau}. \quad (43.3)$$

Počet molekul, které se srážejí v intervalu  $dt$ , je úměrný počtu molekul, které se dosud nesrazily a nepřímo úměrný střední době života  $\tau$ . Rovnici (43.3) můžeme snadno integrovat, přepíšeme-li ji do podoby

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\frac{dt}{\tau}. \quad (43.4)$$

Obě strany rovnice jsou úplnými diferenciály, a proto integrálem této rovnice je

$$\ln N(t) = -\frac{t}{\tau} + \text{konstanta}, \quad (43.5)$$

neboli

$$N(t) = \text{konstanta} e^{-t/\tau}. \quad (43.6)$$

Víme, že konstanta se musí rovnat  $N_0$ , celkovému počtu molekul, protože v počátečním okamžiku  $t = 0$  všechny čekají na „následující“ srážku. Získaný výsledek můžeme napsat ve tvaru

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}. \quad (43.7)$$

Chceme-li určit pravděpodobnost  $P(t)$  toho, že se molekula nesrazí, musíme  $N(t)$  dělit veličinou  $N_0$ , a tak dostaneme

$$P(t) = e^{-t/\tau}. \quad (43.8)$$

Dospěli jsme tedy k výsledku: Pravděpodobnost toho, že určitá molekula přežije čas  $t$  beze srážky, je rovna  $e^{-t/\tau}$ , kde  $\tau$  je střední doba mezi srážkami. Pravděpodobnost je na počátku, pro  $t = 0$ , rovna jedné (jistota) a klesá s růstem  $t$ . Pravděpodobnost, že se molekula nesrazí během doby  $\tau$ , je rovna  $e^{-1}$ , tedy 0,37 ... Pravděpodobnost toho, že mezi dvěma srážkami uplyne delší doba než  $\tau$ , je menší než jedna polovina. To je v pořádku, neboť existuje dost takových molekul, které se nesrazí za *mnohem delší dobu*, než je střední doba *mezi srážkami*, takže průměr může stále být roven  $\tau$ .

Původně jsme definovali  $\tau$  jako střední dobu *mezi srážkami*. Výsledek, který jsme získali v rovnici (43.7) nám říká, že střední doba od *libovolného časového okamžiku* po další srážku je také rovna  $\tau$ . Tuto do určité míry překvapující skutečnost můžeme demonstrovat následujícím způsobem. Počet molekul, které absolvují *následující srážku* v intervalu  $dt$  v čase  $t$  od libovolně zvoleného časového počátku, je roven  $N(t) dt/\tau$ . Jejich „doba do následující srážky“ je právě  $t$ . „Střední dobu do následující srážky“ získáme standardním způsobem

$$\text{střední doba do následující srážky} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \frac{N(t) dt}{\tau}.$$

Dosadíme-li za  $N(t)$  výsledek, který dává vztah (43.7) a vypočítáme integrál, skutečně zjistíme, že  $\tau$  je střední doba od libovolného okamžiku po následující srážku.

## 43.2 STŘEDNÍ VOLNÁ DRÁHA

Jiný způsob popisu srážek je takový, že nemluvíme o době mezi srážkami, ale o tom, jak daleko se částice dostane mezi srážkami. Víme-li, že střední doba mezi srážkami je  $\tau$  a molekuly mají střední rychlost  $v$ , pak střední vzdálenost mezi srážkami, kterou označíme  $l$ , bude součin  $\tau$  a  $v$ . Tuto vzdálenost mezi srážkami obvykle nazýváme *střední volnou dráhou*

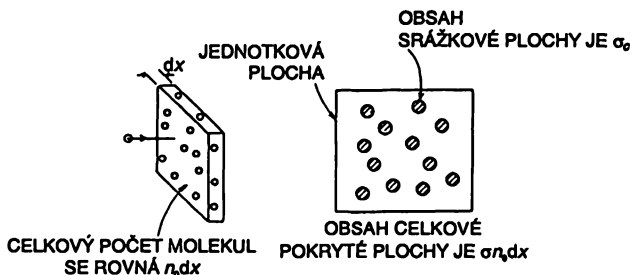
$$\text{střední volná dráha } l = \tau v. \quad (43.9)$$

V této kapitole se nebudeme příliš trápit tím, jaký průměr máme v jednotlivých případech na mysli. Různé druhy průměrů – střední hodnota, střední kvadratická hodnota atd. – jsou ve skutečnosti téměř stejné a liší se pouze koeficienty, které jsou blízké jedné. Protože k získání přesných numerických koeficientů by bylo třeba provést podrobnou analýzu, nemá smysl se znepokojovat tím, jaký máme třeba v jednotlivých případech brát průměr. Chtěli bychom také upozornit čtenáře, že symboly, jež používáme pro některé fyzikální veličiny (např.  $l$  pro střední volnou dráhu), nejsou obecně přijaty prostě proto, že v tomto směru neexistuje obecná dohoda.

Protože je pravděpodobnost toho, že se molekula srazí v krátkém časovém intervalu  $dt$ , rovna  $dt/\tau$ , bude pravděpodobnost toho, že se srazí při průletu vzdálenosti  $dx$ , rovna  $dx/l$ . Pomocí těchto argumentů, které už byly použity dříve, může čtenář sám dokázat, že molekula projde vzdálenost  $x$  bez absolvování další srážky s pravděpodobností  $e^{-x/l}$ .

Střední vzdálenost, kterou molekula projde dřív než se srazí s jinou molekulou – střední volná dráha  $l$  – bude záviset na tom, kolik molekul je v jejím okolí a na „velikosti“ molekul, tj. na tom, jak velký představují cíl. Účinnou „velikost“ terče při srážce obvykle popisujeme pomocí „srážkového průřezu“, tedy stejně jako v jaderné fyzice nebo v úlohách o rozptylu světla.

Uvažujme pohybující se částici, jež prochází vzdálenost  $dx$  plynem obsahujícím  $n_0$  rozptylujících center (molekul) v jednotkovém objemu (obr. 43.1). Na každé jednotkové ploše kolmé ke směru pohybu naší vybrané částice bychom našli  $n_0 dx$  molekul. Představuje-li každá účinnou srážkovou plochu, nebo jak se obvykle říká „účinný srážkový průřez“  $\sigma_c$ , pak je obsah celkové plochy pokryté rozptylujícími centry roven  $\sigma_c n_0 dx$ .



Obr. 43.1 Srážkový průřez

„Srážkovým průřezem“ rozumíme plochu, v níž se musí nacházet střed naší částice, má-li se tato srazit s určitou molekulou. Kdyby molekuly byly malé kuličky (klasická představa), mohli bychom očekávat, že  $\sigma_c = \pi (r_1 + r_2)^2$ , kde  $r_1$  a  $r_2$  jsou poloměry srážejících se objektů. Pravděpodobnost, že se naše částice srazí, je poměr plochy pokryté rozptylujícími molekulami k celkové

ploše, již jsme si zvolili jako jednotkovou. Pravděpodobnost srážky při projití vzdálenosti  $dx$  je proto rovna  $\sigma_c n_0 dx$ :

$$\text{pravděpodobnost srážky na vzdálenosti } dx = \sigma_c n_0 dx. \quad (43.10)$$

Uvedli jsme, že pravděpodobnost srážky na vzdálenosti  $dx$  můžeme vyjádřit pomocí střední volné dráhy jako  $dx/l$ . Porovnáme-li tento výraz s výrazem (43.10), dostaneme vztah mezi střední volnou dráhou a účinným srážkovým průřezem

$$\frac{1}{l} = \sigma_c n_0. \quad (43.11)$$

Lépe si ho zapamatujeme, když ho napíšeme ve tvaru

$$\sigma_c n_0 l = 1. \quad (43.12)$$

Tento vztah vlastně říká, že prochází-li částice vzdálenost  $l$ , na níž rozptylující molekuly pokrývají celou plochu, vyskytne se v průměru jedna srážka. Ve válcovém objemu délky  $l$  a základně, kterou je jednotková plocha, se nachází  $n_0 l$  rozptylujících objektů; má-li každý z nich plochu  $\sigma_c$ , je celková pokrytá plocha rovna  $n_0 l \sigma_c$ , což je právě jednotková plocha. Samozřejmě, celá plocha není pokryta, neboť některé molekuly jsou částečně skryté za jinými. Proto se některé molekuly dostanou před srážkou do větší vzdálenosti než  $l$ . Jen v průměru se molekuly srazí během doby, za níž projdou vzdálenost  $l$ . Z měření střední volné dráhy  $l$  můžeme určit účinný průřez rozptylu  $\sigma_c$  a porovnat výsledky s výpočty využívajícími podrobnou teorii atomové struktury. To už je však jiné téma. Proto se vrátíme k problému nerovnovážných vztahů.

### 43.3 DRIFTOVÁ RYCHLOST

Chceme popsat, co se stane s molekulou nebo několika molekulami, které se určitým způsobem liší od převážné většiny molekul plynu. O „většině“ molekul budeme mluvit jako o molekulách „pozadí“ a o molekulách, které se liší od molekul pozadí, jako o „zvláštních“ molekulách nebo v krátkosti o  $Z$ -molekulách. Molekula může být zvláštní z mnoha důvodů. Může být těžší než molekuly pozadí. Může být chemicky odlišná. Může mít elektrický náboj – tj. být iontem na pozadí nenabitých molekul. V důsledku jiných hmotností nebo nábojů mohou na  $Z$ -molekuly působit jiné síly než na molekuly pozadí. Zjistíme-li, co se děje s takovými  $Z$ -molekulami, pochopíme základní jevy, které se podobným způsobem uplatňují v rozmanitých situacích. Vzpomeňme alespoň některé z nich: difuze plynů, elektrický proud v bateriích, sedimentace, separace pomocí odstředivky atd.

Zpočátku se soustředíme na základní proces: na  $Z$ -molekulu na pozadí plynu působí určitá specifická síla  $F$  (může to být např. gravitační nebo elektrická síla) a navíc síly v důsledku srážek s molekulami pozadí. Chceme určit *obecný* charakter chování  $Z$ -molekuly. Detailní pohled na  $Z$ -molekulu by ukázal, jak se pod vlivem neustálých srážek s jinými molekulami pohybuje sem a tam. Při pozornějším sledování bychom zjistili, že vykazuje určitý výsledný pohyb ve směru síly  $F$ . Současně s neuspořádaným pohybem je molekula unášena určitým směrem; tento unášivý pohyb nazýváme drift. Zajímá nás jaká je *rychlost driftu* způsobovaného silou  $F$ .

Začneme-li si v určitém časovém okamžiku všmat  $Z$ -molekuly, můžeme očekávat, že se nachází někde mezi dvěma srážkami. Kromě rychlosti, jež molekule zůstala po poslední srážce, získává molekula určitou složku rychlosti v důsledku působení síly  $F$ . Za krátkou dobu (v průměru za dobu  $\tau$ ) se molekula srazí a začne se pohybovat na novém úseku své dráhy. Bude mít novou startovací rychlost, ale stejné zrychlení vyvolané silou  $F$ .

Abychom si zjednodušili situaci, zatím předpokládáme, že po každé srážce bude naše  $Z$ -molekula startovat úplně od začátku. Tím myslíme to, že molekula si už nepamatuje své předcházející urychlování silou  $F$ . Takový předpoklad bude opodstatněný tehdy, bude-li naše molekula mnohem lehčí než molekuly pozadí, ale nemůžeme očekávat jeho obecnou platnost. Později tento předpoklad upřesníme.

Zatím tedy předpokládáme, že všechny směry rychlosti  $Z$ -molekuly jsou po srážce stejně pravděpodobné. Startovací rychlost směřuje molekulu do libovolného směru s úplně stejnou pravděpodobností, nepřispívá k uspořádanému pohybu, a proto se nemusíme starat o počáteční rychlost po každé srážce... Kromě náhodného pohybu bude mít každá  $Z$ -molekula v každém okamžiku ještě rychlost ve směru síly  $F$ , jež narůstá od poslední srážky. Jaká je *střední* hodnota této části rychlosti? Je to právě součin zrychlení  $F/m$  (kde  $m$  je hmotnost  $Z$ -molekuly) a střední doby od poslední srážky. Jenže střední doba *od poslední srážky* musí být stejná jako střední doba *před poslední srážkou* a tu jsme už označili  $\tau$ . Střední rychlost pocházející od síly  $F$  je vlastně driftová rychlost, a tak máme vztah

$$v_{\text{dr}} = \frac{F\tau}{m}. \quad (43.13)$$

Tento základní vztah je jádrem našeho předmětu. Při určování  $\tau$  můžeme narazit na komplikace, ale základní proces je definován rovnicí (43.13).

Všimněte si, že driftová rychlost je *úměrná* síle. Bohužel neexistuje obecně používaný název pro koeficient úměrnosti. Pro různé síly má tento koeficient různé názvy. Je-li v případě elektrického pole síla vyjádřena jako součin náboje a intenzity pole  $F = qE$ , pak koeficient úměrnosti mezi rychlostí a elektrickým polem  $E$  nazýváme obvykle „pohyblivostí“. Přes možnost určitých nedorozumění *nazveme pohyblivostí* poměr driftové rychlosti k síle v případě *libovolných* sil. Budeme obecně psát

$$v_{\text{dr}} = \mu F \quad (43.14)$$

a  $\mu$  budeme nazývat pohyblivostí. Z rovnice (43.13) vyplývá, že

$$\mu = \frac{\tau}{m}. \quad (43.15)$$

Pohyblivost je přímo úměrná střední době mezi srážkami (jsou-li srážky méně časté, budou molekuly méně brzděny) a nepřímo úměrná hmotnosti (větší setrvačnost znamená menší zrychlení získané mezi srážkami).

Abychom v rovnici (43.13), která je nepochybně správná, našli správný číselný koeficient, musíme být dost opatrní. Nemáme v úmyslu vnášet do problému pochybnosti, ale chceme upozornit, že jen svědomitým a podrobným studiem můžeme pochopit, že používané argumenty mají hluboký podtón. K ilustraci toho, s jakými těžkostmi se můžeme setkat i přes zdánlivou

samozřejmost, použijeme zdánlivě rozumným, ale v podstatě chybným způsobem argument, který vedl k rovnici (43.13) (a s tím se bohužel setkáte v mnoha učebnicích!).

Mohli bychom uvažovat takto: Střední doba mezi srážkami je  $\tau$ . Po srážce částice startuje s náhodnou rychlostí, ale získává dodatečnou rychlost mezi srážkami a ta je rovna součinu zrychlení a času. Když se dostane k *další* srážce za dobu  $\tau$ , dosáhne rychlost  $(F/m)\tau$ . V okamžiku srážky má nulovou rychlost. Proto mezi dvěma srážkami má v průměru rychlost rovnající se polovině výsledné rychlosti a střední driftová rychlost unášená je  $1/2 F\tau/m$ . (Nesprávně!) Tento výsledek je nesprávný, ale rovnice (43.13) je správná, i když argumenty vypadají rovnocenné. Nesprávnost našeho druhého postupu má hlubší příčinu, která souvisí s následujícím. Argumentujeme tak, jakoby všechny srážky byly navzájem časově vzdálené o hodnotu  $\tau$ . Jenže některé doby mezi srážkami jsou kratší než střední doby a některé zase delší. Krátké doby se vyskytují *častěji*, ale *méně* přispívají k driftové rychlosti, neboť v takových případech je menší pravděpodobnost skutečného postupu vpřed. Kdybychom vzali v úvahu rozdělení dob mezi srážkami, mohli bychom ukázat, že faktor  $1/2$  vystupující v naší druhé argumentaci se neobjeví. Chyby jsme se dopustili tím, že jsme se příliš zjednodušeně pokusili dát do souvislosti *střední konečnou rychlost* se samotnou střední rychlostí. Tato souvislost vůbec není jednoduchá, a proto je lépe soustředit pozornost na to, co je v našem případě potřebné, a tím je právě střední rychlost. Naš první argument určuje střední rychlost přímo – a správně! Po tom, co jsme řekli, bude snad jasné, proč jsme se při našem jednoduchém odvozování nepokusili o přesné určení všech číselných koeficientů!

Vraťme se nyní k našemu zjednodušujícímu předpokladu, že každá srážka vymaže informaci o předcházejícím pohybu – že po každé srážce nastupuje částice k novému startu. Předpokládejme, že naše Z-molekula je těžký objekt na pozadí lehčích molekul. Potom Z-molekula neztratí při každé srážce celkovou hybnost svého uspořádaného pohybu. K tomu, aby se její pohyb stal opět náhodným, bude potřeba několika srážek. Místo toho budeme předpokládat, že při každé srážce – v průměru za dobu  $\tau$  – ztrácí určitou část své hybnosti. Nebudeme se zabývat podrobnostmi takového postupu. Uvedeme jen, že výsledek je rovnocenný záměně střední srážkové doby  $\tau$  novou – a delší – dobou  $\tau$ , jež odpovídá střední „době zapomínání“, tj. střední době potřebné k zapomenutí směru hybnosti. Při takové interpretaci  $\tau$  můžeme použít vztah (43.15) i v situacích, které nejsou tak jednoduché, jak jsme původně předpokládali.

## 43.4 IONTOVÁ VODIVOST

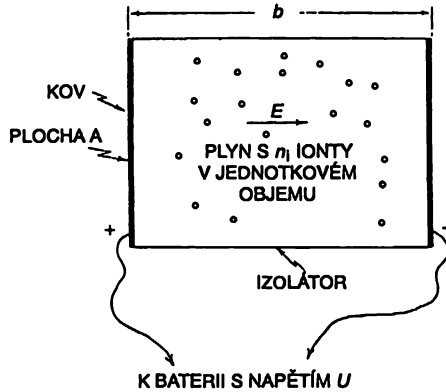
Aplikujme naše výsledky na speciální případ. Předpokládejme, že v nádobě s plynem se nacházejí i některé ionty – atomy nebo molekuly s nadbytečným elektrickým nábojem. Situace je schematicky znázorněna na *obr. 43.2*. Jsou-li dvě protilehlé stěny nádoby kovové desky, můžeme je připojit k pólům baterie a vytvořit tak v plynu elektrické pole. Elektrické pole se projeví silou působící na ionty, které tak budou driftovat k jedné nebo k druhé desce. Vytvoří se elektrický proud a plyn se svými ionty se bude chovat jako rezistor. Pomocí driftové rychlosti můžeme vypočítat iontový proud a odpor. Zajímá nás hlavně závislost elektrického proudu na rozdílu potenciálů  $U$  na kovových deskách.

Nechť má naše nádoba tvar kvádru, který má délku  $b$  a obsah průřezu  $A$  (*obr. 43.2*). Je-li rozdíl potenciálů, tedy napětí mezi deskami,  $U$ , pak je elektrické pole  $E$  mezi deskami rovno  $U/b$ . (Elektrický potenciál je práce potřebná k přenesení jednotkového náboje z jedné desky na druhou. Síla působící na jednotkový náboj je  $E$ . Je-li  $E$  stejné všude mezi deskami, což můžeme

## IONTOVÁ VODIVOST

v našem případě předpokládat, pak je práce připadající na jednotkový náboj rovna  $Eb$ , takže  $U = Eb$ .) Síla působící na iont plynu je rovna  $qE$ , kde  $q$  je náboj iontu. Driftová rychlost iontu je součin  $\mu$  a této síly, tedy

$$v_{dr} = \mu F = \mu q E = \mu q \frac{U}{b}. \quad (43.16)$$



Obr. 43.2 Elektrický proud v ionizovaném plynu

Elektrický proud  $I$  je tok náboje za jednotku času. Elektrický proud k jedné z desek je roven celkovému náboji iontů, jež dopadly na desku za jednotku času. Jsou-li ionty unášeny k desce rychlostí  $v_{dr}$ , pak ty, které nejsou od desky dále než  $(v_{dr} \cdot T)$ , dosáhnou desky v čase  $T$ . Je-li v jednotkovém objemu  $n_i$  iontů, pak počet těch, které dopadnou na desku za dobu  $T$ , je roven  $n_i \cdot A \cdot v_{dr} \cdot T$ . Každý iont nese náboj  $q$ , a proto

$$\text{náboj dopadající za dobu } T = q n_i A v_{dr} T. \quad (43.17)$$

Proud  $I$  představuje takový náboj dělený časem  $T$ , tedy

$$I = q n_i A v_{dr}. \quad (43.18)$$

Dosadíme-li za  $v_{dr}$  výraz (43.16), dostaneme

$$I = \mu q^2 n_i \frac{A}{b} U. \quad (43.19)$$

Zjistili jsme, že proud je přímo úměrný napětí, což vlastně představuje Ohmův zákon. Odpor  $R$  je reciprokou hodnotou konstanty úměrnosti

$$\frac{1}{R} = \mu q^2 n_i \frac{A}{b}. \quad (43.20)$$

Našli jsme vztah mezi odporem a molekulárními vlastnostmi  $n_i$ ,  $q$ ,  $\mu$ , které opět závisí na  $m$  a  $\tau$ . Najdeme-li  $n_i$  a  $q$  z atomových měření, potom změřením odporu  $R$  nám umožňuje určit  $\mu$  a pomocí  $\mu$  také  $\tau$ .

### 43.5 MOLEKULOVÁ DIFUZE

Nyní přejdeme k jinému problému, který vyžaduje jiný způsob analýzy. Takovým problémem je teorie difuze. Předpokládejme, že máme nádobu s plynem, jenž se nachází v tepelné rovnováze, a do takového plynu zavedeme v některém místě nádoby malé množství jiného plynu. Původní plyn budeme nazývat plynem „pozadí“ a nový plyn „zvláštním“ plynem. Zvláštní plyn se začne šířit do celé nádoby, ale toto šíření bude pomalé, neboť v nádobě je už přítomný plyn pozadí. Tento proces pomalého šíření se nazývá difuze. Difuze je ovlivňována hlavně srážkami molekul zvláštního plynu s molekulami plynu pozadí. Po velkém počtu srážek se zvláštní molekuly víceméně rovnoměrně rozšíří po celé nádobě. Musíme však být opatrní, abychom nezaměňovali difuzi plynu s přenosem větších hmot v důsledku konvexních proudů. Obecně probíhá mísení dvou plynů jako kombinace konvece a difuze. My se nyní zajímáme jen o takový případ, kdy nedochází k proudění. Plyn se šíří jen v důsledku molekulového pohybu, difuzí. Chceme určit, jak rychle difuze probíhá.

Vypočítejme čistý výsledný tok molekul zvláštního plynu způsobovaný molekulovým pohybem. Čistý výsledný tok bude existovat jen tehdy, je-li rozdělení molekul nehomogenní, neboť v opačném případě dá molekulový pohyb v průměru nulový čistý výsledný tok. Uvažujme nejdříve tok ve směru osy  $x$ . Abychom ho určili, představme si rovinu kolmou k ose  $x$  a počítejme zvláštní molekuly, které projdou napříč touto rovinou. Abychom získali čistý výsledný tok, budeme považovat za kladné ty molekuly, které přicházejí do oblasti kladných hodnot  $x$  a od nich odečítáme ty, které přicházejí do oblasti záporných hodnot  $x$ . Jak jsme už mnohokrát viděli, počet molekul, které procházejí plochou za dobu  $\Delta T$ , je roven počtu molekul, které se na začátku intervalu  $\Delta T$  nacházely v objemu ohraničeném uvažovanou plochou a plochou, která je od ní vzdálena o  $v\Delta T$ . (Musíme si uvědomit, že  $v$  je zde skutečně molekulová rychlost a ne rychlost driftová.)

Výpočty si zjednodušíme, zvolíme-li si naši plochu jednotkovou. Počet zvláštních molekul, které přicházejí zleva doprava (za kladný směr osy  $x$  považujeme směr doprava), je pak roven  $n_- v\Delta T$ , kde  $n_-$  je počet zvláštních molekul v jednotkovém objemu na levé straně (až na nějaký koeficient, jako třeba 2, ale takové koeficienty ignorujeme!). Počet těch molekul, které přecházejí zprava doleva je zase  $n_+ v\Delta T$ , kde  $n_+$  je koncentrace zvláštních molekul na pravé straně roviny. Označíme-li molekulový proud symbolem  $J$  a budeme jím rozumět čistý výsledný tok molekul jednotkovou plochou za jednotku času, můžeme psát

$$J = \frac{n_- v\Delta T - n_+ v\Delta T}{\Delta T}, \quad (43.21)$$

nebo

$$J = (n_- - n_+)v. \quad (43.22)$$

Co je třeba rozumět pod  $n_-$  a  $n_+$ ? Když říkáme „koncentrace na levé straně“, jak daleko nalevo máme na mysli? Musíme vybrat koncentraci v tom místě, odkud molekula zahájila svůj „let“, neboť počet molekul, které nastoupily tuto cestu je dán počtem molekul, které byly ve výchozím místě. Pod  $n_-$  tedy musíme rozumět koncentraci v takové vzdálenosti vlevo od námi uvažované roviny, která je rovna střední volné dráze  $l$  a pod  $n_+$  koncentraci ve vzdálenosti  $l$  vpravo.

Rozdělení našich zvláštních molekul v prostoru je vhodné popisovat spojitou funkcí  $x$ ,  $y$ , a  $z$ , kterou označíme  $n_a$ . Pod  $n_a(x, y, z)$  rozumíme koncentraci zvláštních molekul v malém

objemovém elementu v okolí bodu  $(x, y, z)$ . Pomocí  $n_a$  můžeme vyjádřit rozdíl  $(n_+ - n_-)$  takto

$$(n_+ - n_-) = \frac{dn_a}{dx} \Delta x = \frac{dn_a}{dx} \cdot 2l. \quad (43.23)$$

Dosadíme-li tento výsledek do rovnice (43.22) a zanedbáme koeficient 2, dostaneme

$$J_x = -lv \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.24)$$

Zjistili jsme, že tok zvláštních molekul je přímo úměrný derivaci koncentrace, kterou někdy nazýváme „gradientem“ koncentrace.

Je jasné, že jsme použili několik hrubých přiblížení. Kromě některých číselných koeficientů, jež jsme vynechali, jsme používali  $v$  tam, kde mělo být  $v_x$ , a předpokládali jsme, že  $n_+$  a  $n_-$  se vztahují k místům, jež jsou v kolmé vzdálenosti  $l$  od zvolené plochy, zatímco v případě molekul, které neletí kolmo k ploše, odpovídá  $l$  šikmé vzdálenosti. Tyto nepřesnosti však můžeme odstranit; jako výsledek pečlivější analýzy bychom dostali korekci pravé strany rovnice (43.24), která spočívá v jejím násobení koeficientem  $1/3$ . Přesnější rovnice má tvar

$$J_x = -\frac{lv}{3} \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.25)$$

Podobné rovnice můžeme napsat pro proudy ve směru os  $y$  a  $z$ .

Proud  $J_x$  a gradient koncentrace  $dn_a/dx$  můžeme měřit makroskopickými pozorováními. Jejich poměr určený experimentem se nazývá „difuzní koeficient“  $D$ . Platí tedy vztah

$$J_x = -D \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.26)$$

Podařilo se nám ukázat, že v případě plynu můžeme očekávat

$$D_x = \frac{1}{3} lv. \quad (43.27)$$

V této kapitole jsme zatím uvažovali dva rozdílné procesy: *pohyblivost*, drift molekul v důsledku „vnějších“ sil, a *difuzi*, šíření molekul určené jen vnitřními silami, náhodnými srážkami. Mezi nimi však existuje souvislost, neboť oba tyto procesy podstatně závisí na tepelném pohybu a v obou výpočtech vystupuje střední volná dráha  $l$ .

Dosadíme-li v rovnici (43.25)  $l = v \tau$ ,  $\tau = \mu m$ , dostaneme

$$J_x = -\frac{1}{3} m v^2 \mu \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.28)$$

Jenže veličina  $m v^2$  závisí pouze na teplotě. Připomeňme si, že

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT, \quad (43.29)$$



## DIFUZE

takže

$$J_x = -\mu kT \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.30)$$

Zjistili jsme, že koeficient difuze je roven  $kT$ -násobku koeficientu *pohyblivosti*  $\mu$

$$D = \mu kT. \quad (43.31)$$

Ukazuje se, že číselný koeficient v (43.31) je správný a není třeba žádná korekce našich hrubých předpokladů. Lze ukázat, že vztah (43.31) je *obecně* správný – tedy i ve velmi složitých situacích (například jde-li o suspenzi v kapalině), v případech, kdy naše jednoduché výpočty nemůžeme vůbec použít.

Abychom ukázali, že vztah (43.31) má obecnou platnost, odvodíme ho nyní jinak – tak, že použijeme jen základní principy statistické mechaniky. Představme si situaci, kdy existuje gradient „zvláštních“ molekul a vzniká difuzní proud úměrný gradientu hustoty ve shodě se vztahem (43.26). Aplikujme silové pole ve směru osy  $x$  tak, že na každou zvláštní molekulu působí síla  $F$ . Podle *definice* pohyblivosti  $\mu$  bude driftová rychlost vyjádřena vztahem

$$v_{dr} = \mu F. \quad (43.32)$$

Použijeme-li obvyklé argumenty, dostaneme pro *proud unášený* (čistý výsledný počet molekul, které projdou jednotkovou plochu za jednotku času) vyjádření

$$J_{dr} = n_a v_{dr}, \quad (43.33)$$

nebo

$$J_{dr} = n_a \mu F. \quad (43.34)$$

*Nastavme* nyní sílu  $F$  tak, aby jí podmínečný driftový proud právě *vyvážil* difuzi, takže nebude existovat *čistý výsledný tok* zvláštních molekul. Pak máme  $J_x + J_{dr} = 0$ , a tedy

$$D \frac{dn_a}{dx} = n_a \mu F. \quad (43.35)$$

Za podmínky vyváženosti existuje stálý (v čase) gradient koncentrace vyjádřený vztahem

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a \mu F}{D}. \quad (43.36)$$

Uvažujme dále! Popisujeme *rovnovážnou* situaci, takže na ni můžeme aplikovat *rovnovážné* zákony statistické mechaniky. Podle těchto zákonů je pravděpodobnost nalezení molekuly v bodě se souřadnicí  $x$  úměrná  $\exp(-U/kT)$ , kde  $U$  je potenciální energie. Zajímáme-li se o koncentraci  $n_a$ , znamená to, že

$$n_a = n_0 \exp(-U/kT). \quad (43.37)$$

Derivujeme-li (43.37) podle  $x$ , dostaneme

$$\frac{dn_a}{dx} = -n_0 \exp(-U/kT) \frac{1}{kT} \frac{dU}{dx}, \quad (43.38)$$

neboli

$$\frac{dn_a}{dx} = -\frac{n_a}{kT} \frac{dU}{dx}. \quad (43.39)$$

V našem případě, kdy síla  $F$  působí ve směru osy  $x$ , bude potenciální energie  $U$  rovna  $-Fx$  a  $-dU/dx = F$ . Rovnice (43.39) proto nabývá tvaru

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a F}{kT}. \quad (43.40)$$

(To je právě rovnice (40.2), z níž jsme původně odvodili  $\exp(-U/kT)$ , a tak se vlastně uzavřel kruh.)

Porovnáme-li (43.40) s (43.36), dostaneme právě rovnici (43.31). Ukázali jsme, že rovnice (43.31), která dává do souvislosti difuzní proud a pohyblivost, má správný koeficient a je velmi obecná. Pohyblivost a difuze navzájem úzce souvisí. Tento vztah poprvé odvodil Einstein.

## 43.6 TEPELNÁ VODIVOST

Metody kinetické teorie, jež jsme používali, nám umožní vypočítat i *tepelnou vodivost* plynu. Je-li plyn v nádobě nahoře teplejší než dole, objeví se tepelný tok shora dolů. (Předpokládáme, že plyn je teplejší *nahoře*, neboť jinak by tekly konvexní proudy a nešlo by už o *tepelnou vodivost*.) Přenos tepla z teplejšího do chladnějšího plynu je difuzí „horkých“ molekul – těch, které mají větší energii – směrem dolů a difuzí „chladných“ molekul nahoru. K tomu, abychom určili tok tepelné energie, musíme znát energii přenašenou molekulami procházejícími elementem plochy směrem dolů a energii molekul pohybujícími se směrem nahoru. Rozdíl nám dá čistý výsledný tok energie směrem dolů.

Tepelná vodivost  $\kappa$  je definována jako poměr rychlosti přenosu tepelné energie jednotkovou plochou a gradientu teploty

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{dT}{dz}. \quad (43.41)$$

Výpočet je velmi podobný tomu, který jsme prováděli, když jsme uvažovali elektrický proud v ionizovaném plynu, proto ponecháme čtenáři jako cvičení ukázat, že platí

$$\kappa = \frac{knlv}{\gamma - 1}, \quad (43.42)$$

kde  $(\gamma - 1)kT$  je střední energie molekuly při teplotě  $T$ . Využijeme-li náš vztah  $n l \sigma_c = 1$ , budeme moci tepelnou vodivost vyjádřit ve tvaru

$$\kappa = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{kv}{\sigma_c}. \quad (43.43)$$

Dostali jsme dost překvapující výsledek. Víme, že střední rychlost molekul plynu závisí na teplotě, ale *nezávisí na hustotě*. Můžeme čekat, že  $\sigma_c$  závisí jen na velikosti molekul. Náš jednoduchý výsledek tedy říká, že tepelná vodivost  $\kappa$  (a proto i *rychlost* toku tepla za libovolných podmínek) *nezávisí na hustotě* plynul. Změna počtu „nosičů“ energie při změně hustoty je právě kompenzována větší vzdáleností, kterou „nosiče“ projdou mezi srážkami.

Můžete se ptát: „Bude tepelný tok nezávislý na hustotě plynu i v limitě, kdy se hustota bude blížit k nule? Když v nádobě nebude žádný plyn?“ Určitě ne! Vztah (43.3), právě tak jako ostatní vztahy této kapitoly, byl odvozen za předpokladu, že střední volná dráha mezi srážkami je mnohem menší než kterýkoliv z rozměrů nádoby. Je-li hustota plynu tak malá, že molekula má značnou pravděpodobnost proletět nádobu z jedné strany k druhé bez srážky, výsledky této kapitoly nemůžeme použít. V takových případech se musíme vrátit ke kinetické teorii a opět všechno podrobně vypočítat.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 43.1 ■ „Průměr“ molekuly kyslíku je přibližně roven  $d = 0,3$  nm. Vypočítejte střední volnou dráhu a střední dobu života mezi dvěma srážkami molekul kyslíku za normálního tlaku a teploty.
- 43.2 ■ Nádoba obsahuje  $10^{24}$  molekul plynu, přičemž střední volná dráha jedné molekuly je rovna  $l$ . Pro jakou délku dráhy  $L$  je pravděpodobnost toho, že alespoň některá z molekul proběhne v nádobě beze srážky dráhu delší než  $L$ , menší než 50 %?
- 43.3 ■ Je-li v látce přítomen teplotní gradient, dochází k přenosu tepla. Přitom energie přenesená za jednotku času je tomuto gradientu úměrná (neuvažujeme-li konvekci). Koeficient úměrnosti vztahený k jednotce plochy a jednotkovému teplotnímu gradientu se nazývá součinitel tepelné vodivosti  $\kappa$ . Je tedy  $\frac{dQ}{dt} = \kappa A \frac{dT}{dx}$ .
- Ukažte, že bez konvekce je součinitel tepelné vodivosti plynu roven  $\kappa = knv \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{kv}{\sigma_c}$ , kde  $k$  je Boltzmannova konstanta,  $n$  koncentrace molekul,  $v$  střední tepelná rychlost,  $l$  střední volná dráha,  $\gamma$  exponent v rovnici adiabaty a  $\sigma_c = 1/nl$ . Návod: interpretujte tepelnou vodivost jako přenos vnitřní (tepelné) energie  $U$  plochou uvnitř látky tak, jak jsme to dělali při zkoumání procesu difuze.
- 43.4 ■ Existuje-li v tekutině gradient rychlosti, při čemž se rychlost mění se vzdáleností ve směru kolmém ke směru proudění, dochází k brzdění pohybu, které nazýváme vazkostí (viskozitou, vnitřním třením). V plynu lze vazkost vysvětlit jako přenos hybnosti. Myslíme-li si v prostoru nějakou plošku, potom přenos hybnosti touto ploškou zprostředkují molekuly, které se nacházejí na obou stranách od ní ve vzdálenosti menší než střední volná dráha. Proudí-li plyn ve směru osy  $x$  a existuje-li gradient rychlosti  $v_x$  ve směru osy  $y$ , potom vazká síla vztahená k jednotce obsahu plochy kolmé k ose  $y$ , je rovna  $F/A = \eta dv_x/dy$ . Ukažte, že koeficient vazkosti plynu  $\eta$  je přibližně roven  $\eta = nvm l = \frac{vm}{\sigma_c}$ , kde  $n$  je koncentrace molekul,  $v$  střední tepelná rychlost,  $m$  hmotnost molekuly,  $l$  střední volná dráha a  $\sigma_c = 1/nl$ .
- 43.5 ■ Podotkněme, že tepelná vodivost a vazkost plynu nezávisí na tlaku. (Ovšem při velmi malých tlacích procesy přenosu energie a hybnosti v plynu už nemůžeme popisovat pomocí výše odvozených koeficientů tepelné vodivosti a vazkosti.) Upravte nyní vzorec pro energii přenášenou mezi dvěma plochami při teplotách  $T$  a  $T + \Delta T$  nacházejících se v pevné vzájemné vzdálenosti  $D \ll l$ . Totéž proveďte pro případ přenosu hybnosti mezi dvěma takovými plochami, které se pohybují rychlostmi  $v$  a  $v + \Delta v$ .
- 43.6 ■ Dva plyny  $A$  a  $B$  o koncentracích částic  $n_A$  a  $n_B$  mají určitou teplotu  $T_0$ . Jednotlivý iont, jehož pohyb sledujeme, má pohyblivost  $\mu_A$  v plynu  $A$  a pohyblivost  $\mu_B$  v plynu  $B$ . Jaká je pohyblivost iontu ve směsi těchto plynů o koncentraci  $n_A + n_B$  při téže teplotě  $T_0$ ?

# 44 Zákony termodynamiky

---

## 44.1 TEPELNÉ STROJE; PRVNÍ ZÁKON

## 44.2 DRUHÝ ZÁKON

## 44.3 VRATNÉ STROJE

## 44.4 ÚČINNOST IDEÁLNÍHO STROJE

## 44.5 TERMODYNAMICKÁ TEPLOTA

## 44.6 ENTROPIE

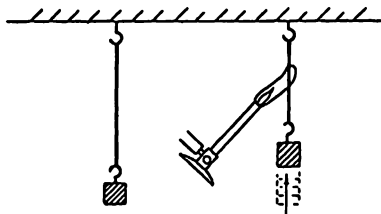
### 44.1 TEPELNÉ STROJE; PRVNÍ ZÁKON

Dosud jsme mluvili o vlastnostech hmoty z atomového hlediska a snažili jsme se aspoň zhruba pochopit, co se bude dít, předpokládáme-li, že hmota se skládá z atomů podléhajících určitým zákonům. Existuje však mnoho vztahů mezi vlastnostmi látek, k nimž můžeme dospět bez podrobné znalosti jejich struktury. Určování vztahů mezi různými vlastnostmi látek, bez poznání jejich vnitřní struktury je předmětem *termodynamiky*. Termodynamika vznikla dříve, než byla známa vnitřní struktura hmoty.

Uvedeme příklad: Z kinetické teorie víme, že tlak plynu je způsobován nárazy molekul a víme i to, že když plyn zahřejeme, nárazy molekul zesílí, a proto musí tlak vzrůst. Naopak, pohybuje-li se píst v nádobě s plynem proti síle těchto nárazů, energie molekul narážejících na píst vzroste, a proto vzroste i teplota. Zvýšíme-li tedy při daném objemu teplotu, zvýšíme tlak. Na druhé straně, stlačíme-li plyn, zjistíme, že jeho teplota vzrostla. Z kinetické teorie můžeme odvodit kvantitativní vztah mezi těmito dvěma jevy, ale instinktivně tušíme, že mezi nimi musí existovat nějaká souvislost, která nezávisí na konkrétním průběhu srážek.

Všimněme si jiného příkladu. Mnozí znáte zajímavou vlastnost gumy: Když roztáhneme pásek gumy, zahřeje se. Vložíte-li si takový pásek mezi rty a natáhnete ho, pocítíte, že se zahřál a toto zahřátí je vratné v tom smyslu, že při rychlém uvolnění pásku pocítíte na rtech ochlazení. To znamená, že při napínání pásek gumy hřeje a při uvolňování pásek chladí. Náš instinkt nám napoví, že zahřátá guma může tahat: skutečnost, že při napnutí se pásek zahřál, nás přivede k závěru, že zahřátí pásku vyvolá jeho smrštění. A skutečně, ohřejeme-li plynovým kahanem

pásek gumy držící závaží, zpozorujeme, že se pásek náhle stáhl (obr. 44.1). Je tedy pravda, že při zahřívání se guma smršťuje a tato skutečnost je ve shodě s tím, že při uvolňování jejího napětí guma chladne.

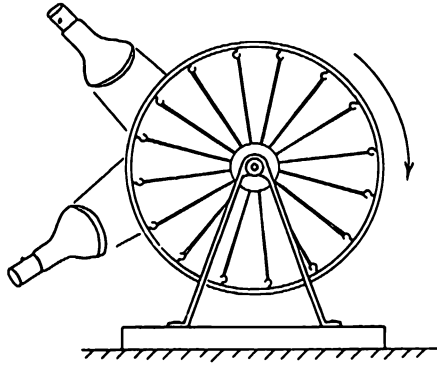


Obr. 44.1 Zahřátý pásek gumy

Vnitřní mechanismus gumy způsobující tyto jevy je velmi složitý. Popíšeme ho do určité míry z molekulového hlediska, i když hlavním cílem této kapitoly je pochopit vztahy mezi takovými jevy nezávisle na molekulovém modelu. Na základě molekulového modelu můžeme ukázat, že tyto jevy úzce souvisí. Jeden ze způsobů, jak můžeme pochopit chování gumy, spočívá v představě, že guma se skládá z ohromného svazku dlouhých molekulových řetězců, jakýchsi „molekulových špaget“ s jednou dodatečnou komplikací: řetězce jsou vzájemně propojeny – jakoby se některé křížem procházející špagety svařily a vytvořily tak velké klubko. Natahujeme-li takové klubko, některé z řetězců se snaží seřadit do směru tahu. Řetězce jsou zároveň v tepelném pohybu a neustále do sebe narážejí. Řetězec nezůstane sám od sebe natažen, neboť ze stran do něho narážejí jiné řetězce a jiné molekuly a přinutí ho opět se stáhnout. Skutečná příčina toho, že gumový pásek se snaží smrštít, spočívá v následujícím: když ho natáhneme, řetězce se prodlouží, ale tepelné působení molekul ze stran se snaží řetězce zkroutit, a tak je zkrátit. K příznivé situaci dochází tehdy, když jsou řetězce napnuty a zvýšíme teplotu; tehdy zesílí i bombardování řetězců ze stran, řetězce mají snahu se stáhnout a jsou proto při zahřátí schopny zdvihnout těžší závaží. Dovolíme-li pásku gumy po určitém čase napnutí se uvolnit, stane se každý řetězec měkčím a molekuly narážející do uvolněných řetězců ztrácejí energii. Proto teplota klesá.

Viděli jsme, jak kinetická teorie uvádí do souvislosti tyto dva procesy, smrštění při zahřívání a ochlazení během uvolňování, ale bylo by úžasné složitě určit přesný vztah mezi nimi z teorie. Museli bychom znát počet srážek za sekundu a tvar řetězců a vzít v úvahu všechny možné komplikace. Podrobnosti mechanismu jsou tak složité, že pomocí kinetické teorie opravdu nemůžeme přesně určit, co se odehrává; můžeme však odvodit určité vztahy mezi těmito pozorovanými jevy aniž bychom něco věděli o vnitřním mechanismu.

Celá termodynamika spočívá na úvahách následujícího druhu: protože pásek gumy je při vysokých teplotách „silnější“ než při nízkých, mělo by být možné zdvihnout závaží a přemísťovat je a konat tak práci pomocí tepla. Už jsme se vlastně experimentálně přesvědčili, že zahřátý pásek gumy může zdvihnout závaží. Rozvoj termodynamiky začal studiem toho, jak můžeme pomocí tepla konat práci. Můžeme sestavit zařízení, jež by ke konání práce využívalo vliv tepla na gumový pásek? Ano, takové zařízení můžeme sestavit, i když bude vypadat hloupě. Skládá se z kola bicyklu, které má místo drátů gumové pásky (obr. 44.2). Zahříváme-li gumové pásky na jedné straně kola dvojicí výhřevných lamp, stanou se „silnější“ než gumové pásky na druhé straně kola. Těžiště kola se posune na stranu, mimo ložisko, a kolo se pootočí. Tak se chladné gumové pásky dostanou k teplu, teplé se vzdálí a ochladí a kolo se bude pomalu otáčet, dokud budou lampy hřát.



Obr. 44.2 Tepelný stroj s pásky gumy

Účinnost takového stroje je mimořádně nízká. Výkon 400 wattů potřebný k ohřívání lamp stačí právě tak na zdvihnutí mouchy! Nabízí se proto zajímavá otázka, zda teplo může konat práci s podstatně vyšší účinností.

Zrod termodynamiky se vlastně váže na analýzu slavného inženýra Sadi Carnota, kterého zaujal problém konstrukce nejlepšího a neúčinnějšího stroje. Byl to jeden z mála pozoruhodných případů, kdy technika přispěla podstatným způsobem k fyzikální teorii. Jiným případem, který mě napadá, je analýza informační teorie podaná Claudem Shannonem. Mimochodem, tyto problémy úzce souvisí.

Parní stroj pracuje obvykle tak, že teplo ohně uvádí do varu vodu, a takto vytvořená pára se rozpíná, tlačí na píst a ten uvádí do chodu kolo. Takže pára zatlačí píst – a co potom s ní? Načatou činnost je třeba dokončit a bylo by hloupé skončit cyklus tím, že necháme páru uniknout do vzduchu, včdyt bychom museli stále dodávat vodu. Je levnější – účinnější – nechat proudit páru do jiné nádrže, kde ji zkondenzujeme studenou vodou a pak ji opět přečerpáme do kotle a zajistíme tak nepřetržitý oběh. Stroji tedy dodáváme teplo a to se přeměňuje na práci. Nebylo by lepší místo vody použít alkohol? Jakou vlastnost by mělo mít pracovní médium, aby se získal ten nejlepší stroj? Takovou otázku si položil Carnot a jedním z výsledků jeho bádání bylo objevení vztahů, o nichž jsme již mluvili.

Výsledky termodynamiky můžeme shrnout do určitých jednoduše vypadajících tvrzení, která nazýváme *termodynamické zákony*. Když žil Carnot, nebyl znám první zákon termodynamiky – zákon zachování energie. Carnot však své argumenty formuloval tak pečlivě, že jsou správné i přesto, že v jeho době nebyl první zákon znám! O něco později podal Clausius jednodušší odvození, jež bylo možné pochopit snáze než velmi precizní Carnotova argumentace. Clausius nepředpokládal obecně platnost zákona zachování energie, ale zákon zachování tepla podle teorie kalorika, která se později ukázala jako nesprávná. Proto se často Carnotovo uvažování pokládalo za nesprávné. Jeho logika však byla naprosto v pořádku, jen Clausiova zjednodušená verze, kterou každý četl, byla špatná.

Takzvaný druhý zákon termodynamiky byl tedy objeven Carnotem dříve než první zákon! Bylo by určitě zajímavé použít Carnotovy argumenty a neopírat se o první termodynamický zákon, ale nás zajímá především fyzika a ne historie, a proto budeme postupovat jinak. Hned zpočátku využijeme první zákon přesto, že mnoho by bylo možno udělat bez něho.

Začneme tím, že zformulujeme první zákon, zákon zachování energie: Máme-li nějaký systém, dodáváme mu teplo a konáme na něm práci, pak jeho energie vzroste o dodané teplo a vynaloženou práci. Můžeme to zapsat takto: teplo  $Q$  dodané systému plus vynaložená práce  $W$

## DRUHÝ ZÁKON

zvýšují energii systému  $U$  (tuto energii často nazýváme vnitřní energií)

$$\text{změna } U = Q + W. \quad (44.1)$$

Změnu  $U$  můžeme vyjádřit jako dodání malého množství tepla  $\Delta Q$  a malého množství práce  $\Delta W$

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W, \quad (44.2)$$

což je diferenciální forma tohoto zákona. To však velmi dobře víme z předcházející kapitoly.

### 44.2 DRUHÝ ZÁKON

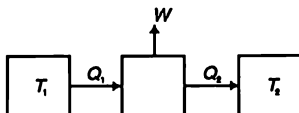
Co říká druhý termodynamický zákon? Víme, že když konáme práci například proti tření, bude práce, kterou takto ztrácíme, rovna vytvořenému teplu. Konáme-li práci v místnosti s teplotou  $T$  a konáme ji dostatečně pomalu, teplota místnosti se příliš nezmění a nám se podařilo přeměnit práci v teplo při dané teplotě. Je možný i obrácený proces? Můžeme zpátky přeměnit teplo v práci při dané teplotě? Druhý zákon termodynamiky nás ubezpečuje, že to není možné! Bylo by velmi výhodné, kdyby se dalo teplo přeměnit v práci pouhým obrácením takového procesu, jakým je tření. Kdybychom uvažovali jen zákon zachování energie, mohli bychom si myslet, že tepelná energie – taková jakou představují kmitavé pohyby molekul – by mohla být dobrým zdrojem užitečné energie. Carnot však vycházel z toho, že není možné získat energii z tepla při konstantní teplotě. Jinak řečeno, kdyby měl celý svět stejnou teplotu, nemohli bychom vůbec využít jeho tepelnou energii ke konání práce: proces proměny práce v teplo se může uskutečnit i při konstantní teplotě, avšak tento proces nemůžeme obrátit tak, abychom nazpět získali práci. Carnot konkrétně předpokládal, že při určité teplotě nemůžeme odebrat teplo a přeměnit ho v práci *bez nějaké jiné změny* v systému nebo v okolí.

Poslední výrok je velmi důležitý. Předpokládejme, že při určité teplotě máme v nádobě stlačený vzduch a ten necháme expandovat. Takový vzduch může konat práci; může například uvést do chodu sbíječku. Při expanzi se trochu ochladí, ale kdybychom měli velmi velký tepelný rezervoár s danou teplotou, třeba oceán, mohli bychom vzduch opět zahřát. Tak by se stalo, že z oceánu odebereme teplo a konáme práci se stlačeným vzduchem. Jenže Carnot se nedopustil chyby, *vždyť my jsme neponechali všechno v původním stavu*. Kdybychom znovu stlačili expandovaný vzduch, zjistili bychom, že konáme práci navíc, a po ukončení bychom pochopili, že jsme nejen nezískali žádnou práci ze systému při teplotě  $T$ , ale do systému jsme museli určitou práci vložit. Musíme mluvit jen o takových případech, kdy *čistým výsledkem* celého procesu je odebrání tepla a jeho přeměna v práci, tak jako při překonávání tření je *čistým výsledkem* přeměna práce v teplo. Kdybychom se pohybovali v kruhu, dostali bychom systém opět do výchozího stavu, ale s *čistým výsledkem*, že naše práce proti silám tření se přeměnila v teplo. Můžeme takový proces obrátit? Zkusme otočit vypínačem tak, aby vše proběhlo naopak a tření konalo práci proti nám a ochlazovalo oceán.

Podle Carnota to není možné! Tak tedy předpokládejme, že to není možné. Kdyby to bylo možné, znamenalo by to mezi jiným, že bychom mohli prostě odebrat teplo z chladného tělesa a beze všeho ho předat teplému tělesu. My však víme, že teplá tělesa ohřívají studená tělesa; kdybychom jen přiložili teplé těleso ke studenému a nic jiného bychom nezměnili, ze zkušenosti víme, že teplé těleso se nestane teplejším a chladné chladnějším! Kdybychom však mohli konat práci odebráním tepla oceánu nebo něčeho jiného při konstantní teplotě, tuto práci bychom



mohli přeměnit v teplo pomocí tření při nějaké jiné teplotě. Například, druhé rameno našeho stroje by se třelo o něco, co už je teplé. Čistým výsledkem by byl zisk tepla zchladlého tělesa, oceánu, a jeho odevzdání teplému tělesu. Carnotova hypotéza, druhý zákon termodynamiky, můžeme formulovat i následovně: teplo samo od sebe nemůže přecházet z chladného na teplý předmět. Přesvědčili jsme se, že taková dvě tvrzení jsou ekvivalentní: První, že nemůžeme uskutečnit proces, jehož jediným výsledkem by byla přeměna tepla v práci při konstantní teplotě a druhé, že teplo samo od sebe přejít z chladnějšího na teplejší místo. Nejčastěji budeme používat první tvrzení.



Obr. 44.3 Tepelný stroj

Carnotova analýza tepelných strojů se docela podobá argumentaci, kterou jsme používali u zdvižných zařízení ve 4. kapitole o zákonu zachování energie. Tehdy jsme vlastně postupovali podle Carnotova vzoru, a proto nám další úvahy budou velmi blízké.

Předpokládejme, že jsme sestrojili tepelný stroj, jehož kotl má teplotu  $T_1$ . Z kotle odeberáme určité teplo  $Q_1$ , parní stroj vykoná určitou práci  $W$  a pára odvede určité teplo  $Q_2$  do chladiče s teplotou  $T_2$  (obr. 44.3). Carnot neřekl, jaké je to teplo, neboť neznal první zákon termodynamiky, ale ani netvrdil, že  $Q_2$  je rovno  $Q_1$ , protože tomu nevěřil. I když ti, kteří byli ovlivněni teorií kalorika, předpokládali, že tepla  $Q_1$  a  $Q_2$  jsou stejná, Carnot to netvrdil a i v tom byla bystrost jeho argumentace. Použitím prvního termodynamického zákona bychom zjistili, že odevzdané teplo  $Q_2$  je rovno dodanému teplu  $Q_1$ , od něhož musíme odečíst vykonanou práci  $W$ :

$$Q_2 = Q_1 - W. \quad (44.3)$$

(Kdybychom měli nějaký cyklický proces, v němž by byla zkondenzovaná voda přečerpána zpět do kotle, řekli bychom, že během každého cyklu bylo absorbováno teplo  $Q_1$  a vykonána práce  $W$  pro dané množství vody zúčastňující se cyklu.)

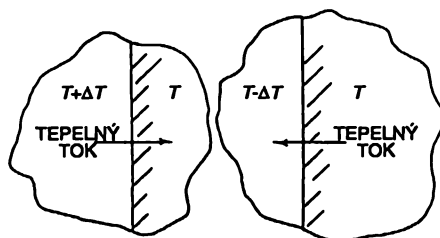
Sestrojíme nyní jiný stroj a zkoumejme, zda můžeme vykonat více práce při stejném dodaném teple při teplotě  $T_1$  a s chladičem při teplotě  $T_2$ . Budeme využívat stejné množství tepla  $Q_1$  z kotle a pokusíme se vykonat víc práce než v případě parního stroje, třeba tak, že použijeme jinou kapalinu, například alkohol.

### 44.3 VRATNÉ STROJE

Nyní budeme analyzovat naše stroje. Jedno je jasné, obsahuje-li stroj části, v nichž dochází ke tření, nevyhneme se ztrátám. Proto se uchýlíme ke stejné idealizaci jako v případě úvah o zákonu zachování energie – budeme předpokládat, že ve stroji vůbec nedochází ke tření.

Musíme se zabývat i obdobou pohybu bez tření, kterou je tepelný přenos „bez tření“. Přiložíme-li horký předmět při vysoké teplotě ke studenému a vznikne tok tepla, pak není možné směr tohoto toku obrátit jen malou změnou teploty těchto předmětů. Máme-li však stroj bez tření a zapůsobíme na něj nepatrnou silou jedním směrem, bude se tím směrem pohybovat, a když na něj zapůsobíme nepatrnou silou v opačném směru, bude se pohybovat opačným

směrem. Potřebujeme najít obdobu pohybu bez tření: přenos tepla, jehož směr můžeme obrátit i nepatrnou změnou. Je-li rozdíl teplot konečný, není to možné. Kdybychom však uskutečnili tepelný tok mezi dvěma předměty, které mají prakticky stejné teploty lišící se jen o infinitezimální hodnotu zabezpečující tok v požadovaném směru, mohli bychom mluvit o vratném toku (obr. 44.4). Zahřejeme-li mírně levou polovinu předmětu, poteče teplo doprava; když ji mírně ochladíme poteče teplo doleva. Zjistili jsme tedy, že ideálním strojem je *vratný stroj*, v němž je každý proces vratný v tom smyslu, že nepatrnými infinitezimálními změnami přinutíme stroj jít opačným směrem. Znamená to, že nikde ve stroji nesmí být tření ani takové místo, kde by teplo rezervoáru nebo plamene kotle bylo v přímém styku s něčím podstatně chladnějším nebo teplejším.

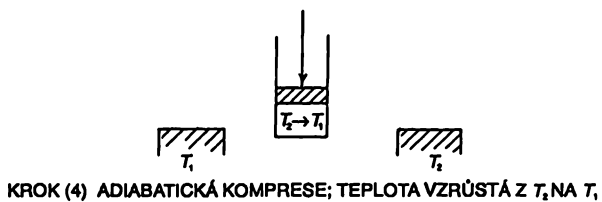
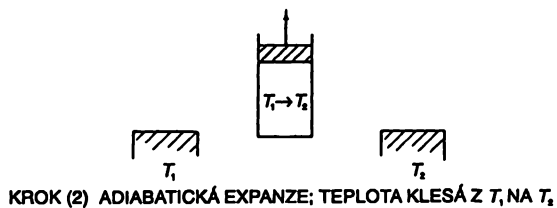


Obr. 44.4 Vratný přenos tepla

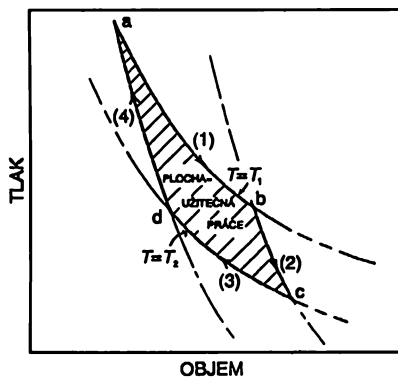
Zabývejme se nyní idealizovaným strojem, v němž jsou všechny procesy vratné. Abychom ukázali, že takový idealizovaný stroj je v principu možný, uvedeme příklad strojového cyklu, který může, ale nemusí být praktický, ale který je vratný ve smyslu Carnotovy představy. Předpokládejme, že se ve válci s pístem pohybujícím se bez tření nachází plyn, který nemusí být ideálním plynem. Nemusel by to dokonce ani být plyn, ale pro konkrétnost předpokládejme, že máme ideální plyn. Předpokládáme také, že máme dva tepelné polštáře,  $T_1$  a  $T_2$  – velká tělesa s určitými teplotami  $T_1$  a  $T_2$  (obr. 44.5). Nechť třeba  $T_1$  je vyšší než  $T_2$ . Nejprve ohřejeme plyn za současné expanze a necháme ho ve styku s tepelným polštářem  $T_1$ . Zatímco probíhá přívod tepla do plynu, musíme velmi pomalu zvedat píst, abychom zabezpečili, že teplota plynu se nikdy příliš neodchýlí od  $T_1$ . Kdybychom vytahovali píst příliš rychle, teplota plynu by silně klesla pod  $T_1$  a proces by nebyl úplně vratný. Pohybujeme-li pístem dostatečně pomalu, teplota plynu se nikdy příliš neodchýlí od  $T_1$ . Vratíme-li pak píst pomalu zpět, teplota bude jen nepatrně vyšší než  $T_1$  a teplo poteče obráceným směrem. Je tedy vidět, že takové izotermické rozpínání (tj. probíhající při stálé teplotě), je-li prováděno dostatečně pomalu a jemně, je vratný proces.

Abychom lépe pochopili, co se děje, nakreslíme graf závislosti tlaku plynu na jeho objemu (obr. 44.6). Když se plyn rozpíná, tlak klesá. Křivka označená symbolem (1) nám ukazuje, jak se mění objem a tlak, když se teplota udržuje na hodnotě  $T_1$ . V případě ideálního plynu by tato křivka vyjadřovala rovnici  $pV = NkT_1$ . Po dobu izotermické expanze tlak se vzrůstem objemu klesá, dokud se nedostaneme do bodu  $b$ . Současně musíme do plynu přivádět z rezervoáru určité teplo  $Q_1$ , neboť, jak už víme, jinak by se plyn rozpínáním ochlazoval. Když jsme dokončili izotermickou expanzi a dostali se do bodu  $b$ , přerušíme kontakt válce s rezervoárem a budeme pokračovat v expanzi. Tentokrát znemožníme jakýkoliv přísun tepla k válci. Expanzi budeme provádět pomalu, a opět předpokládáme nepřítomnost tření, takže nebude důvod, proč bychom proces nemohli obrátit. Plyn pokračuje v rozpínání a teplota klesá, neboť do válce už nepřichází teplo.

## ZÁKONY TERMODYNAMIKY



Obr. 44.5 Kroky Carnotova cyklu



Obr. 44.6 Carnotův cyklus

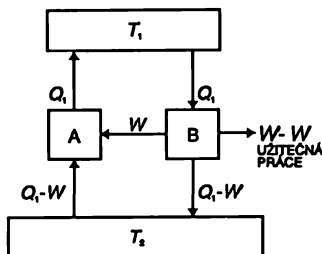
Nechme plyn rozpínat podle křivky označené (2), dokud teplota neklesne na hodnotu  $T_2$  v bodě označeném  $c$ . Tento druh expanze bez dodání tepla se nazývá *adiabatická expanze*. Už víme, že v případě ideálního plynu má křivka (2) tvar  $pV^\gamma = \text{konst.}$ , kde  $\gamma$  je konstanta větší než 1, takže adiabatická křivka má rychlejší spád než izotermická křivka. Plyn ve válci dosáhl teploty  $T_2$ , takže když ho uvedeme do kontaktu s tepelným polštářem s teplotou  $T_2$ , nenastanou nevratné změny. Nyní plyn pomalu stlačíme, přičemž ho ponecháváme ve styku s rezervoárem při teplotě  $T_2$ ; toto stlačování proběhne podle křivky označené (3). Protože válec je ve styku s rezervoárem, teplota nevzroste, ale teplo  $Q_2$  proteče z válce do rezervoáru při teplotě  $T_2$ . Po izotermickém stlačení plynu podle křivky (3) až k bodu  $d$  odvedeme válec z tepelného polštáře s teplotou  $T_2$  a budeme ho dále stlačovat, přičemž nedovolíme teplu uniknout. Teplota vzroste a tlak se bude měnit podle křivky označené (4). Kdybychom provedli každý krok pečlivě, vrátíme se do bodu  $a$  při teplotě  $T_1$ , z něhož jsme vyšli a celý cyklus můžeme zopakovat znovu.

Podle diagramu vykonal plyn úplný cyklus, v jehož průběhu jsme dodali teplo  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  a odebrali teplo  $Q_2$  při teplotě  $T_2$ . Důležité je, že cyklus je vratný, takže všechny kroky můžeme provést opačným směrem. Mohli bychom jít nazpět a ne dopředu: mohli bychom začít v bodě  $a$  při teplotě  $T_1$ , nechat expandovat plyn podle křivky (4), dále expandovat při teplotě  $T_2$ , absorbovat teplo  $Q_2$  atd., tedy uskutečnit obrácený cyklus. Probíhá-li cyklus jedním směrem, musíme vykonat práci, probíhá-li cyklus opačně, koná práci plyn.

Mimořádně, celkovou práci lze snadno vypočítat, protože po dobu jakékoliv expanze je práce rovna součinu tlaku a změny objemu, tj.  $\int p dV$ . Na našem diagramu jsme vynášeli na svislou osu  $p$  a na vodorovnou osu  $V$ . Označíme-li vertikální vzdálenost  $y$  a horizontální  $x$  dostaneme  $\int y dx$ , tedy plochu pod křivkou. Proto plocha pod každou z očíslovaných křivek je mírou práce vykonané plynem nebo námi v odpovídajícím kroku. Snadno lze zjistit, že čistá výsledná práce je rovna obsahu vyšrafované plochy na obrázku.

Nyní, když jsme ukázali jednoduchý příklad vratného stroje, budeme předpokládat, že existují i jiné takové stroje. Předpokládejme, že máme vratný stroj  $A$ , který odebírá teplo  $Q_1$  při  $T_1$ , koná práci  $W_a$  odevzdává určité teplo při teplotě  $T_2$ . Dále předpokládejme, že máme nějaký jiný, člověkem zkonstruovaný, stroj  $B$ , už existující nebo ještě nevynalezený, využívající gumové pásy, páru nebo cokoli jiného, vratný nebo nevratný, který je navržen tak, že odebírá stejné množství tepla  $Q_1$  při  $T_1$  a odevzdává teplo při nižší teplotě  $T_2$  (obr. 44.7). Předpokládejme, že stroj  $B$  koná práci  $W'$ . Ukážeme, že práce  $W'$  není větší než  $W$  – že žádný stroj nevykonává víc práce než vratný stroj. Proč je tomu tak? Předpokládejme, že by  $W'$  bylo větší než  $W$ . Pak můžeme vzít teplo  $Q_1$  z rezervoáru při teplotě  $T_1$  a pomocí stroje  $B$  konat práci  $W'$  a určité teplo odevzdat rezervoáru při teplotě  $T_2$ ; nezajímá nás, jaké teplo. Když to uděláme, můžeme ušetřit určitou část práce  $W'$ , o níž předpokládáme, že je větší než  $W$ . Odebereme jen její část  $W_a$  zbytek  $W' - W$  využijeme k užitečné práci. S prací  $W$  necháme stroj  $A$  běžet opačně, *protože je to vratný stroj*. Tento stroj spotřebuje určité teplo z rezervoáru při  $T_2$  a odevzdá rezervoáru  $Q_1$  při  $T_1$ . Při tomto dvojitém cyklu bude čistý výsledek takový, že se vše vrátí do původního stavu a vykonala se práce navíc, konkrétně  $W' - W$ . Při tom vše, jsme udělali, bylo odebrání energie z rezervoáru při teplotě  $T_2$ ! Teplo  $Q_1$  jsme pečlivě vrátili rezervoáru při teplotě  $T_1$ . Proto může být rezervoár malý a může být uvnitř našeho složeného stroje  $A + B$ , který nedělá nic jiného, než že odebírá množství tepla odpovídající  $W' - W$  z rezervoáru při teplotě  $T_2$  a mění ho v práci. Jenže získání užitečné práce z rezervoáru při konstantní teplotě *bez jiných změn* je podle Carnotova postulátu nemožné. Proto nemůže existovat stroj, který by odebíral určité množství tepla při vyšší teplotě  $T_1$ , odevzdával jeho část při teplotě  $T_2$  a konal větší práci než vratný stroj pracující při stejných teplotních podmínkách.

## ZÁKONY TERMODYNAMIKY



Obr. 44.7 Vratný stroj A poháněný zpětně strojem B

Nyní předpokládejme, že stroj B je také vratný. Potom, samozřejmě, nejenže  $W$  nesmí být větší než  $W$ , ale důkaz můžeme obrátit a ukázat, že  $W$  nemůže být větší než  $W$ . Jsou-li oba stroje vratné, musí konat stejnou práci a přicházíme k vynikajícímu Carnotovu závěru: je-li stroj vratný, nezáleží na tom, jak konkrétně je zkonstruován a práce, kterou stroj vykoná, absorbuje-li určité množství tepla při teplotě  $T_1$  a odevzdá určité teplo při teplotě  $T_2$ , je u všech takových strojů stejná. Jde o vlastnost našeho světa, a ne o vlastnost konkrétního stroje.

Kdyby se nám podařilo najít zákon určující, kolik práce získáme absorbováním tepla  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  a odevzdáním určitého tepla při  $T_2$ , našli bychom univerzální veličinu nezávislou na vlastnostech látky. Kdybychom však znali vlastnosti konkrétní látky, mohli bychom je využít k určení takové veličiny a pak by všechny ostatní látky musely dávat ve vratném stroji stejné množství práce. To je klíčová myšlenka, návod, pomocí něhož můžeme určit například smrštění gumy, když ji ohříváme a ochlazení gumy, když jí dovolíme smrštit se. Představme si, že pracovní látkou vratného stroje bude gumový pás a stroj necháme projít celým vratným cyklem. Čistý výsledek, celková vykonaná práce, je univerzální funkcí, úžasnou funkcí, nezávislou na vlastnostech látky. Tak přicházíme k přesvědčení, že existuje určité omezení vlastností látek; nemůžeme sestrojít, co se nám zachce, neboť jinak bychom byli schopni vymyslet látku, která by poskytovala víc než maximum možné práce ve vratném cyklu. Tento princip, toto omezení je jediným skutečným pravidlem vyplývajícím z termodynamiky.

### 44.4 ÚČINNOST IDEÁLNÍHO STROJE

Nyní se pokusíme najít zákon určující práci  $W$  jako funkci  $Q_1$ ,  $T_1$  a  $T_2$ . Je jasné, že  $W$  je úměrné  $Q_1$ , neboť uvažujeme-li dva vratné stroje pracující paralelně, pak takový zdvojený stroj je také vratný. Absorbuje-li každý teplo  $Q_1$ , pak dva spřažené stroje spotřebují teplo  $2Q_1$  a vykonají práci  $2W$  atd. Je proto rozumné předpokládat, že práce  $W$  je úměrná  $Q_1$ .

Dalším důležitým krokem bude nalezení tohoto univerzálního zákona. Budeme ho moci odvodit, když prozkoumáme vratný stroj s pracovní látkou, jejíž zákony známe. Takovou látkou je ideální plyn. K tomuto univerzálnímu zákonu bychom mohli dospět i čistě logickým uvažováním, bez použití nějaké konkrétní látky. Je to překrásná ukázka fyzikálního myšlení a bylo by škoda, kdybychom ji nemohli přednést, takže pro ty, kteří by takový důkaz rádi poznali, se o něm ještě zmíníme. Teď však použijeme méně abstraktní a jednodušší metodu přímého výpočtu v případě ideálního plynu.

Potřebujeme znát pouze vztahy pro  $Q_1$  a  $Q_2$  (neboť  $W$  je  $Q_1 - Q_2$ ), tedy pro tepla, která si stroj vyměňuje s rezervoáry po dobu izotermického rozpínání nebo stlačování. Například, kolik tepla  $Q_1$  se absorbuje z rezervoáru při teplotě  $T_1$  po dobu izotermického rozpínání (křivka (1)

## ÚČINNOST IDEÁLNÍHO STROJE

na obr. 44.6) z bodu  $a$  při tlaku  $p_a$ , objemu  $V_a$ , teplotě  $T_1$  do bodu  $b$  s tlakem  $p_b$ , objemem  $V_b$  a stejnou teplotou  $T_1$ . V případě ideálního plynu má každá molekula energii, jež závisí jen na teplotě, a protože jsou teplota i počet molekul stejné v  $a$  i  $b$ , bude vnitřní energie stejná. Energie  $U$  se nemění, práce, kterou koná plyn po dobu expanze

$$W = \int_a^b p \, dV$$

je rovna energii  $Q_1$  odebrané z rezervoáru. Po dobu rozpínání  $pV = NkT_1$ , neboli

$$p = \frac{NkT_1}{V},$$

takže

$$Q_1 = \int_a^b p \, dV = \int_a^b NkT_1 \frac{dV}{V} = NkT_1 \ln \frac{V_b}{V_a}. \quad (44.4)$$

Tento výraz představuje teplo odebrané z rezervoáru při teplotě  $T_1$ . Stejným způsobem můžeme určit teplo odevzdané při teplotě  $T_2$  (křivka (3) obr. 44.6) rezervoáru po dobu stlačování. Tak dostaneme

$$Q_2 = NkT_2 \ln \frac{V_c}{V_d}. \quad (44.5)$$

K ukončení našeho rozboru potřebujeme ještě najít vztah mezi  $V_c/V_d$  a  $V_b/V_a$ . Tento vztah najdeme, když si uvědomíme, že (2) představuje adiabatické rozpínání z  $b$  do  $c$ , po dobu kterého je  $pV^\gamma$  konstantní. Když  $pV = NkT$ , můžeme psát  $(pV) V^{\gamma-1} = \text{konst}$  nebo to vyjádřit pomocí  $T$  a  $V$  ve tvaru  $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$ , tedy

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}. \quad (44.6)$$

Podobně (4) také představuje adiabatické rozpínání, a to z  $d$  do  $a$ , takže můžeme psát

$$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1}. \quad (44.6a)$$

Vydělíme-li tuto rovnici předcházející, dostaneme rovnost výrazů  $V_b/V_a$  a  $V_c/V_d$ . Proto logaritmy v (44.4) a (44.5) musí být stejné a máme

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.7)$$

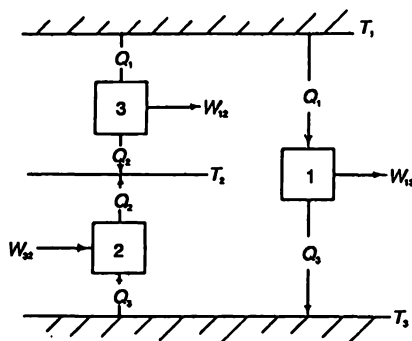
To je vztah, který jsme hledali. I když jsme ho dokázali pouze pro stroj pracující s ideálním plynem, musí být správný pro jakýkoliv vratný stroj.

Nyní ukážeme, jak můžeme k tomuto univerzálnímu zákonu dospět logickou cestou bez znalosti vlastností nějaké konkrétní látky. Předpokládejme, že máme tři stroje a tři teploty, např.  $T_1$ ,  $T_2$  a  $T_3$ . Nechť jeden stroj absorbuje teplo  $Q_1$  při teplotě  $T_1$ , vykoná určité množství práce

$W_{13}$  a odevzdá teplo  $Q_3$  při teplotě  $T_3$  (obr. 44.8). Necht' druhý stroj pracuje opačným způsobem mezi teplotami  $T_2$  a  $T_3$ . Předpokládejme, že tento druhý stroj je tak velký, že absorbuje právě teplo  $Q_3$  a odevzdá teplo  $Q_2$ . Musíme na něj vynaložit určité množství práce  $W_{32}$  – tato práce bude záporná, neboť stroj pracuje v obráceném cyklu. Když první stroj ukončí cyklus, absorbuje teplo  $Q_1$  a odevzdá teplo  $Q_3$  při teplotě  $T_3$ ; druhý stroj odebere stejné teplo  $Q_3$  při teplotě  $T_3$  z rezervoáru a odevzdá ho rezervoáru při teplotě  $T_2$ . Proto čistý výsledek takových spřažených strojů je odebrání tepla  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  a odevzdání tepla  $Q_2$  při teplotě  $T_2$ . Tyto dva stroje jsou proto ekvivalentní třetímu, který absorbuje  $Q_1$  při teplotě  $T_1$ , koná práci  $W_{12}$  a odevzdává teplo  $Q_2$  při  $T_2$ . Přitom  $W_{12} = W_{13} - W_{32}$ , jak vyplývá z prvního zákona

$$W_{13} - W_{32} = (Q_1 - Q_3) - (Q_2 - Q_3) = Q_1 - Q_2 = W_{12}. \quad (44.8)$$

Nyní můžeme získat zákony dávající do vzájemného vztahu účinnosti strojů; vždyť je jasné, že musí existovat určitý druh závislosti mezi účinnostmi strojů pracujících mezi teplotami  $T_1$  a  $T_3$ , mezi  $T_2$  a  $T_3$  a mezi  $T_1$  a  $T_2$ .



Obr. 44.8 Spojení strojů 1 a 2 je ekvivalentní stroji 3

Naše argumenty budou velmi jasné, budeme-li postupovat následujícím způsobem: Zjistili jsme, že teplo absorbované při  $T_1$  můžeme vždy dát do souvislosti s teplem odevzdaným při  $T_2$ , určíme-li teplo odevzdané při nějaké jiné teplotě  $T_3$ . Proto budeme moci popsat všechny vlastnosti stroje, zavedeme-li určitou standardní teplotu a naši analýzu provedeme právě při této standardní teplotě. Jinak řečeno, známe-li účinnost stroje pracujícího mezi určitou teplotou  $T$  a jakousi standardní teplotou, budeme moci vypočítat účinnost pro jakýkoliv jiný rozdíl teplot. Protože předpokládáme pouze použití vratných strojů můžeme přejít od počáteční teploty dolů ke standardní teplotě a pak přejít zpět k výsledné teplotě. Standardní teplotu můžeme vybrat libovolně a zvolíme za ni *jeden stupeň*. Pro teplo, jež se odevzdává při této standardní teplotě, zavedeme zvláštní symbol  $Q$ . Jinými slovy: absorbuje-li vratný stroj při teplotě  $T_1$  teplo  $Q_1$ , pak při jednotkové teplotě odevzdá teplo  $Q$ . *Odevzdá-li nějaký stroj absorbující teplo  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  teplo  $Q$  při teplotě jednoho stupně a odevzdá-li druhý stroj absorbující teplo  $Q_2$  při teplotě  $T_2$  také teplo  $Q$  při teplotě jednoho stupně, pak podle našeho důkazu týkajícího se strojů pracujících mezi třemi teplotami musí stroj, který absorbuje teplo  $Q_1$  při teplotě  $T_1$ , odevzdat teplo  $Q_2$ , pracuje-li mezi teplotami  $T_1$  a  $T_2$ .* Už nám zbývá jen najít, kolik tepla  $Q_1$  musíme dodat při teplotě  $T_1$ , abychom odevzdali určité množství tepla  $Q$  při jednotkové teplotě. Jakmile to zjistíme, máme vyhráno. Samozřejmě teplo  $Q$  je funkcí teploty  $T$ . Snadno se zjistí, že se vzrůstem teploty musí vzrůstat i teplo, protože

víme, že na zpětný chod stroje a odevzdání tepla při vyšší teplotě se spotřebuje práce. Není těžké pochopit, že teplo  $Q_1$  musí být úměrné  $Q_2$ . Potom náš velký zákon musí vypadat takto: Danému množství tepla  $Q_2$  odevzdanému při jednom stupni odpovídá množství tepla  $Q_1$  absorbované strojem při teplotě  $T_1$  a toto množství je rovno součinu  $S$  a určité rostoucí funkce teploty

$$Q_1 = Q_2 f(T_1). \quad (44.9)$$

## 44.5 TERMODYNAMICKÁ TEPLOTA

Zatím se nepokusíme najít vztah pro zmíněnou rostoucí funkci teploty vyjádřenou pomocí stupnice známého rtuťového teploměru, ale místo toho *definujeme novou teplotní stupnici*. Kdysi byla „teplota“ definována libovolně rozdělením objemu vody roztahující se teplem na stejné stupně určité velikosti. Když se však teplota měřila rtuťovým teploměrem, zjistilo se, že stupňům už neodpovídají stejné vzdálenosti na stupnici. Nyní však *můžeme definovat teplotu, která nezávisí na vlastnostech látky*. Můžeme k tomu využít uvedenou funkci  $f(T)$ , která nezávisí na použitém zařízení, protože účinnost vratných strojů nezávisí na jejich pracovních látkách. Protože tato funkce s růstem teploty roste, můžeme ji *samotnou* považovat za teplotu měřenou v standardních jednotkách takto:

$$Q = ST, \quad (44.10)$$

kde

$$Q = S \cdot 1^\circ. \quad (44.11)$$

To znamená, že teplotu tělesa určíme tak, že zjistíme, kolik tepla absorboval vratný stroj pracující mezi teplotou tělesa a jednotkovou teplotou (*obr. 44.9*). Když se z kotle odebere sedmkrát víc tepla, než se odevzdá jedностupňovému chladiči, říkáme, že tento kotel má teplotu sedm stupňů atd.<sup>53)</sup> Měřením množství tepla absorbovaného při různých teplotách určujeme teplotu. Takto definovanou teplotu nazýváme *absolutní termodynamickou teplotou* a tato teplota nezávisí na pracovní látce. Dále budeme výlučně používat tuto definici teploty.<sup>54)</sup>

Nyní je nám jasné, že v případě dvou strojů, z nichž jeden pracuje mezi  $T_1$  a jedním stupněm a druhý mezi  $T_2$  a jedním stupněm a oba odevzdávají stejné teplo při jednotkové teplotě, musí pro absorbovaná tepla platit vztah

$$\frac{Q_1}{T_1} = S = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.12)$$

Kdybychom tedy měli jednoduchý stroj pracující mezi  $T_1$  a  $T_2$ , pak by výsledek naší analýzy, to velké finále, spočíval v tom, že poměr  $Q_1/T_1$  je stejný jako poměr  $Q_2/T_2$ , absorbuje-li stroj energii  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  a odevzdá teplo  $Q_2$  při teplotě  $T_2$ . Tento vztah musí platit pro

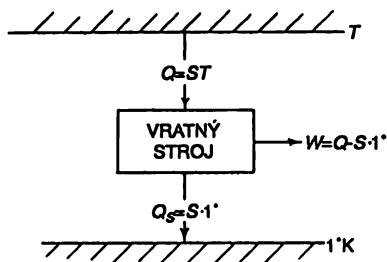
<sup>53)</sup> Termodynamickou teplotu dnes udáváme v jednotkách zvaných kelvin (*pozn. red.*).

<sup>54)</sup> Předtím jsme naši teplotní stupnici definovali jiným způsobem, konkrétně tak, že jsme střední kinetickou energii molekuly ideálního plynu považovali za úměrou teplotě, tedy ve shodě se zákonem ideálního plynu jsme považovali  $pV$  úměrné  $T$ . Je taková definice ekvivalentní naší nové definici? Na tuto otázku můžeme odpovědět kladně, neboť konečný výsledek (44.7), odvozený ze zákona ideálního plynu, je stejný jako zde odvozený výsledek. V další kapitole se ještě k tomuto problému vrátíme.



## ZÁKONY TERMODYNAMIKY

libovolný vratný stroj. K tomu je třeba dodat už jen tolik, že jde o nejdůležitější výrok celé termodynamiky.



Obr. 44.9 Absolutní termodynamická teplota

Představuje-li však toto vlastně celou termodynamiku, proč bývá považována za náročný předmět? Máte-li danou hmotnost látky, můžete stav této látky v kterémkoliv okamžiku popsat udáním její teploty a objemu. Známe-li teplotu a objem látky a víme, že tlak je určitou funkcí teploty a objemu, budeme znát vnitřní energii. Jenže někdo si řekne: „Já to tak nebudu dělat! Řekněte mi, jaká je teplota a jaký je tlak a já vám řeknu, jaký je objem. Objem můžu považovat za funkci teploty a tlaku a vnitřní energii za funkci teploty a tlaku atd.“ Příčina náročnosti termodynamiky spočívá právě v tom, že každý používá jiný přístup. Kdybychom se však uměli dohodnout na našich proměnných a tuto dohodu i dodržovali, termodynamika by byla docela snadná.

Nyní se pustíme do dedukování. Tak jako  $F = ma$  představovalo ústřední rovnici celé mechaniky a vše jsme z ní odvozovali, bude právě nalezený princip představovat základ celé termodynamiky. A my se ptáme, jaké závěry z něho můžeme udělat.

Abychom mohli udělat první závěr, zkombinujeme oba zákony – zákon zachování energie a zákon dávající do souvislosti tepla  $Q_2$  a  $Q_1$  – a dospějeme k účinnosti vratného stroje. Z prvního zákona máme  $W = Q_1 - Q_2$ . Podle našeho nového principu

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1$$

a pro práci dostáváme vztah

$$W = Q_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (44.13)$$

který určuje účinnost stroje – říká, kolik práce získáme z určitého množství tepla. Účinnost stroje je úměrná rozdílu teplot, mezi nimiž stroj pracuje, dělenému vyšší teplotou

$$\text{účinnost} = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.14)$$

Účinnost nemůže být větší než jedna a absolutní teplota nemůže být menší než nula, absolutní nula. Protože  $T_2$  musí být kladné, účinnost je vždy menší než jedna. To je náš první výsledek.

## 44.6 ENTROPIE

Rovnici (44.7) nebo (44.12) můžeme interpretovat zvláštním způsobem. Pracujeme-li s vratnými stroji, je teplo  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  „ekvivalentní“  $Q_2$  při  $T_2$  neboli  $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$  v tom smyslu, že je-li jedno z tepel absorbováno, je druhé odevzdáno. Kdybychom tedy nějak nazvali veličinu  $Q/T$ , mohli bychom prohlásit: ve vratných procesech je absorbováno tolik  $Q/T$ , kolik je uvolněno;  $Q/T$  se ani nezískává, ani neztrácí. Poměr  $Q/T$  nazýváme *entropie* a říkáme, že „ve vratném cyklu je změna entropie nulová“. Když  $T$  je  $1^\circ$ , pak je entropie  $Q/1^\circ$ , nebo, jak jsme již označili,  $Q/1^\circ = S$ . Opravdu  $S$  je písmeno, které nejčastěji používáme pro entropii a ta je číselně rovna teplu (které jsme označili  $Q$ ) dodanému rezervoáru při jednotkové teplotě (samotná entropie není teplo, ale představuje teplo dělené teplotou a měří se v joulech na stupeň).<sup>55)</sup>

Je zajímavé, že kromě tlaku, který je funkcí teploty, objemu a vnitřní energie, jež je také funkcí teploty a objemu, jsme našli jinou veličinu, která je funkcí stavu a tou je entropie látky. Pokusme se vysvětlit, jak se tato veličina počítá a co rozumíme tím, když říkáme, že je „funkcí stavu“. Uvažujme systém ve dvou různých stavech, například takových, jaké jsme měli v experimentu s adiabatickou a izotermickou expanzí. (Mimochodem, stroj nemusí mít nezbytně dva rezervoáry; můžou být tři nebo čtyři různé teploty, při nichž odebírá a odevzdává teplo.) Můžeme se pohybovat po celém  $pV$ -diagramu a přecházet z jednoho stavu do druhého. Jinak řečeno, plyn můžeme převádět z určitého stavu  $a$  do jiného stavu  $b$  a přitom požadovat, aby tento přechod z  $a$  do  $b$  byl vratný. Nyní předpokládejme, že podél dráhy z  $a$  do  $b$  máme malé rezervoáry s různými teplotami, takže teplo  $dQ$  odebrané látce při každém drobném kroku je odevzdáno každému rezervoáru při teplotě odpovídající příslušnému bodu dráhy. Pak připojme všechny tyto rezervoáry vratnými tepelnými stroji k jednomu rezervoáru při jednotkové teplotě. Když ukončíme převod látky z  $a$  do  $b$ , vraťme všechny rezervoáry do jejich původního stavu. Každé teplo  $dQ$ , které bylo odebráno látce při teplotě  $T$ , jsme takto přeměnili vratným strojem a při jednotkové teplotě bylo odevzdáno určité množství entropie  $dS$ , jmenovitě

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (44.15)$$

Vypočítejme celkové množství odevzdané entropie. Rozdíl entropií neboli entropie potřebná k přechodu z  $a$  do  $b$  při takové vratné transformaci představuje celkovou entropii – celkovou entropii odebranou z malých rezervoárů a odevzdanou při jednotkové teplotě:

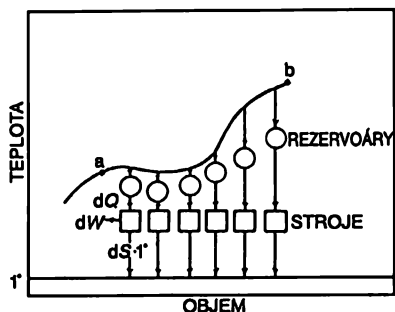
$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.16)$$

Nyní se ptáme, zda rozdíl entropií závisí na zvolené dráze. Existuje totiž víc způsobů, jak se dostat z  $a$  do  $b$ . Vzpomeňme si, že při Carnotově cyklu jsme podle obr. 44.6 mohli přejít z  $a$  do  $c$  nejprve izotermickou expanzí a pak adiabaticky nebo nejprve adiabatickou expanzí a pak izotermicky. Zajímá nás proto, zda je změna entropie, která nastává, když přecházíme z  $a$  do  $b$  podle obr. 44.10, pro každou dráhu stejná. *Must být stejná*, neboť kdybychom završili celý cyklus jednou dráhou tam a druhou zpět, měli bychom vratný stroj a nemohly by nastat ztráty tepla do

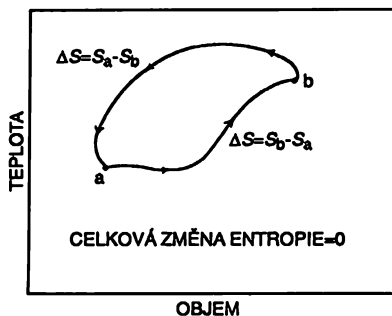
<sup>55)</sup> joulech na kelvin (pozn. red.)

## ZÁKONY TERMODYNAMIKY

rezervoáru při jednotkové teplotě. Ve zcela vratném cyklu nesmí být odebráno žádné teplo z rezervoáru při jednotkové teplotě, a tak je entropie potřebná k přechodu z  $a$  do  $b$  pro kteroukoliv dráhu stejná. *Nezávisí na samotné dráze, závisí jen na koncových bodech.* Proto můžeme tvrdit, že existuje určitá funkce, kterou nazýváme entropie látky a která závisí pouze na stavu, tj. jen na objemu a teplotě.



Obr. 44.10 Změna entropie při vratném přechodu



Obr. 44.11 Změna entropie při úplném vratném cyklu

Můžeme najít funkci  $S(V, T)$ , jež má tu vlastnost, že při vratných změnách látky má změna entropie vyjádřená pomocí tepla odevzdaného při jednotkové teplotě následující tvar

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}, \quad (44.17)$$

kde  $dQ$  je teplo odebrané látce při teplotě  $T$ . Tato celková změna entropie je rozdíl entropie vypočítané v koncovém a počátečním bodě dráhy

$$\Delta S = S(V_b, T_b) - S(V_a, T_a) = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.18)$$

Tento výraz nedefinuje entropii úplně. Definuje vlastně jen rozdíl entropie ve dvou různých stavech. Jen tehdy, když umíme vypočítat entropii jednoho konkrétního stavu, můžeme definovat entropii  $S$  absolutně.

Dlouho se předpokládalo, že absolutní entropie neznamená nic a že je možné definovat pouze rozdíly entropie. Nakonec však přišel Nernst s velmi jednoduchým tvrzením, které nazval „věta o teple“ a kterému dnes říkáme třetí zákon termodynamiky. Povíme si, co tento zákon říká, ale nebudeme vysvětlovat, proč platí. Nernstův postulát prostě tvrdí, že každý objekt má při absolutní nule nulovou entropii. Nyní už víme, při kterém  $T$  a vje  $S$  nulové (konkrétně při  $T = 0$ ), a proto můžeme entropii určit v libovolném jiném bodě.

Abychom ilustrovali tyto myšlenky, vypočítejme entropii ideálního plynu. Při izotermické (a tedy i vratné) expanzi je  $\int dQ/T$  rovno  $Q/T$ , protože  $T$  je konstanta. Proto (v soulase se vztahem 44.4) platí pro změnu entropie

$$S(V_a, T) - S(V_b, T) = Nk \ln \frac{V_a}{V_b},$$

takže  $S(V, T) = Nk \ln V$  plus nějaká funkce jen teploty  $T$ . Jak  $S$  závisí na  $T$ ? Víme, že v případě vratné adiabatické expanze *nedochází k výměně tepla*. Proto se entropie nemění, i když se mění  $V$ , ale aby platilo  $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$ , musí se měnit i teplota  $T$ . Chápete, že musí být

$$S(V, T) = Nk \left[ \ln V + \frac{1}{\gamma - 1} \ln T \right] + a,$$

kde  $a$  je nějaká konstanta, která nezávisí na  $V$ , ani na  $T$ ? (Konstanta  $a$  se nazývá chemická konstanta. Závisí na zkoumaném plynu a můžeme ji experimentálně určit z Nernstovy věty měřením tepla uvolňovaného při ochlazení a kondenzaci plynu až po jeho přeměnu na tuhou látku (v případě hélia kapalnou) při nulové teplotě; přitom je třeba vypočítat integrál  $\int dQ/T$ . Konstantu  $a$  můžeme určit i teoreticky pomocí Planckovy konstanty a kvantové mechaniky, ale v tomto kurzu se tím nebudeme zabývat.)

Nyní si všimněme některých vlastností entropie. Vzpomeňme si, že na úseku vratného cyklu od  $a$  do  $b$  se entropie látky mění o  $S_b - S_a$ . Dále si vzpomeňme, že při takovém postupu entropie – teplo odevzdané při jednotkové teplotě – vzrůstá podle zákona  $dS = dQ/T$ , kde  $dQ$  je teplo, které odebereme látce při teplotě  $T$ .

Už víme, že při vratném cyklu se celková entropie všeho nemění, neboť teplo  $Q_1$  absorbované při  $T_1$  a teplo  $Q_2$  odevzdané při  $T_2$  odpovídají stejně velkým, ale opačným změnám entropie, takže výsledná změna entropie je nulová. Proto se při vratném cyklu nemění entropie žádné části, ani rezervoárů. Toto pravidlo se podobá zákonu zachování energie, ale tím není; platí totiž pouze pro vratné cykly. Kdybychom uvažovali i nevratné cykly, žádný zákon zachování entropie neplatí.

Uvedeme dva příklady. Nejprve předpokládáme, že nevratnou práci koná objekt, v němž existuje tření a který produkuje teplo  $Q$  při teplotě  $T$ . Entropie vzroste o  $Q/T$ . Teplo  $Q$  je rovno práci, a proto, když konáme nějakou práci třením předmětu, jehož teplota je  $T$ , vzrůstá entropie o  $W/T$ .

Další příklad nevratnosti spočívá v následujícím: Spojíme-li dva předměty s různými teplotami  $T_1$  a  $T_2$ , přejde určité množství tepla samovolně z jednoho předmětu na druhý. Například předpokládejme, že jsme do studené vody vložili horký kámen. Jak se změní entropie horkého kamene, když odevzdá teplo  $\Delta Q$  z  $T_1$  na  $T_2$ ? Poklesne o  $\Delta Q/T_1$ . Jak se změní entropie vody? Vzroste o  $\Delta Q/T_2$ . Teplo však poteče jen od vyšší teploty  $T_1$  k nižší teplotě  $T_2$ , takže  $\Delta Q$  je kladné, je-li teplota  $T_1$  je vyšší než teplota  $T_2$ . Proto je změna entropie celého světa kladná a je rovna se rozdílu dvou zlomků

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}. \tag{44.19}$$

## ZÁKONY TERMODYNAMIKY

Platí tedy toto tvrzení: V každém nevratném procesu entropie všeho na světě vzrůstá. Jen ve vratných procesech zůstává entropie konstantní. Protože však žádný proces není absolutně vratný, entropie vždy aspoň o málo vzroste; vratný proces je idealizace s minimálním přírůstkem entropie.

Bohužel, v termodynamice nepůjdeme do hloubky. Naším cílem je jen ilustrace základních myšlenek a vysvětlení používané argumentace, ale termodynamikou se příliš zabývat nebudeme. Termodynamiku velmi často používají technici a hlavně chemici, proto musíme učit termodynamiku v chemické nebo technické praxi. Není vhodné všechno opakovat, omezujeme se pouze na diskuzi o povaze této teorie a nevěnujeme se detailům speciálních aplikací.

Dva zákony termodynamiky jsou často formulovány takto:

*První zákon:* energie vesmíru je vždy konstantní.

*Druhý zákon:* entropie vesmíru vždy vzrůstá.

Formulace druhého zákona není právě nejvhodnější, protože například nevyjadřuje, že ve vratném cyklu se entropie nemění a přesně neřká, co vlastně entropie je. Je to jen způsob vhodný k zapamatování těchto zákonů, ale ve skutečnosti nám přesně neřká, na čem jsme. Zákony diskutované v této kapitole jsou shrnuty v *tabulce 44.1*. V další kapitole využijeme tyto zákony k získání vztahu mezi teplem generovaným při rozpínání pásku gumy a dodatečným vnitřním napětím při jeho zahřívání.

Tabulka 44.1

### Shrnutí termodynamických zákonů

*První zákon:*

teplo dodané systému + práce konaná na systému = vzrůst vnitřní energie systému

$$dQ + dW = dU.$$

*Druhý zákon:*

Proces, jehož jediným čistým výsledkem by bylo odebrání tepla z rezervoáru a jeho přeměna na práci je nemožná. Žádný tepelný stroj odebírající teplo  $Q_1$  při  $T_1$  a odevzdávající teplo  $Q_2$  při  $T_2$  nemůže vykonat víc práce než vratný stroj, pro nějž platí

$$W = Q_1 - Q_2 = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

*Definice entropie systému:*

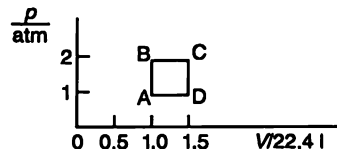
- Je-li teplo  $\Delta Q$  vratně dodáno systému při teplotě  $T$ , vzroste entropie systému o  $\Delta S = \Delta Q / T$ .
- Při  $T = 0$ ,  $S = 0$  (třetí zákon).

Při *vratné změně* se celková entropie všech částí systému (včetně rezervoárů) nemění.

Při *nevratné změně* celková entropie systému vždy vzrůstá.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 44.1 ■ Ideální plyn s exponentem adiabaty  $\gamma = 4/3$  postupně přechází ze stavu *A* (tlak  $p = 1$  atm, objem  $V = 22,4$  l, teplota  $t = 273$  K) do stavu *C* ( $p = 2$  atm,  $V = 33,6$  l) buď po dráze *ABC* nebo po dráze *ADC*. a) Ukažte, že změna entropie je v obou případech stejná. b) Vypočítejte tuto změnu.



- 44.2 ■ Převedte ideální Carnotův cyklus *abcd* na obr. 44.6 na  $p$ - $V$  diagramu mezi stavy charakterizovanými parametry  $T_1$  a  $T_2$  a  $(P_a, V_a)$ ,  $(P_c, V_c)$  na cyklus *abcd* na diagramu teplota – entropie.
- 44.3 ■ Teplota parogenerátoru na moderní tepelné elektrárně, která pracuje s přehřátou párou, je  $600$  °C. Do chladiče je přiváděna říční voda o teplotě  $20$  °C. Jaké maximální účinnosti může být na takové elektrárně dosaženo?
- 44.4 ■ V ideálním vratném tepelném stroji, který využívá jako pracovní látku  $28$  g dusíku ( $\gamma = 7/5$ ) probíhá pracovní cyklus *abcd* bez použití ventilu. Teplota ohřivače je  $400$  K, teplota chladiče  $300$  K. Původní objem plynu v bodě *a* je  $6,0$  l, objem v bodě *c* je  $18,0$  l.
- Při jakém objemu  $V_b$  je třeba zastavit přísun tepla (izotermická expanze) a po tepelné izolaci stroje pokračovat v adiabatické expanzi od  $V_b$  k  $V_c$ ? Při jakém objemu  $V_d$  začne adiabatická komprese?
  - Jaké množství tepla vstupuje do soustavy na úseku cyklu *ab*?
  - Jaké množství tepla opouští soustavu na úseku cyklu *cd*?
  - Jaká je účinnost cyklu?
  - Čemu je rovna změna entropie na  $1$  g pracovní látky na úsecích *ab* a *cd*?
  - Ověřte, že u Carnotova cyklu s ideálním plynem jsou si poměry  $V_b/V_a$  a  $V_c/V_d$  rovny.
- 44.5 ■ Nedbalý experimentátor nechal ve spěchu ventil kontejneru naplněného héliem pootevřený. Plyn, původně pod tlakem  $200$  atm začal opouštět kontejner pomalu, izotermicky, při teplotě  $20$  °C. Určete změnu entropie na  $1$  kg plynu.

# I lustrace

# termodynamiky

---

## 45.1 VNITŘNÍ ENERGIE

## 45.2 APLIKACE

## 45.3 CLAUSIOVA – CLAPEYRONOVA ROVNICE

### 45.1 VNITŘNÍ ENERGIE

Termodynamika je poměrně těžká a složitá ve svých aplikacích a bylo by nepřiměřené, kdybychom se v tomto kurzu pouštěli při těchto aplikacích příliš do hloubky. Je velmi důležitá pro inženýry a chemiky, zájemci se o ní mohou poučit ve fyzikální chemii nebo inženýrské termodynamice. Existuje mnoho dobrých příruček, jako např. Zemanskyho „Teplota a termodynamika“, v nichž se o termodynamice dozvíte hodně. V čtrnáctém vydání Encyclopedia Britannica jsou výborné články o termodynamice a termochemii a v článku o chemii se dočtete o fyzikální chemii, vypařování, zkapalňování plynů apod.

Termodynamika je tak složitá, protože jednu věc můžeme popsat mnoha způsoby. Chceme-li popsat chování plynu, můžeme vycházet z toho, že tlak závisí na teplotě a na objemu nebo z toho, že objem závisí na teplotě a tlaku. Zajímáme-li se o vnitřní energii  $U$ , můžeme vycházet z toho, že závisí na teplotě a objemu, ale proměnné si můžeme zvolit i jinak a pak můžeme vycházet z toho, že závisí na teplotě a tlaku nebo na tlaku a objemu apod. V poslední kapitole jsme mluvili i jiné funkci teploty a objemu, kterou jsme nazývali entropie a můžeme sestavit ještě mnoho jiných funkcí těchto proměnných: například  $U - TS$  je funkcí teploty a objemu. Máme tedy mnoho různých veličin, jež mohou být funkcemi rozmanitých kombinací proměnných.

Abychom nekomplikovali situaci, budeme v této kapitole uvažovat jako nezávislé proměnné *teplotu a objem*. Chemici používají jako nezávislé proměnné teplotu a tlak, protože se snáze měří a ovládají v chemických experimentech, ale my budeme v celé kapitole používat teplotu a objem až na jednu výjimku, když budeme vysvětlovat, jak se uskutečňuje transformace na chemický systém proměnných.

Budeme tedy uvažovat jen jeden systém nezávislých proměnných: teplotu a objem. Dalším omezením bude to, že se budeme zabývat jen o dvě závislé funkce: o vnitřní energii a tlak. O ostatních funkcích nebudeme mluvit, neboť je lze odvodit z uvedených dvou funkcí. I přes tato omezení je termodynamika stále dost obtížný předmět, i když už ne tolik.

Nejdříve si zopakujeme něco z matematiky. Je-li veličina funkcí dvou proměnných, musíme být opatrnější při jejím derivování než v případě jedné proměnné. Co rozumíme derivací tlaku podle teploty? Změny tlaku provázející teplotní změny částečně závisí na tom, co se děje s objemem, když se mění teplota  $T$ . Dříve než pojem derivace podle  $T$  nabude přesný smysl, musíme říci něco o změnách objemu. Například se můžeme ptát, jaká je rychlost změny  $p$  vzhledem k  $T$ , je-li  $V$  konstantní. Tato rychlost je právě obyčejnou derivací, kterou jsme zvyklí psát jako  $dp/dT$ . Abychom si připomněli skutečnost, že  $p$  kromě toho, že závisí na  $T$ , závisí i na jiné proměnné a tuto proměnnou považujeme za konstantu  $V$ , obvykle používáme speciální symbol  $\partial p/\partial T$ . Na upozornění, že druhá proměnná se nemění, používáme nejen symbol  $\partial$ , ale i index označující proměnnou, kterou považujeme za konstantu, tedy píšeme  $(\partial p/\partial T)_V$ . Máme-li jen dvě proměnné, je takové označení zbytečné, ale pomůže nám lépe se orientovat v džungli parciálních derivací termodynamiky.

Předpokládejme, že funkce  $f(x, y)$  závisí na dvou nezávislých proměnných  $x$  a  $y$ . Pod  $(\partial f/\partial x)_y$  rozumíme obyčejnou derivaci získanou obvyklým způsobem, považujeme-li  $y$  za konstantu:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Podobně definujeme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Například, je-li  $f(x, y) = x^2 + yx$ , pak  $(\partial f/\partial x)_y = 2x + y$  a  $(\partial f/\partial y)_x = x$ . Tuto myšlenku můžeme zobecnit i na vyšší derivace:  $\partial^2 f/\partial y^2$  nebo  $\partial^2 f/\partial y \partial x$ . Poslední symbol znamená, že nejdříve derivujeme  $f$  podle  $x$  a přitom považujeme  $x$  za konstantu a pak derivujeme výsledek podle  $y$  a považujeme  $x$  za konstantu. Skutečné pořadí derivování není podstatné:  $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$ .

Budeme potřebovat vypočítat změnu  $\Delta f$  funkce  $f(x, y)$ , když  $x$  se mění na  $x + \Delta x$  a  $y$  se mění na  $y + \Delta y$ . Předpokládejme, že  $\Delta x$  a  $\Delta y$  jsou infinitezimálně malé

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= \underbrace{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}_{\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y} + \underbrace{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}_{\Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x} = \end{aligned} \quad (45.1)$$

Poslední rovnice je základním vztahem, jenž vyjadřuje  $\Delta f$  pomocí  $\Delta x$  a  $\Delta y$ .

Jako příklad použití tohoto vztahu vypočítejme změnu vnitřní energie  $U(T, V)$  při změně teploty z  $T$  na  $T + \Delta T$  a změně objemu z  $V$  na  $V + \Delta V$ . Použijeme-li rovnici (45.1), můžeme psát

$$\Delta U = \Delta T \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \Delta V \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T. \quad (45.2)$$

V předcházející kapitole jsme našli jiné vyjádření změny  $\Delta U$  vnitřní energie při dodání tepla  $\Delta Q$  plynu

$$\Delta U = \Delta Q - p \Delta V.$$



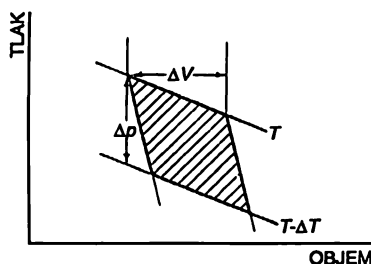
Porovnání rovnic (45.2) a (45.3) by nás mohlo přivést na myšlenku, že  $p = (\partial U / \partial V)_T$ , jenže taková představa není správná. Abychom získali správný vztah, nejdříve předpokládáme, že plynu dodáme teplo  $\Delta Q$ , zatímco objem zůstane stejný, tedy  $\Delta V = 0$ . Když  $\Delta V = 0$ , rovnice (45.3) nám říká, že  $\Delta U = \Delta Q$  a z rovnice (45.2) dostaneme  $\Delta U = (\partial U / \partial T)_V \Delta T$ , takže  $(\partial U / \partial T)_V = \Delta Q / \Delta T$ . Poměr  $\Delta Q / \Delta T$  představuje množství tepla, které musíme dodat látce, aby se při konstantním objemu změnila její teplota o jeden stupeň, nazývá se *měrná tepelná kapacita při konstantním objemu* a označuje se symbolem  $C_V$ . Takovým způsobem jsme ukázali, že

$$\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_V. \quad (45.4)$$

Nyní dodejme plynu opět množství tepla  $\Delta Q$ , ale při stálé teplotě  $T$  a objem ať se změní o  $\Delta V$ . V takovém případě je analýza složitější, ale  $\Delta U$  můžeme počítat s použitím Carnotových argumentů a k tomu nám poslouží Carnotův cyklus, o němž jsme mluvili v předcházející kapitole.

Diagram tlak – objem pro Carnotův cyklus je znázorněn na obr. 45.1. Už dříve jsme ukázali, že celkové množství práce konané plynem při vratném cyklu je rovno  $\Delta Q(\Delta T / T)$ , kde  $\Delta Q$  je množství tepelné energie dodané plynu při izotermické expanzi při teplotě  $T$  z objemu  $V$  na  $V + \Delta V$  a  $T - \Delta T$  je výsledná teplota, které plyn dosáhne při adiabatické expanzi v druhé části cyklu. Nyní ukážeme, že tato vykonaná práce je rovna vyšrafované ploše na obr. 45.1. Práce plynu je rovna ve všech případech  $\int p dV$  a je kladná, když se plyn rozpíná a záporná, když je stlačován.

Nakreslíme-li  $p$  v závislosti na  $V$ , pak změny  $p$  a  $V$  vystihuje křivka, která každé hodnotě  $V$  přiřazuje určitou hodnotu  $p$ . Mění-li se objem z jedné hodnoty na druhou, práce konaná plynem, tedy integrál  $\int p dV$ , je plocha pod křivkou spojující počáteční a konečnou hodnotu  $V$ . Aplikujeme-li tuto myšlenku na Carnotův cyklus a dáme pozor na znaménko práce plynu, opravdu zjistíme, že čistá práce plynu je právě vyšrafovaná plocha na obr. 45.1.

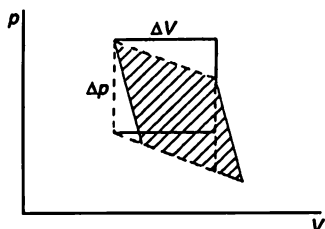


Obr. 45.1  $p$ - $V$ diagram Carnotova cyklu. Křivky označené  $T$  a  $T - \Delta T$  jsou izotermy, strmější křivky jsou adiabaty.  $\Delta V$  je objemová změna plynu, jemuž bylo při konstantní teplotě dodáno teplo  $\Delta Q$ .  $\Delta p$  je změna tlaku plynu, když se při konstantním objemu změnila teplota z hodnoty  $T$  na hodnotu  $T - \Delta T$

Nyní vyjádříme vyšrafovanou plochu geometricky. Cyklus znázorněný na obr. 45.1 se liší od cyklu z předcházející kapitoly v tom, že nyní  $\Delta T$  a  $\Delta Q$  jsou infinitesimálně malé. Pracujeme mezi adiabatickými a izotermickými čarami, které jsou velmi těsně u sebe, a proto se obrazec, nakreslený na obr. 45.1 silnými čarami bude blížit rovnoběžníku, když  $\Delta T$  a  $\Delta Q$  půjdou k nule. Plocha tohoto rovnoběžníku je právě  $\Delta V \Delta p$ , kde  $\Delta V$  je změna objemu plynu při dodání energie  $\Delta Q$  při konstantní teplotě a  $\Delta p$  je změna tlaku při změně teploty o  $\Delta T$  při stálém objemu. To, že je vyšrafovaná plocha na obr. 45.1 rovna  $\Delta V \Delta p$ , snadno nahlédneme, uvažujeme-li,

## VNITŘNÍ ENERGIE

že taková plocha je rovna ploše ohraničené přerušovanou čarou na *obr. 45.2*, která se od pravouhelníku ohraničeného  $\Delta p$  a  $\Delta V$  liší jen přidáním a odebráním stejných trojúhelníkových ploch.



**Obr. 45.2** Vyšrafovaná plocha = plocha ohraničená přerušovanými čarami = plocha pravouhelníku =  $\Delta p \Delta V$

Shrňme naše dosavadní úvahy:

$$\begin{array}{l}
 \text{Práce konaná plynem} = \text{vyšrafovaná plocha} = \Delta V \Delta p = \Delta Q \left( \frac{\Delta T}{T} \right) \\
 \text{nebo} \\
 \frac{\Delta T}{T} \cdot (\text{teplo potřebné ke změně } V \text{ o } \Delta V)_{T \text{ konstantní}} = \\
 = \Delta V \cdot (\text{změna } p \text{ při změně } T \text{ o } \Delta T)_{V \text{ konstantní}} \\
 \text{nebo} \\
 \frac{1}{\Delta V} \cdot (\text{teplo potřebné ke změně } V \text{ o } \Delta V)_{T} = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V .
 \end{array} \quad (45.5)$$

Vztah (45.5) vyjadřuje to podstatné, co vyplývá z Carnotových úvah. Celou termodynamiku můžeme odvodit ze vztahu (45.5) a prvního zákona, který je vyjádřen rovnicí (45.3). Vztah (45.5) je vlastně druhým zákonem, i když ten byl původně odvozen Carnotem v trochu jiném tvaru, protože Carnot nepoužil naší definici teploty.

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu  $(\partial U / \partial V)_T$ . O kolik se změní vnitřní energie  $U$ , změníme-li objem o  $\Delta V$ ? Vnitřní energie se mění, protože je dodáváno teplo a protože se koná práce. Dodané teplo je podle vztahu (45.5) rovno

$$\Delta Q = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V$$

a s látkou konaná práce je rovno  $-p \Delta V$ . Proto změna vnitřní energie  $\Delta U$  se skládá ze dvou částí

$$\Delta U = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V - p \Delta V. \quad (45.6)$$

Dělíme-li obě strany rovnice  $\Delta V$ , najdeme rychlost změny  $U$  v závislosti na  $V$  při konstantní teplotě  $T$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p. \quad (45.7)$$

V naší termodynamice, kde  $T$  a  $V$  jsou jediné proměnné a  $p$  a  $U$  jsou jediné funkce, představují rovnice (45.3) a (45.7) základní vztahy, z nichž můžeme získat všechny výsledky.

## 45.2 APLIKACE

Nyní se zamyslíme nad významem rovnice (45.7) a všimneme si, proč dává odpověď na otázku, které jsme položili v předcházející kapitole. Uvažovali jsme následující problém: v kinetické teorii je zřejmé, že růst teploty vede k růstu tlaku v důsledku nárazů atomů na píst. Ze stejného fyzikálního důvodu je při zpětném pohybu pístu z plynu odváděno teplo a abychom udrželi konstantní teplotu, musíme teplo dodat. Při expanzi se plyn ochlazuje a při ohřívání plynu tlak roste. Mezi těmito dvěma jevy musí existovat určitá souvislost a tato souvislost je explicitně dána rovnicí (45.7). Kdybychom zachovali objem a zvýšili teplotu, tlak by vzrostl rychlostí  $(\partial p / \partial T)_V$ . S touto skutečností souvisí i následující. Zvětšíme-li objem, plyn se ochladí, pokud nedodáme určité teplo k udržování konstantní teploty a veličina  $(\partial U / \partial V)_T$  nám říká, kolik tepla je třeba k udržení teploty dodat. Rovnice (45.7) vyjadřuje základní vztah mezi těmito dvěma jevy a to je věc, kterou jsme slíbili zjistit, když jsme se dostali až k termodynamickým zákonům. Aniž bychom znali vnitřní mechanismus plynu a za pomoci jediného poznatku, že nelze sestavit perpetuum mobile druhého druhu, jsme odvodili vztah mezi množstvím tepla potřebným k udržení konstantní teploty při rozpínání plynu a změnou tlaku při ohřátí plynu!

Nyní, když jsme si poradili s plynem uvažujme pásek gumy. Když takový pásek naplníme, zjišťujeme, že jeho teplota klesá a když ho ohříváme, vidíme, že se smršťuje. Jak vypadá rovnice, která by poskytovala pro pásek gumy stejný vztah, jako dává rovnice (45.3) pro plyn? V případě pásku gumy bude situace asi taková: když dodáme teplo  $\Delta Q$ , změní se vnitřní energie o  $\Delta U$  a vykoná se určitá práce. Jediný rozdíl je v tom, že práce konaná páskem gumy je  $-F\Delta L$  místo  $p\Delta V$ , přičemž  $F$  je síla působící na pásek a  $L$  je délka pásku. Síla  $F$  je funkcí teploty a délky pásku. Nahradíme-li  $p\Delta V$  v rovnici (45.3) výrazem  $-F\Delta L$ , dostaneme

$$\Delta U = \Delta Q + F\Delta L. \quad (45.8)$$

Porovnáním rovnic (45.3) a (45.8) zjistíme, že rovnici pro gumový pásek získáme pouhou záměnou písmen. Zaměníme-li  $L$  za  $V$  a  $-F$  za  $p$ , můžeme naše úvahy o Carnotově cyklu aplikovat na pásek gumy. Pak okamžitě zjistíme, že například teplo  $\Delta Q$ , potřebné ke změně délky o  $\Delta L$ , je dáno analogem rovnice (45.5):  $\Delta Q = -T(\partial F / \partial T)_L \Delta L$ . Udržujeme-li konstantní délku pásku a ohříváme ho, umožní nám tato rovnice vypočítat vzrůst síly vyjádřený pomocí tepla potřebného k udržování konstantní teploty při malém natažení pásku. Vidíme tedy, že stejné rovnice můžeme aplikovat na plyn i na pásek gumy. Když můžeme psát  $\Delta U = \Delta Q + A\Delta B$ , kde  $A$  a  $B$  představují různé veličiny, sílu a délku, tlak a objem apod., pak výsledky pro plyn získáme tak, že místo  $A$  a  $B$  dosadíme  $p$  a  $V$ . Jako příklad uvažujme rozdíl elektrických potenciálů nebo napětí  $E$  baterie a náboj  $\Delta Z$ , který prochází baterií. Víme, že práce konaná vratnou elektrickou baterií, takovou jako je např. akumulátor, je rovna  $E\Delta Z$ . (Neuvažujeme-li ve vyjádření pro práci člen  $p\Delta V$ , předpokládáme, že baterie má konstantní objem.) Podívejme se, co nám řekne termodynamika o činnosti baterie. Dosadíme-li hodnotu  $E$  místo  $p$  a hodnotu  $Z$  místo  $V$ , dostaneme z rovnice (45.6)

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = -T \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_Z - E. \quad (45.9)$$

Rovnice (45.9) říká, když baterií prochází náboj  $\Delta Z$ , změní se vnitřní energie  $U$ . Proč se  $\Delta U / \Delta Z$  nerovná prostě napětí  $E$  baterie? Důvod je ten, že skutečná baterie se zahřívá, prochází-li jí proud.

Vnitřní energie baterie se mění jednak proto, že baterie koná určitou práci ve vnějším obvodu a jednak proto, že se baterie ohřeje. Pozoruhodné je to, že tu druhou část změny vnitřní energie můžeme opět určit pomocí změny napětí baterie s teplotou. Mimochodem, když baterii prochází náboj, dochází k chemické reakci a rovnice (45.9) poskytuje elegantní způsob měření energie potřebné k uskutečnění chemické reakce. Potřebujeme jen zhotovit baterii využívající takovou reakci, změřit napětí a změřit, jak se mění napětí s teplotou, když z baterie neodebíráme náboj!

Předpokládali jsme, že objem baterie zůstává stálý a při vyjádření práce konané baterií jsme vynechali člen  $p \Delta V$ , takže nám zůstalo jen  $E \Delta Z$ . Ukazuje se však, že je technicky dost složité udržovat konstantní objem. Mnohem jednodušší je udržovat baterii při stálém atmosférickém tlaku. Právě proto nemají chemici rádi rovnice, které jsme odvodili a dávají přednost rovnicím, jež jsou vhodné pro podmínky konstantního tlaku. Na začátku této kapitoly jsme se rozhodli používat  $V$  a  $T$  jako nezávislé proměnné. Chemici dávají přednost  $p$  a  $T$  a nyní ukážeme, jak můžeme naše výsledky přetransformovat do chemického systému proměnných. Musíme však dát pozor, aby v dalším postupu nedošlo ke zmatku, neboť přecházíme od  $T$  a  $V$  k  $T$  a  $p$ .

Vyšli jsme z rovnice (45.3), v níž  $\Delta U = \Delta Q - p \Delta V$ ; člen  $p \Delta V$  můžeme nahradit výrazem  $E \Delta Z$  nebo  $A \Delta B$ . Kdybychom mohli nějakým způsobem nahradit člen  $p \Delta V$  výrazem  $V \Delta p$ , vyměnily by si  $p$  a  $V$  úlohy a chemici by mohli být spokojeni. S trochou důvtipu můžeme využít to, že diferenciál součinu  $pV$  je  $d(pV) = p dV + V dp$ , a když přičteme tuto veličinu k rovnici (45.3), dostaneme

$$\frac{\Delta(pV) = p \Delta V + V \Delta p}{\Delta U = \Delta Q - p \Delta V}.$$

$$\Delta(U + pV) = \Delta Q + V \Delta p$$

Abyste náš výsledek podobal rovnici (45.3), definujeme  $U + pV$  jako novou funkci, nazveme ji *entalpie*  $H$  a bude pro ni platit  $\Delta H = \Delta Q + V \Delta p$ .

Nyní jsme už připraveni transformovat naše výsledky do chemické řeči, budeme-li dodržovat tato pravidla:  $U \rightarrow H$ ,  $p \rightarrow V$ ,  $V \rightarrow p$ . Například základní vztah, který chemici používají místo rovnice (45.7), má tvar

$$\left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V.$$

Nyní už by nám mělo být jasné, jak se přechází k chemickým proměnným  $T$  a  $p$ . Vraťme se však k našim původním proměnným: ve zbytku této kapitoly budou nezávislé proměnné  $T$  a  $V$ .

Aplikujme nyní získané výsledky na některé fyzikální situace. Nejdříve uvažujme ideální plyn. Z kinetické teorie víme, že vnitřní energie plynu závisí jen na pohybu molekul a počtu molekul. Vnitřní energie závisí na  $T$ , ale ne na  $V$ . Změníme-li  $V$ , ale  $T$  zachováme konstantní,  $U$  se nezmění. Proto  $(\partial U / \partial V)_T = 0$  a rovnice (45.7) nám říká, že pro ideální plyn

$$T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p = 0. \quad (45.10)$$

Rovnice (45.10) je diferenciální rovnice, která nám může něco říci o  $p$ . S parciálními derivacemi se vypořádáme takto: Je-li parciální derivace při konstantním  $V$ , nahradíme ji obyčejnou derivací

a abychom na to nezapomněli, explicitně zapíšeme „konstantní  $V$ “. Rovnice (45.10) pak nabývá tvaru

$$T \frac{\Delta p}{\Delta T} - p = 0; V \text{ konstantní}; \quad (45.11)$$

a když tuto rovnici integrujeme, dostaneme

$$\begin{aligned} \ln p &= \ln T + \text{konst}; V \text{ konstantní}; \\ p &= \text{konst} \times T; V \text{ konstantní}. \end{aligned} \quad (45.12)$$

Víme, že pro tlak ideálního plynu platí

$$p = \frac{RT}{V} \quad (45.13)$$

a tento vztah je v souladu s (45.12), protože  $V$  a  $R$  jsou konstanty. Proč jsme se unavovali tímto výpočtem, když jsme už znali výsledek? Protože jsme používali *dvě nezávislé definice teploty!*

Jednou jsme předpokládali, že kinetická energie molekul je úměrná teplotě a tento předpoklad definoval jednu teplotní stupnici, kterou budeme nazývat stupnicí ideálního plynu.  $T$  v rovnici (45.13) se zakládá na této stupnici. Teploty měřené v plynové stupnici nazýváme i *kinetickými* teplotami. Později jsme definovali teplotu jiným způsobem, který nezávisel na žádné látce. Vycházeli jsme z druhého zákona termodynamiky a definovali to, co můžeme nazvat „absolutní termodynamickou teplotou“  $T$  a tato teplota vystupuje v rovnici (45.12). Zde jsme dokázali, že tlak ideálního plynu (definovaného jako něco, co má vnitřní energii nezávislou na objemu) je úměrný absolutní termodynamické teplotě. Víme i to, že tlak je úměrný teplotě měřené v plynové stupnici. Z toho můžeme usoudit, že kinetická teplota je úměrná „absolutní termodynamické teplotě“. To samozřejmě znamená, že je rozumné tyto dvě stupnice ztotožnit. A opravdu, tyto stupnice byly nakonec zvoleny tak, že se ztotožňují, konstanta úměrnosti je rovna jedné. Lidé si většinou sami dělají těžkosti, ale v tomto případě si situaci zjednodušili.

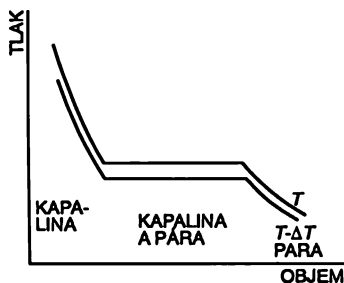
### 45.3 CLAUSIOVA – CLAPEYRONOVA ROVNICE

Vypařování kapaliny je dalším procesem, na který můžeme aplikovat výsledky, jež jsme odvodili. Předpokládejme, že máme nějakou kapalinu ve válci a můžeme ji stlačovat pístem. Ptáme se, jak se bude měnit tlak v závislosti na objemu, budeme-li udržovat stálou teplotu. Jinak řečeno, chceme nakreslit izotermu na  $p$ - $V$  diagramu. Látka ve válci už není ideální plyn, který jsme uvažovali předtím; může to být látka v kapalném nebo plynném stavu, případně může obsahovat obě tyto fáze. Stlačíme-li dostatečně látku, zkondenzuje na kapalinu. Budeme-li tlak dále zvětšovat, objem se bude měnit už jen velmi málo a naše izoterma bude s poklesem objemu rychle stoupat, jak to ukazuje levá strana *obrázku 45.3*.

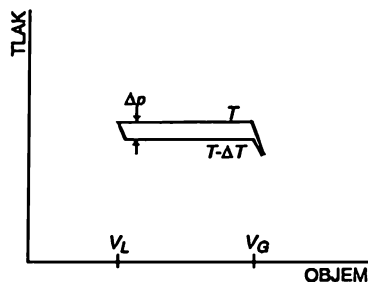
Zvětšíme-li objem vytáhnutím pístu, tlak poklesne, dokud nedosáhne bodu, při němž začne kapalina vřít a vytvářet se pára. Když píst ještě víc vytáhneme, bude se ještě více kapaliny vypařovat. Je-li válec částečně zaplněný kapalinou a částečně plynem, jsou tyto fáze v rovnováze – kapalina se vypařuje a pára kondenzuje stejnou rychlostí. Poskytneme-li páře více prostoru, bude k udržení tlaku potřebné větší množství páry, a tak se vypaří více kapaliny, ale tlak zůstane stálý. Na vodorovné části křivky z *obr. 45.3* se tlak nemění a jeho hodnota se nazývá *tlak páry při teplotě*

## CLAUSIOVA-CLAPEYRONOVA ROVNICE

$T$ . Kdybychom pokračovali ve zvětšování objemu, dospěli bychom k situaci, kdy už nezbyvá žádná kapalina na vypařování. Tehdy při dalším zvětšování objemu poklesne tlak tak, jako v případě obyčejného plynu a tuto situaci znázorňuje pravá strana  $P$ - $V$ diagramu. Dolní křivka na *obrázku 45.3* je izotermická křivka při mírně snížené teplotě  $T - \Delta T$ . Tlak kapalně fáze mírně klesl, neboť kapalina se při vyšší teplotě roztáhla (většina látek se tak chová, jen voda v blízkosti teploty tání ne) a samozřejmě tlak páry je při nižší teplotě nižší.



Obr. 45.3 Izotermypáry kondenzující ve válci. Vlevo je látka v kapalném stavu, vpravo je látka ve stavu páry. Uprostřed je situace, kdy se ve válci nachází kapalina i pára.



Obr. 45.4  $p$ - $V$ diagram Carnotova cyklu párou, která kondenzuje ve válci. Vlevo je látka v kapalném stavu. Při teplotě  $T$  je dodané množství tepla  $L$ , potřebné k vypaření kapaliny. Pára adiabaticky expanduje při změně  $T$  na  $T - \Delta T$

Ze dvou izoterm sestojíme cyklus tak, že je spojíme (například adiabatami) na koncích vodorovných částí, jak je to znázorněno na *obr. 45.4*. Malý výčnělek v pravém dolním rohu obrázku není podstatný a zanedbáme ho. Použijeme Carnotovy argumenty, které říkají, že teplo, jež je dodáváno látce a jež ji mění z kapaliny v páru, souvisí s prací, kterou látka koná při průchodu cyklem. Necht'  $L$  je teplo potřebné k vypaření látky ve válci. Stejně jako při argumentaci bezprostředně předcházející rovnici (45.5) víme, že  $L(\Delta T/T) =$  práci konané látkou. Tak jako předtím představuje práci konanou látkou vyšrafovaná plocha, která je přibližně rovna  $\Delta p(V_G - V_L)$ , kde  $\Delta p$  je rozdíl tlaků páry při dvou teplotách  $T$  a  $T - \Delta T$ ,  $V_G$  je objem plynu a  $V_L$  je objem kapaliny; oba objemy jsou měřeny při tlaku páry. Vyjádříme-li rovnost těchto výrazů pro stejné obsahy ploch, dostaneme  $L \Delta T/T = \Delta p(V_G - V_L)$  neboli

$$\frac{L}{T(V_G - V_L)} = \frac{\partial p_{\text{páry}}}{\partial T} \quad (45.14)$$

Rovnice (45.14) poskytuje vztah mezi rychlostí změny tlaku páry s teplotou a množstvím tepla potřebného k vypaření kapaliny. Tento vztah odvodil Carnot, ale nazývá se Clausiova – Clapeyronova rovnice.

Nyní porovnejme rovnici (45.14) s výsledky odvozenými z kinetické teorie.  $V_G$  je obvykle mnohem větší než  $V_L$ . Proto  $V_G - V_L \approx V_G = RT/p$  na mol. Předpokládáme-li dále, že  $L$  je konstantní, nezávislé na teplotě – což není příliš dobré přiblížení – dostaneme  $\partial p / \partial T = L / (RT^2 p)$ . Řešení této diferenciální rovnice je

$$p = \text{konst } e^{-L/RT}. \quad (45.15)$$

Porovnejme to s teplotní změnou tlaku, kterou jsme odvodili už dříve z kinetické teorie. Kinetická teorie říká, že aspoň zhruba je počet molekul páry nad kapalinou roven

$$n = \frac{1}{V_A} e^{(U_G - U_L)/RT}, \quad (45.16)$$

kde  $U_G - U_L$  je vnitřní energie na mol v plynu mínus vnitřní energie na mol v kapalině, tj. energie potřebná k vypaření jednoho molu kapaliny. Rovnice (45.15) z termodynamiky a rovnice (45.16) z kinetické teorie velmi těsně souvisí, protože tlak je  $nkT$ , ale nejsou přesně stejné. Můžeme však zařadit, aby byly stejné, předpokládáme-li, že  $L - U_G = \text{konst}$  místo  $L = \text{konst}$ . Předpokládáme-li, že  $L - U_G = \text{konst}$ , která nezávisí na teplotě, pak argumenty, které předtím vedly k rovnici (45.14), povedou k rovnici (45.16).

Toto porovnání ukazuje výhody a nevýhody termodynamiky proti kinetické teorii. *Za první*: Rovnice (45.14) získaná v termodynamice je přesná, zatímco rovnice (45.16) je jen přiblížení; vždyť například vyžaduje, aby  $U$  bylo téměř konstantní a i použitý model musí odpovídat skutečnosti. *Za druhé*: Nemusíme přesně vědět, jak se plyn mění na kapalinu a rovnice (45.14) je přece jen přesná, zatímco rovnice (45.16) je jen přibližná. *Za třetí*: I když jsme náš postup aplikovali na plyn, který kondenzuje na kapalinu, naše argumenty jsou správné pro jakoukoliv změnu stavu. Například přechod tuhé fáze na kapalnou má stejnou křivku, jako je na obr. 45.3 a 45.4. Zavedeme-li latentní teplo tání  $M/\text{mol}$ , dostaneme vztah podobný rovnici (45.14):  $(\partial p_{\text{tání}} / \partial T)_V = M / [T(V_{\text{kap}} - V_{\text{tuh}})]$ . I když nebudeme rozumět kinetické teorii procesu tání, dostaneme správnou rovnici. Když však porozumíme kinetické teorii, budeme mít další výhodu. Rovnice (45.14) je diferenciální rovnice a my nevíme, jak určit integrační konstanty. V kinetické teorii můžeme získat i tyto konstanty, pracujeme-li s dobrým modelem, který úplně popisuje daný jev. Každý z přístupů má tedy výhody i nevýhody. Jsou-li naše znalosti slabé a situace složitá, termodynamické vztahy jsou skutečně nejužitečnější. Je-li situace jednoduchá a lze provést teoretickou analýzu, je lepší se pokusit získat takovou analýzu víc informací.

Uvažujme ještě jeden příklad – záření černého tělesa. Už jsme mluvili o nádobě obsahující záření a nic jiného. Mluvili jsme o rovnováze mezi oscilátorem a zářením. Zjistili jsme, že fotony narážející na stěny nádoby vytvářejí tlak  $p$  a ukázali jsme, že  $pV = U/3$ , kde  $U$  je celková energie fotonů a  $V$  je objem nádoby. Dosadíme-li  $U = 3pV$  do základní rovnice (45.7), dostaneme

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 3p = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p. \quad (45.17)$$

Protože objem naší nádoby je konstantní, můžeme nahradit  $(\partial p / \partial T)_V$  výrazem  $dp / dT$ . Tak

získáme obyčejnou diferenciální rovnici a její integrací dostaneme:  $\ln p = 4 \ln T + \text{konst}$  nebo  $p = \text{konst} \times T^4$ . Tlak záření se mění se čtvrtou mocninou teploty a energetický obsah záření  $U/V = p/3$  se také mění jako  $T^4$ . Bývá zvykem psát  $U/V = (4\sigma/c) T^4$ , kde  $c$  je rychlost světla a  $\sigma$  je konstanta. Tuto konstantu nemůžeme získat ze samotné termodynamiky. To je názorný příklad její slabé a silné stránky. Poznání toho, že  $U/V$  se chová jako  $T^4$ , je velkou věcí, avšak abychom věděli, jak velké je ve skutečnosti  $U/V$  při libovolné teplotě, museli bychom proniknout až k detailům, a to nám může poskytnout pouze úplnější teorie. Pro záření černého tělesa takovou teorii máme, a proto můžeme odvodit výraz pro konstantu  $\sigma$  následujícími způsoby.

Nechť  $I(\omega) d\omega$  je rozdělení intenzity tok energie plochou  $1 \text{ m}^2$  za sekundu s frekvencí z intervalu od  $\omega$  po  $\omega + d\omega$ . Pro rozdělení hustoty energie = energie / objem =  $I(\omega) d\omega/c$  můžeme psát

$$\frac{U}{V} = \text{celková hustota energie} = \int_{\omega=0}^{\infty} \text{hustota energie mezi } \omega \text{ a } \omega + d\omega = \int_0^{\infty} \frac{I(\omega) d\omega}{c}.$$

Z předcházejících úvah už víme, že

$$I(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}.$$

Dosadíme-li do naší rovnice pro  $U/V$  tento výraz za  $I(\omega)$ , dostaneme

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Zavedením nové proměnné  $x = \hbar\omega/kT$  nabude tento výraz tvar

$$\frac{U}{V} = \frac{(kT)^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Integrál, který zde vystupuje, je nějaké číslo a my ho můžeme vypočítat přibližným způsobem tak, že si nakreslíme graf integrované funkce a určíme plochu pod ní. Tak dostaneme zhruba 6,5. Matematici by uměli dokázat, že tento integrál je roven přesně  $\pi^4/15$ .<sup>56)</sup>

Porovnáním tohoto výrazu s výrazem  $U/V = (4\sigma/c) T^4$  dostaneme

$$\sigma = \frac{k^4 \pi^2}{60 \hbar^3 c^2} = 5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

(tzv. Stefanova-Boltzmannova konstanta).

<sup>56)</sup> Protože  $(e^x - 1)^{-1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots$ , integrál je roven  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^3 dx$ .

Ale  $\int_0^{\infty} e^{-nx} dx = 1/n$  a trojnásobným derivováním podle  $n$  dostaneme  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx = 6/n^4$ , takže integrál je roven  $6 \left( 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots \right)$  a dobré přiblížení získáme, vezmeme-li jen několik prvních členů. V kapitole 50 najdeme způsob, jímž lze dá ukázat, že součet převrácených čtvrtých mocnin celých čísel je skutečně  $\pi^4/90$ .



## ILUSTRACE TERMODYNAMIKY

Zajímá nás, kolik energie projde za jednotku času otvorem jednotkového průřezu, který jsme udělali ve stěně naší nádoby. Abychom přešli od hustoty energie k toku energie, musíme hustotu energie  $U/V$  násobit veličinou  $c$ . Dále musíme násobit koeficientem  $1/4$ . To má dvě příčiny. Především musíme zahrnout jen energii, která proniká otvorem *ven*, tedy  $1/2$  celkového toku. Musíme také vzít v úvahu, že energie, která se přibližuje k otvoru, přichází z různých směrů, a proto musíme násobit dalším koeficientem  $1/2$ , tj. střední hodnotou funkce kosinus na druhou. Nyní je jasné, proč píšeme  $U/V = (4\sigma/c) T^4$ , a tak můžeme nakonec říci, že tok energie jednotkovou plochou malého otvoru je roven  $\sigma T^4$ .

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 45.1 ■ Slunce vyzařuje přibližně jako absolutně černé těleso o teplotě 5 700 K. Budeme-li slunečním světlem ozařovat absolutně černou měděnou kouli umístěnou ve vzdálenosti 1 AU od Slunce, jaká se na ní ustaví rovnovážná teplota? (Průměr Slunce je ze Země pozorován pod úhlem 30´.)
- 45.2 ■ Sluneční světlo dopadá kolmo k povrchu Země někde v rovníkové Africe. Bude-li povrch vyzařovat jako absolutně černé těleso, jaká bude maximální teplota v této oblasti? (Sluneční konstanta je rovna 1395 W/m<sup>2</sup>.)
- 45.3 ■ Absolutně černé těleso o poloměru  $r$  a teploty  $T$  je obklopeno oboustranně začerněnou obálkou poloměru  $R$ . Zjistěte, jak bude takové radiační stínění zpomalovat ochlazování tělesa. V prostoru mezi tělesem a obálkou je vakuum, takže nedochází ke ztrátám tepelnou vodivostí.
- 45.4 ■ V centru Slunce je hustota přibližně 80 g/cm<sup>3</sup> a teplota  $\sim 13 \cdot 10^6$  K. Sluneční látka je tvořena převážně protony a elektrony. Najděte tlak plynu a radiační tlak v centru Slunce.
- 45.5 ■ Latentní výparné teplo vody je přibližně 2,44 · 10<sup>6</sup> J/m<sup>3</sup> a hustota páry při 100°C je 0,598 kg/m<sup>3</sup>. Pomocí Clausiovy – Clapeyronovy rovnice najděte rychlost změny bodu varu vody s výškou ve stupních na kilometr na úrovni moře. Teplotu vzduchu položte rovnou 300 K.
- 45.6 ■ Ukažte, že pro ideální plyn, jehož vnitřní energie závisí pouze na teplotě, rozdíl mezi molárními tepelnými kapacitami při stálém tlaku a stálém objemu je roven plynové konstantě  $R$ :  
 $C_p - C_v = R$ .
- 45.7 ■ Při 0°C je měrný objem nasycené vodní páry 206 m<sup>3</sup>/kg. Jaké bude latentní výparné teplo vody v J/kg při této teplotě? Návod: Určete podle tabulek  $dp/dT$ , vypočítejte  $L$  a porovnejte s tabulkovou hodnotou.
- 45.8 ■ Těleso pohlcuje stálý podíl  $A$  celkového záření dopadajícího na jeho povrch a zbytek odráží. Ukažte, že při teplotě  $T$  vyzařuje energii  $A \sigma T^4$ .
- 45.9 ■ a) Na základě termodynamických úvah dokažte, že jestliže látka při zamrznání zvětšuje svůj objem, její teplota tání musí klesat s rostoucím tlakem.  
b) Je rozšířen názor, že bruslení je umožněno tím, že led pod bruslí taje. Přijmete-li tuto hypotézu, vypočítejte nejnížší teplotu ledu na kluzišti, při níž se ještě dá bruslit.

# Rohatka se západkou

---

## 46.1 JAK PRACUJE ROHATKA

## 46.2 ROHATKA JAKO STROJ

## 46.3 VRATNOST V MECHANICE

## 46.4 NEVRATNOST

## 46.5 USPOŘÁDÁNÍ A ENTROPIE

### 46.1 JAK PRACUJE ROHATKA

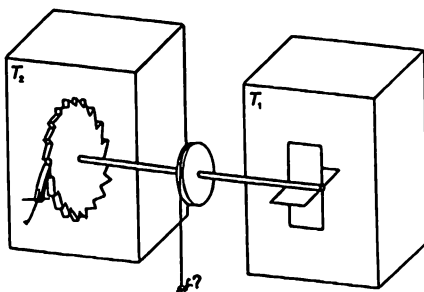
V této kapitole budeme mluvit o rohatce (ozubené kolo se šikmými zuby) se západkou, která představuje velmi jednoduché zařízení, dovolující hřídeli otáčet se pouze v jednom směru. To že máme zařízení, které se bude otáčet jen jedním směrem si vyžaduje důkladný rozbor, z něhož vyplynou některé zajímavé důsledky.

K takové diskuzi nás přivedla snaha o elementární vysvětlení skutečnosti z molekulárního nebo kinetického hlediska, že existuje určité maximum práce, které lze získat z tepelného stroje. Samozřejmě, my už známe podstatu Carnotových argumentů, ale bylo by krásné najít vysvětlení, které by bylo elementární v tom smyslu, že by ukazovalo, co se vlastně fyzikálně děje. Existují složité matematické důkazy, vyplývající z Newtonových zákonů, potvrzující, že při toku tepla z jednoho místa na druhé můžeme získat jen určité množství práce; tyto důkazy nám však nedávají elementární představu. Stručně řečeno, nevidíme do nich, i když rozumíme matematické stránce.

Skutečnost, že při přechodu od jedné teploty k druhé nemůžeme získat víc než určité množství práce, vyplývá podle Carnotovy argumentace z jiného axiómu, který říká, že v cyklickém procesu nemůžeme přeměnit teplo na práci, je-li vše při stejné teplotě. Pokusme se proto nejdříve aspoň na jednom elementárním příkladě ukázat, proč platí toto jednoduché tvrzení.

Pokusme se vymyslet zařízení, jež by porušovalo druhý zákon termodynamiky, tedy přístroj, který by získával práci z tepelného rezervoáru a přitom by se vůbec nezměnila teplota. Mějme řekněme nádobu s plynem při určité teplotě a v ní osičku s větrníčkem (viz. obr. 46.1, pro  $T_1 = T_2 = T$ ). Větrníček bude v důsledku nárazů molekul kmitat a poskakovat. Teď už nám jen zbývá připevnit na druhý konec osičky kolo, které se může otáčet jen jedním směrem – rohatku

se západkou. Pootočení větrníčku jedním směrem bude možné, ale pootočení opačným směrem bude vyloučeno. Rohatka se proto bude pomalu otáčet, a kdybychom na konec vlákna navěšeli něco se na buben upevněný na osičce zavěsili blechu, vytáhne ji nahoru! Je to vůbec možné? Podle Carnotovy hypotézy to není možné. Na první pohled se však zdá, že by to mělo být možné. Proto si toho budeme muset všimnout podrobněji. A opravdu, když si všimneme rohatky se západkou, objevíme řadu komplikací.



Obr. 46.1 Stroj na základě rohatky a západky

Především: Naše idealizovaná rohatka je sice co nejjednodušší, ale je zde západka a u ní musí být pružina. Když západka opustí zub, musí se vrátit a k tomu je potřebná pružina.

Je ještě jeden charakteristický rys rohatky se západkou, který není ukázán na obrázku, ale který je velmi důležitý. Předpokládejme, že zařízení je sestrojeno z dokonale pružných částí. Když západka přejede konec zubu a je vrácena pružinou, narazí na rohatku, odrazí se a tak to půjde dál. Při další fluktuaci se rohatka může pootočit i nazpět, protože zub se může dostat pod západku, pokud ta byla nahoře. Podstatnou částí nevratnosti rohatky je tlumící mechanismus, který zastavuje odrazy. Jenže při takovém tlumení energie západky přechází na rohatku a projevuje se jako teplo. Rohatka se proto stává teplejší a teplejší. Abychom situaci zjednodušili, umístíme rohatku v nádobě s plynem, abychom mohli odvést určité teplo. Můžeme tedy říci, že při růstu teploty rohatky, roste i teplota plynu. Bude se to dít stále? Ne! Západka a rohatka, nacházející se při teplotě  $T$ , mají také Brownův pohyb. Tento pohyb se projevuje tak, že čas od času se západka náhodně zdvihá nad zub právě tehdy, když Brownův pohyb větrníčku se snaží otočit osičku nazpět. Čím je teplota vyšší, tím se to stává častěji.

V tom je příčina, proč takové zařízení nebude pracovat v neustálém pohybu. Když větrníček dostane náraz, někdy nadzdvihne západku a pootočí se. Jenže někdy, když se snaží pootočit na druhou stranu, je už západka nadzdvihnutá v důsledku fluktuací pohybu osy na straně rohatky a rohatka se pootočí nazpět! Oba pohyby se tak vyruší. Není těžké ukázat, že v případě, kdy je teplota na obou stranách stejná, bude střední výsledný pohyb rohatky nulový. Rohatka sice bude kmitat na jednu i druhou stranu, ale nebude se otáčet tak, jak bychom si přáli, tedy jedním směrem.

Všimněme si příčiny takového chování. Abychom zdvihli západku na vrchol zubu, musíme konat práci proti síle pružiny. Označme tuto energii symbolem  $\varepsilon$  a symbolem  $\vartheta$  označme úhel mezi zuby. Pravděpodobnost, že systém nashromáždí dost energie  $\varepsilon$  ke zdvihnutí západky na vrchol zubu, je rovna  $e^{-\varepsilon/kT}$ . Ale pravděpodobnost, že se západka dostane náhodně nahoru, je také rovna  $e^{-\varepsilon/kT}$ . Proto počet případů, kdy je západka nahoře a rohatka se může volně pootočit v opačném směru, je stejný jako počet případů, kdy je dost energie k pootočení rohatky v přímém směru při spuštění západce. Tak dostáváme „rovnováhu“ a rohatka se nebude otáčet.

## 46.2 ROHATKA JAKO STROJ

Pojďme dále. Uvažujme příklad, kdy má větrník teplotu  $T_1$  a rohatka se západkou teplotu  $T_2$ , přičemž  $T_2$  je menší než  $T_1$ . Protože rohatka je chladná a fluktuace západky jsou poměrně řídké, bude pro západku velmi těžké dosáhnout energie  $\varepsilon$ . Protože teplota  $T_1$  je vysoká, větrníček často získá energii  $\varepsilon$  a naše zařízení půjde tak, jak si přejeme, tedy v jednom směru.

Rádi bychom se dozvěděli, zda naše zařízení může zdvihat závaží. K bubnu uprostřed našeho zařízení přivážeme nit a zavěsíme na ni závaží, například zmiňovanou blechu. Nechť  $L$  je moment síly vytvořený závažím. Není-li  $L$  příliš velké, náš stroj zdvihne závaží, neboť fluktuace Brownova pohybu jím pohnou častěji jedním směrem než druhým. Chtěli bychom vědět, jakou tíhu může zdvihnout, jak rychle se bude točit atd.

Nejdříve budeme uvažovat pohyb vpřed, pro nějž je vlastně rohatkové ústrojí přizpůsobeno. Kolik energie je třeba vzít z větrníkového konce, aby se uskutečnil jeden krok dopředu? Musíme vzít energii  $\varepsilon$  na zdvihnutí západky. Aby se rohatka otočila o úhel  $\vartheta$  proti momentu  $L$ , je třeba energie  $L\vartheta$ . Celkové množství energie, které musíme vzít, je tedy rovno  $\varepsilon + L\vartheta$ . Pravděpodobnost, že ji dostaneme, je rovna  $e^{-(\varepsilon + L\vartheta)/kT_1}$ . Ve skutečnosti nám nejde jen o získání této energie, ale i o to, kolikrát za sekundu se to stane. Pravděpodobnost za sekundu je úměrná  $e^{-(\varepsilon + L\vartheta)/kT_1}$  a konstantu úměrnosti označíme  $1/\tau$ . Tato konstanta se nakonec stejně vyruší. Při jednom kroku dopředu je práce konaná na závaží rovna  $L\vartheta$ . Energie odebraná z větrníku je rovna  $\varepsilon + L\vartheta$ . Vlákno se namotává s energií  $\varepsilon$ , potom to zaskřípe, klapne a tato energie se přemění v teplo. Všechna odebraná energie se spotřebuje ke zdvihnutí závaží a západky a západka pak zaskočí a odevzdá teplo druhé straně.

Nyní si všimněme případu, kdy jde o opačný pohyb. Co se tu děje? Má-li se rohatka točit nazpět, stačí nám dodat tolik energie, aby se západka dostatečně zdvihla a rohatka proklouzla. Tato energie je také rovna  $\varepsilon$ . Pravděpodobnost za sekundu, že se západka dostatečně zdvihne, je rovna  $(1/\tau) e^{-(\varepsilon/kT_2)}$ . Konstanta úměrnosti je stejná, ale v exponentu je nyní  $kT_2$ , protože teplota je jiná. Když západka proklouzne, ztratí se práce, neboť rohatka proklouzne nazpět. Proklouzl jeden zub a tak se ztratila práce  $L\vartheta$ . Energie odebraná z rohatkového ústrojí je rovna  $\varepsilon$  a energie odevzdaná plynu při teplotě  $T_1$  na straně větrníku je rovna  $L\vartheta + \varepsilon$ . Není těžké to pochopit. Předpokládejme, že západka se sama zdvihla v důsledku fluktuace. Zapadne-li potom nazpět a pružina ji zatlačí proti zubu, máme sílu, která se snaží pootočit rohatku, protože zub tlačí na nakloněnou rovinu. Tato síla koná práci, a stejně i síla pocházející od závaží. Celková síla je součtem těchto sil a všechna energie, která se pomalu uvolňuje, se objeví na straně větrníku v podobě tepla. (Musí to tak být v důsledku platnosti zákona zachování energie, ale je to třeba dobře promyslet!) Vidíme, že všechny tyto energie jsou přesně stejné jako předtím, jen působí v opačném směru. Proto podle toho, který z těchto procesů je rychlejší, závaží pomalu stoupá nebo klesá. Samozřejmě závaží stále poskakuje, kousek nahoru a kousek dolů, ale my máme na mysli průměrné chování.

Předpokládejme, že při určitém závaží jsou rychlosti těchto procesů stejné. Pak přidejme na konec vlákna nekonečně malé závaží. Závaží bude pomalu klesat a stroj bude konat práci. Energie bude odebírána rohatce a odevzdávána větrníku. Když ale trochu závaží ubereme, bude mít nerovnováha opačný charakter. Závaží stoupá a teplo je odebíráno z větrníku a odevzdáváno rohatce. Tak máme podmínky Carnotova vratného cyklu za předpokladu, že závaží je takové, že rychlosti jsou stejné. Tuto podmínku zřejmě vyjadřuje rovnost  $(\varepsilon + L\vartheta)/T_1 = \varepsilon/T_2$ . Nechť stroj pomalu zdvihá závaží. Energie  $Q_1$  je odebírána větrníku a energie  $Q_2$  je dodávána rohatce a tyto

## ROHATKA JAKO STROJ

energie jsou v poměru  $(\varepsilon + L\vartheta)/\varepsilon$ . Spouštíme-li závaží, máme také  $Q_1/Q_2 = (\varepsilon + L\vartheta)/\varepsilon$ . Proto máme (viz tab. 46.1)

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Tabulka 46.1

### Shrnutí pohybů rohatky se západkou

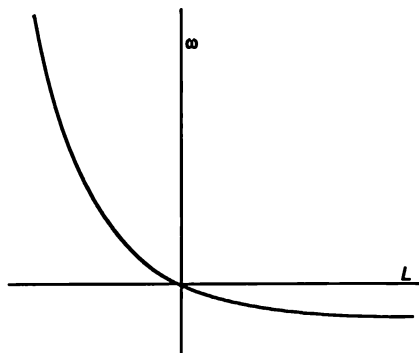
<p><i>Dopředu:</i> Potřebná energie</p> <p>Odebráno z větrníku</p> <p>Vykonaná práce</p> <p>Odevzdáno rohatce</p>	<p><math>\varepsilon + L\vartheta</math> z větrníku</p> <p>rychlost procesu = <math>\frac{1}{\tau} e^{-(L\vartheta + \varepsilon)/kT_1}</math></p> <p><math>L\vartheta + \varepsilon</math></p> <p><math>L\vartheta</math></p> <p><math>\varepsilon</math></p>
<p><i>Dozadu:</i> Potřebná energie</p> <p>Odebráno rohatce</p> <p>Ztracená práce</p> <p>Odevzdáno větrníku</p>	<p><math>\varepsilon</math> pro západku</p> <p>rychlost procesu = <math>\frac{1}{\tau} e^{-\varepsilon/kT_2}</math></p> <p><math>\varepsilon</math></p> <p><math>L\vartheta</math></p> <p><math>L\vartheta + \varepsilon</math></p> <p style="text-align: right;">} stejné jako výše, ale s opačným znaméním</p>
<p>Je-li systém vratný, rychlosti procesů jsou stejné a tedy <math>\frac{\varepsilon + L\vartheta}{T_1} = \frac{\varepsilon}{T_2}</math>.</p> <p><math>\frac{\text{Tepló k rohatce}}{\text{Tepló z větrníku}} = \frac{\varepsilon}{L\vartheta + \varepsilon}</math>.      Tedy <math>\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}</math>.</p>	

Dále, práce, kterou získáváme, je k energii odebrané z větrníku v takovém poměru jako  $L\vartheta$  k  $L\vartheta + \varepsilon$ , tedy v poměru  $(T_1 - T_2)/T_1$ . Vidíme, že naše vratně pracující zařízení nemůže vytěžit víc práce, než dovoluje tento vztah. To je hlavní výsledek tohoto článku a na základě Carnotova důkazu jsme tento výsledek i čekali. Naše zařízení však můžeme využít k pochopení některých jiných jevů, dokonce i v nerovnovážném stavu, a tedy mimo oblast termodynamiky.

Vypočítejme, jak *rychle* se bude naše jednosměrné zařízení otáčet, bude-li vše při stejné teplotě a na buben zavěsíme závaží. Zatáhneme-li velmi, velmi silně, nastanou samozřejmě rozličné komplikace. Západka prokluzuje přes zuby rohatky, zlomí se pružina nebo se přihodí něco jiného. Předpokládejme však, že zatáhneme dostatečně jemně a vše bude krásně pracovat. Tehdy je výše provedená analýza pro pravděpodobnosti přímého a zpětného pohybu rohatky správná, musíme však zabezpečit rovnost teplot. Při každém kroku získáváme úhel  $\vartheta$ , takže úhlová rychlost je  $\vartheta$ -násobkem pravděpodobnosti jednoho takového skoku za sekundu. Zařízení se pootočí dopředu s pravděpodobností  $(1/\tau) e^{-(\varepsilon + L\vartheta)/kT}$  a dozadu s pravděpodobností  $(1/\tau) e^{-\varepsilon/kT}$ , takže pro úhlovou rychlost dostaneme

$$\omega = \frac{\vartheta}{\tau} e^{-(\varepsilon + L\vartheta)/kT} - e^{-\varepsilon/kT} = \frac{\vartheta}{\tau} e^{-\varepsilon/kT} (e^{-L\vartheta/kT} - 1). \quad (46.1)$$

Kdybychom nakreslili závislost  $\omega$  na  $L$ , dostali bychom křivku jako na *obrázku 46.2*. Je vidět že je velký rozdíl mezi tím, když  $L$  je kladné, a když  $L$  je záporné. Vyrůstá-li  $L$  v kladné oblasti, což nastává tehdy, snažíme-li se o zpětný chod rohatky, pak se zpětná rychlost blíží konstantě. Stává-li se  $L$  záporným,  $\omega$  prudce roste, protože e na velkého mocnitele je ohromně velký!



Obr. 46.2 Úhlová rychlost rohatky jako funkce momentu síly

Úhlová rychlost vyvolaná různými silami je tedy velmi nesymetrická. Pohyb jedním směrem je snadný: už malá síla vyvolává velkou úhlovou rychlost. Při pohybu opačným směrem můžeme vynaložit velkou sílu a rohatka se sotva točí.

Spodobnou situací se setkáme u elektrického usměrňovače. Místo síly máme elektrické pole a místo úhlové rychlosti máme elektrický proud. V případě usměrňovače není napětí úměrné odporu a situace je nesymetrická. Analýza, kterou jsme provedli v případě mechanického usměrňovače, se hodí pro elektrický usměrňovač. Vztah, který jsme získali, je typický i pro závislost propustnosti usměrňovače na působícím napětí.

Odložme nyní všechna závaží a všimněme si původního stroje. Kdyby  $T_2$  bylo menší než  $T_1$ , rohatka by se pohybovala dopředu, tomu každý uvěří. Opačnému případu je však těžší na první pohled uvěřit. Je-li  $T_2$  větší než  $T_1$ , rohatka se otáčí opačným směrem! Silně zahřátá dynamická rohatka se bude otáčet nazpět, protože její západka odskakuje. Je-li západka v určitém okamžiku na nakloněné rovině, odtlačuje tuto rovinu na stranu. Na nakloněnou rovinu však západka tlačí vždy, neboť i když se zdvihne dost vysoko a přejde přes okraj zubu, nakloněná rovina sklouzne a západka je opět na nakloněné rovině. Horká rohatka se západkou je tedy ideálně přizpůsobena pro chod v přesně opačném směru, než je směr, pro který byla původně navržena!

Přes všechnu naši šikovnost při konstrukci jednostranného mechanismu při rovnosti teplot mizí dispozice otáčet se spíše jedním než druhým směrem. V okamžiku, kdy se na zařízení díváme, může se otáčet na jednu nebo na druhou stranu, ale z hlediska dlouhodobého režimu se nikam nedostane. Tato skutečnost je základním, hlubokým principem, na němž spočívá celá termodynamika.

### 46.3 VRATNOST V MECHANICE

Co je to za hluboký mechanický princip, který nám říká, že při rovnosti teplot se naše zařízení neotočí ani doprava, ani doleva, pracuje-li dostatečně dlouho? Jde zřejmě o základní tvrzení, že nemůžeme zkonstruovat stroj, který by se ponechán sám sobě dostatečně dlouhou dobu

pohyboval s větší pravděpodobností jedním směrem než druhým. Pokusme se vysvětlit, jak toto tvrzení vyplývá ze zákonů mechaniky.

Zákony mechaniky vypadají asi takto: součin hmotnosti a zrychlení je roven síle působící na částici a síla působící na částici je nějakou složitou funkcí polohy všech ostatních částic. Existují i takové případy, kdy síly závisí na rychlosti jako v magnetizmu, ale takové případy teď nebudeme uvažovat. Všimneme si jednoduššího případu, jakým je gravitace, a v takovém případě síly závisí jen na poloze. Předpokládejme, že jsme už vyřešili náš systém rovnic a našli jsme nějaký zákon pohybu  $x(t)$  pro každou částici. Je-li systém dost složitý, řešení jsou velmi složitá, a to, co se děje v průběhu času, je velmi překvapující. Vymyslíme-li si totiž libovolnou konfiguraci částic, tato konfigurace se skutečně vyskytne, jen musíme dostatečně dlouho čekat! Sledujme-li naše řešení dostatečně dlouho, vidíme, že projde vlastně všemi možnými situacemi. V případě nejjednodušších zařízení to není absolutně nevyhnutné, ale je-li systém dost složitý, s velkým množstvím atomů, pak se to stává.

Je ještě jedna věc, která plyne z našeho řešení. Vyřešíme-li pohybové rovnice, dostaneme určité funkce času, například  $t + t^2 + t^3$ . Tvrdíme, že druhým řešením bude  $-t + t^2 - t^3$ . Jinými slovy, dosadíme-li v řešení všude  $-t$  místo  $t$ , opět dostaneme řešení téže rovnice. Tato skutečnost je důsledkem toho, že při dosazení  $-t$  místo  $t$  do původní diferenciální rovnice se nic nezmění, neboť v rovnici vystupují pouze druhé derivace podle  $t$ . To znamená, že při určitém pohybu je možný i přesně opačný pohyb. V úplném chaosu, k němuž dochází, čekáme-li dostatečně dlouho, se pohyb skutečně občas v jednom a občas v druhém směru. Určitý pohyb není o nic hezčí než pohyb opačný. Proto je nemožné zkonstruovat stroj, který by v dlouhodobém režimu dával přednost chodu v jednom směru před chodem v opačném směru, je-li tento stroj dostatečně složitý!

Můžeme vymyslet příklad, v němž toto naše tvrzení zřejmě neplatí. Například vezmeme-li kolo a v prázdném prostoru ho roztočíme, bude se neustále otáčet stejným směrem. Existují tedy určité podmínky, jako zachování momentu hybnosti, které nevyhovují našemu tvrzení. Naše tvrzení proto musíme formulovat opatrněji. Moment hybnosti mohou odebrat stěny nebo jiná tělesa, a proto už neplatí zákony zachování pro náš speciální pohyb. Proto je při dostatečné složitosti systému naše tvrzení správné. Zakládá se na skutečnosti, že zákony jsou vratné.

Z historických důvodů připomeneme zařízení vymyšlené Maxwellem, který jako první vypracoval dynamickou teorii plynů. Maxwell si představil takovou situaci: Dvě nádoby s plynem jsou spojené malým otvorem a mají stejnou teplotu. U otvoru sedí maličký démon (může to být samozřejmě stroj!). Otvor má dvířka, která démon může otevřít nebo zavřít. Pozoruje molekuly přicházející zleva. Když uvidí rychlou molekulu, otevře dvířka. Když uvidí pomalou molekulu, nechá dvířka zavřená. Kdybychom chtěli, aby to byl zvláště dokonalý démon, mohli bychom požadovat, aby měl oči i vzadu a dělal opačné úkony s molekulami přicházejícími z opačné strany. Pomalé molekuly by nechal procházet doleva a rychlé doprava. A nyní řekněte, jsou zákony termodynamiky narušeny existencí takového démona?

Ukazuje se, že démon konečných rozměrů by se sám tak zahřál, že by po chvíli už dobře neviděl. Příkladem takového nejjednoduššího démona by byla dvířka s pružinou, která by zakrývala otvor. Rychlá molekula jimi projde, neboť je schopná dvířka pootevřít. Pomalá molekula však projít nemůže a odrazí se nazpět. Jenže to není nic jiného než jiná forma našeho rohatkového ústrojí a my už víme, že takový mechanismus se musí zahřívát. Je v něm jen konečný počet vnitřních součástí, takže se nemůže zbavit přebytku tepla, které získal pozorováním molekul. V důsledku Brownova pohybu se začne brzo chvět tak, že nebude moci rozhodnout, zda se molekuly přibližují nebo vzdalují, a tak nebude schopen činnosti.



## 46.4 NEVRATNOST

Jsou všechny fyzikální zákony vratné? Zřejmě ne! Zkuste udělat ze smaženice vejce! Promítnete-li film obráceným směrem, budou se všichni smát. Nejpřirozenějším rysem všech jevů je jejich zjevná nevratnost.

Odkud nevratnost pochází? Z Newtonových zákonů ne. Žádáme-li, aby chování všech věcí v konečném důsledku vysvětlit pomocí fyzikálních zákonů, a ukáže-li se, že všechny rovnice mají tu fantastickou vlastnost, že při  $t = -t$  máme další řešení, pak musí být všechny jevy vratné. Čím to potom je, že v přírodě ve velkém měřítku nejsou děje vratné? Zřejmě musí existovat určitý zákon, nějaká skrytá základní rovnice, snad z oblasti elektrických jevů nebo fyziky neutrina, u níž záleží na tom, kterým směrem plyne čas.

Nyní se zabýváme tímto problémem. Jeden z takových zákonů už známe a ten říká, že entropie vždy roste. Máme-li teplý a chladný předmět, přechází teplo z teplého předmětu na chladný. Zákon entropie je tedy jedním takovým zákonem. Jenže my bychom chtěli pochopit zákon růstu entropie z hlediska mechaniky. Už se nám podařilo jen pomocí mechanických argumentů odvodit důsledky toho, že teplo samo nemůže procházet nazpět, a tak pochopit druhý zákon termodynamiky. Zřejmě tedy můžeme dostat nevratnost z vratných rovnic. Ale využili jsme při tom opravdu pouze zákony mechaniky? Podívejme se na to podrobněji.

Pokusme se najít mikroskopický popis entropie. Když říkáme, že někde (například v plynu) je určité množství energie, pak mikroskopický obraz získáme tehdy, když určíme, kolik energie má každý atom. Sečtáním energií jednotlivých atomů dostaneme celkovou energii. Podobně můžeme čekat, že každý atom má určitou entropii. Když tyto entropie sečteme, měli bychom dostat celkovou entropii. V tomto případě to už není tak jednoduché, ale uvažme, co se stane.

Jako příklad vypočítejme rozdíl entropií plynu při určité teplotě v jednom objemu a téhož plynu při stejné teplotě, ale v jiném objemu. Vzpomeňme si, že v 44. kapitole jsme pro rozdíl entropií měli vztah

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

V našem případě je energie plynu před expanzí a po expanzi stejná, protože teplota se nemění. Musíme tedy dodat dostatek tepla k vyrovnání práce konané plynem, tedy pro každou malou změnu objemu

$$dQ = p dV.$$

Dosadíme-li za  $dQ$ , dostaneme

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} p \frac{dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V} \frac{dV}{T} = Nk \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

To je výsledek, který jsme získali už v 44. kapitole. Zvětšíme-li například objem dvojnásobně, změna entropie bude  $Nk \ln 2$ .

Uvažujme nyní jiný zajímavý případ. Předpokládejme, že máme nádobu s přepážkou uprostřed. Na jedné straně je neon („černé“ molekuly) a na druhé argon („bílé“ molekuly). Pak přepážku odstraníme a molekuly necháme smísit. Jak se mění entropie? Můžeme si představit, že místo přepážky máme píst s otvory, jímž mohou procházet bílé molekuly, ale černé ne a potom

máme jiný píst, který má opačné vlastnosti. Pohybujeme-li pístem z jednoho konce nádoby na druhý, máme pro každý plyn právě takový problém, jaký jsme už vyřešili. Entropie se tedy mění o hodnotu  $Nk \ln 2$ , to znamená, že entropie připadající na jednu molekulu vzrostla o  $k \ln 2$ . Číslo 2 tam vystupuje, neboť molekula má prostor navíc, což je dost zvláštní. Není to vlastnost samotné molekuly, ale *volného prostoru* kolem ní. Vzniká neobvyklá situace, kdy entropie roste, ale všechno má stejnou teplotu a stejnou energii! Jediná změna nastala v tom, že molekuly jsou jinak rozloženy.

Velmi dobře víme, že po odstranění přepážky by se po dlouhém čase vše promísilo v důsledku srážek, kmitů, nárazů apod. V průběhu času se stává, že se bílá a černá molekula pohybují proti sobě a mohou se minout. Postupně náhodně vnikají bílé molekuly mezi černé a naopak. Budeme-li dost dlouho čekat, dostaneme směs. Je to bezpochyby nevratný proces reálného světa a musí vést k růstu entropie.

Setkali jsme se s jednoduchým příkladem nevratného procesu, který je celý složen z vratných událostí. Každou chvíli dochází ke srážce mezi dvěma molekulami a ty se rozletí do určitých směrů. Kdybychom promítli filmový záznam srážek v opačném sledu, diváci by neshledali na filmu nic neobvyklého. Opravdu, vždyť jeden druh srážky je stejně pravděpodobný jako druhý. Mísení je úplně vratné, a přece i nevratné. Každý ví, že kdybychom začali s oddělenými černými a bílými molekulami, dostali bychom za několik málo minut směs. Kdybychom si sedli a dívali se na směs ještě několik minut, molekuly by se neoddělily, ale zůstaly by smísené. Máme tedy nevratnost, která spočívá na vratných situacích. Nyní však vidíme i *příčinu*. Začali jsme se seskupením, jež je v určitém smyslu *uspořádané*. V důsledku chaotičnosti srážek se stalo neuspořádaným. *Zdrojem nevratnosti je právě přechod od uspořádaného seskupení k neuspořádanému.*

Kdybychom nafilmovali takový proces a promítli ho v obráceném sledu, viděli bychom jak postupně dochází k uspořádání. Někdo by však mohl říci: „Vždyť je to proti fyzikálním zákonům!“ Znovu bychom promítli film a sledovali bychom každou srážku. Každá by byla dokonalá a každá by vyhovovala fyzikálním zákonům. Příčina spočívá v tom, že rychlosti všech molekul jsou správné, takže sledujeme-li dráhy nazpět, dostaneme se k počátečním podmínkám. Taková situace je však velmi málo pravděpodobná. Kdybychom začali s plynem, v němž není nějaké zvláštní seskupení molekul, ale jsou tam prostě bílé a černé molekuly, nikdy by se nevrátily do původní situace a neoddělily by se.

## 46.5 USPOŘÁDÁNÍ A ENTROPIE

Nyní si musíme říci něco o tom, co rozumíme uspořádáním a co neuspořádáním. Nejde o to, zda je uspořádání hezké a neuspořádání ošklivé. Naše smísené a nesmísené plyny se liší v následujícím: Předpokládejme, že jsme prostor rozdělili na malé objemové elementy. Kolika způsoby můžeme rozmístit do objemových elementů bílé a černé molekuly tak, že bílá molekula bude na jedné straně a černá molekula na druhé straně? A kolika způsoby je můžeme rozmístit, když neklademe žádnou podmínku na jejich uložení? Je jasné, že v druhém případě máme mnohem více možností. „Neuspořádání“ měříme počtem způsobů, jimiž můžeme přeskupovat vnitřek aniž by se změnil vnější vzhled. *Logaritmus tohoto počtu způsobů je entropie*. V případě, kdy bílé a černé molekuly jsou odděleny, je počet těchto způsobů menší, a proto je menší entropie, resp. menší je „neuspořádání“.

S takovou technickou definicí neuspořádání můžeme pochopit naše tvrzení. Především, entropie měří neuspořádání. Dále vesmír vždy přechází od „uspořádání“ k „neuspořádání“, takže entropie vždy roste. Uspořádání není pořádkem v tom smyslu, že se nám takové seskupení líbí,

ale v tom smyslu, že počet různých seskupení, která si můžeme vymyslet tak, aby systém zvenku vypadal stejně, je poměrně omezený. V případě, kdy jsme promítli filmový záznam mísení plynů v opačném sledu, neměli jsme tak velké neuspořádání, jak bychom se mohli domnívat. Každý jednotlivý atom měl přesně takovou rychlost a takový směr, aby se dostal na správné místo! I když se to nezdálo, entropie nebyla vůbec veliká.

Co můžeme říci o vratnosti jiných fyzikálních zákonů? Když jsme mluvili o elektrickém poli pocházejícím od náboje pohybujícího se se zrychlením, řekli jsme, že musíme uvažovat retardované pole. V okamžiku  $t$  a ve vzdálenosti  $r$  od náboje bereme pole náboje se zrychlením při  $t - r/c$ , ne  $t + r/c$ . Na první pohled to vypadá tak, jakoby zákony elektřiny nebyly vratné. To je však velmi divné, neboť tyto zákony vyplývají ze soustavy Maxwellových rovnic, které jsou vratné. Můžeme také dokázat, že kdybychom brali jen avansované pole, tedy pole odpovídající událostem v čase  $t + r/c$  a provedli bychom to velmi důsledně ve zcela uzavřeném prostoru, vše by proběhalo přesně tak, jako v případě retardovaných polí! Tato zdánlivá nevratnost v elektřině, alespoň v uzavřeném prostoru není vůbec nevratností. To jsme vlastně už mohli tušit, neboť víme, že když kmitající náboj generuje pole, které se odráží od stěn nádoby, dojde nakonec k rovnováze, v níž není jednostrannost. Použití retardovaného pole je jen vhodnou metodou řešení.

Pokud víme, všechny základní fyzikální zákony, tak jako Newtonovy rovnice, jsou vratné. Odkud potom pochází nevratnost? Pochází z přechodu od uspořádání k neuspořádání, ale to nepochopíme, dokud nepoznáme důvod uspořádání. Čím to je, že situace, s nimiž se setkáváme v každodenním životě jsou vždy nerovnovážné? Jedno možné vysvětlení je toto. Všimněme si opět naší nádoby se směsí bílých a černých molekul. Je možné, že při dost dlouhém čekání by čirou náhodou, velmi nepravděpodobně, ale přece jen možná vzniklo takové rozdělení molekul, že na jedné straně by byly většinou bílé a na druhé straně většinou černé molekuly. Pak, postupem času a vývojem událostí by se molekuly opět promísily.

Jedním z možných vysvětlení vysokého stupně uspořádání v současném světě je prostě šťastná náhoda. V našem vesmíru možná v minulosti došlo ke vzniku určitého druhu fluktuace, kdy se věci poněkud oddělily a nyní se vrací k původnímu stavu. Taková teorie není nesymetrická, protože si můžeme položit otázku, jak budou oddělené plyny vypadat v blízké budoucnosti a jak vypadaly v nedávné minulosti. V obou případech bychom viděli šedivou skvrnu na rozhraní, protože molekuly se opět mísí. Plyny by se mísily bez ohledu na to, kterým směrem by plynul čas. Taková teorie by nevratnost vysvětlovala jako jednu z náhod života.

Vynasnažíme se ukázat, že věci se mají jinak. Předpokládejme, že nevidíme celou nádobu najednou, ale pouze její část a v určitém okamžiku objevíme v této části určitou míru uspořádání. V této malé části jsou bílé a černé molekuly odděleny. Co můžeme soudit o podmínkách v místech, kam jsme se ještě nepodívali? Věřme-li opravdu, že uspořádání vzniklo z úplného neuspořádání jako fluktuace, musíme vzít nejpravděpodobnější fluktuaci z těch, které mohou v pozorované části nastolit uspořádání. Ta však neodpovídá podmínce, že v ostatních částech panuje uspořádání. Z hypotézy, že svět je fluktuace, by vyplývalo, že podíváme-li se na tu část světa, kterou jsme nikdy předtím neviděli, musí být neuspořádaná, a ne taková, jako je ta část, kterou již známe. Kdyby bylo naše uspořádání důsledkem fluktuace, nemohli bychom očekávat uspořádání v jiných místech, než jsou ta, na nichž jsme ho už objevili.

Nyní předpokládejme, že rozdělení je důsledkem toho, že v minulosti byl vesmír skutečně uspořádaný. Nejde tedy o důsledek fluktuace, ale původně vypadalo všechno tak, že bílé a černé bylo odděleno. Taková teorie předpovídá, že uspořádání bude i na jiných místech, která jsme zatím ještě neviděli. Například astronomové zatím pozorovali jen některé z hvězd. Každý den obraťej své teleskopy k jiným hvězdám a nové hvězdy se chovají jako ostatní. Z toho usuzujeme,

že vesmír není fluktuace a uspořádání je památkou na ty podmínky, kdy vše začalo. To však neznamená, že chápeme logiku tohoto děje. Z nějakých důvodů měl vesmír v určitém okamžiku velmi malou entropii vzhledem ke svému energetickému obsahu a od té doby entropie roste. Taková je cesta do budoucna. Takový je původ vší nevratnosti procesů růstu a zániku, proto si pamatujeme věci, které jsou blíže k tomu okamžiku v historii vesmíru, kdy bylo uspořádání vyšší, než je nyní, a proto si nemůžeme pamatovat věci, kdy je neuspořádání vyšší než teď, což nazýváme budoucností. Jak jsme poznamenali v jedné z předcházejících kapitol, v poháru vína vidíme celý vesmír, podíváme-li se na něj pozorně. Pohár vína je opravdu složitá věc, vždyť je tam víno a sklo, světlo a mnoho jiných věcí.

Další půvab fyziky spočívá v tom, že i takové jednoduché a idealizované věci, jako je rohatkové ústrojí, pracují jen proto, že jsou částí vesmíru. Rohatka a západka se pohybují jedním směrem, neboť jsou v kontaktu s ostatními částmi vesmíru. Kdyby byly v uzavřeném prostoru a dostatečně dlouho izolovány, ozubené kolo by už nedávalo přednost jednomu směru otáčení před druhým. Jenže tak jako k nám po vytažení žaluzií pronikne světlo, jako nás zem chladí a slunce hřeje, tak se i rohatka pohybuje jedním směrem. Tato jednosměrnost souvisí se skutečností, že rohatka je částí vesmíru, a to nejen v tom smyslu, že podléhá fyzikálním zákonům vesmíru, ale i proto, že celý vesmír má jednostranné chování. Nemůžeme to plně pochopit, pokud se v záhadě historie počátků vesmíru nedostaneme od pochybných spekulací k vědeckému poznání.

# Zvuk. Vlnová rovnice

## 47.1 VLNY

## 47.2 ŠÍŘENÍ ZVUKU

## 47.3 VLNOVÁ ROVNICE

## 47.4 ŘEŠENÍ VLNOVÉ ROVNICE

## 47.5 RYCHLOST ZVUKU

### 47.1 VLNY

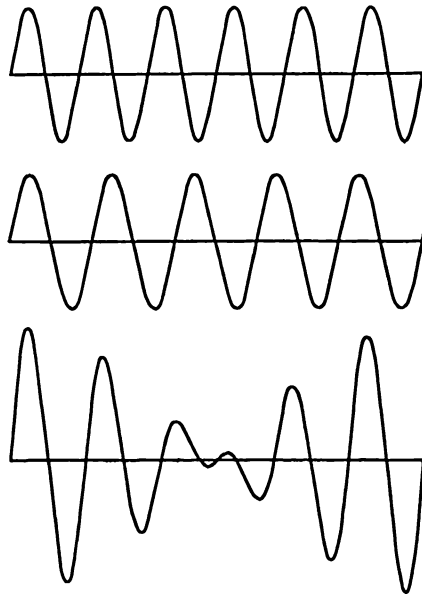
V této kapitole budeme mluvit o novém jevu – o vlnách. Je to jev, který se ve fyzice objevuje v mnoha souvislostech a budeme mu věnovat pozornost nejen proto, že se zajímáme o speciální případ vlnění, kterým je zvuk, ale také proto, že tyto myšlenky nacházejí široké uplatnění ve všech odvětvích fyziky.

Při studiu harmonického oscilátoru jsme ukázali, že vedle mechanických oscilujících systémů existují i elektrické. Vlny souvisí s kmitáním systémů, ale vlnění není jen kmitání na jednom místě závislé na čase, ale je to i šíření prostorem.

Vlny jsme už opravdu zkoumali. Když jsme mluvili o světle a učili se o vlastnostech světelných vln, věnovali jsme zvláštní pozornost prostorové interferenci vln stejné frekvence pocházejících z různých zdrojů nacházejících se v různých místech. Existují ještě dva důležité vlnové jevy, které jsme zatím ještě nestudovali a které se vyskytují v případech světla, tj. elektromagnetického vlnění, právě tak jako v případech kterýchkoliv jiných vln. Prvním z nich je *interference*, jenže ne v prostoru, ale v čase. Máme-li dva zdroje zvuku s nepatrně odlišnými frekvencemi a oba je současně slyšíme, pak k nám někdy přicházejí naráz vrchy obou vln a někdy vrch jedné s dolem druhé (viz obr. 47.1). Výsledkem je zesílení a zeslabení zvuku a tento jev nazýváme *rázy* (zázněje) nebo interference v čase. Druhý jev nastává, když je vlnění omezeno na určitý objem a odráží se od stěn takového prostoru.

O těchto jevech jsme, samozřejmě, mohli mluvit i v případě, kdy jsme zkoumali elektromagnetické vlny. Neudělali jsme to proto, abychom nezbudili pocit, že se najednou učíme o mnoha odlišných věcech. Abychom zdůraznili obecný charakter vlnění, které se neomezuje pouze na elektrodynamiku, budeme nyní uvažovat jiný příklad vln, konkrétně zvukové vlny.

## VLNY



**Obr. 47.1** Interference zvuku od dvou zdrojů s mírně rozdílnými frekvencemi vede k rázům

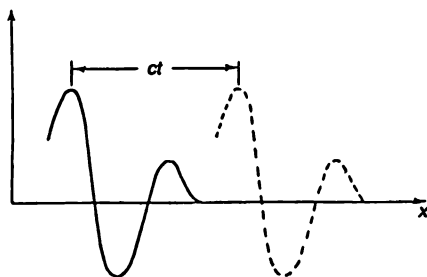
Jinými příklady vln jsou vlny na vodní hladině skládající se z dlouhých hřebenů, které vidáme přicházet ke břehu nebo malé vlnky na zčeřené hladině způsobené povrchovým napětím. Dalším příkladem vlnění jsou dva druhy pružných vln v pevných látkách. Vlny stlačené (podélné vlny), v nichž částice pevné látky kmitají podél směru šíření vlny (takovými jsou i zvukové vlny v plynu) a příčné vlny, v nichž částice pevné látky kmitají ve směru kolmém ke směru šíření. Seismické vlny obsahují vlnění obou druhů a vznikají pohybem některého místa zemské kůry.

Moderní fyzika objevila další příklad vln. Jsou to vlny určující amplitudu pravděpodobnosti nalezení částice v daném místě – de Broglieovy „vlny hmoty“, o nichž jsme již mluvili. Jejich frekvence je úměrná energii a jejich vlnové číslo je úměrné hybnosti. Jsou to vlny kvantové mechaniky.

V této kapitole budeme uvažovat jen takové vlny, jejichž rychlost nezávisí na vlnové délce. Příkladem takových vln je šíření světla ve vakuu. Rychlost světla je v takovém případě stejná pro rádiové vlny, modré nebo zelené světlo nebo kteroukoliv vlnovou délku. Právě proto jsme si hned zpočátku při popisu vlnových jevů nevěšili, že máme šíření vlny. Místo toho jsme říkali, že při pohybu náboje v jednom místě je elektrické pole ve vzdálenosti  $x$  úměrné ne zrychlení v čase  $t$ , ale v pozdějším čase  $t - x/c$ . Změna průběhu elektrického pole v prostoru je znázorněna na obr. 47.2, kde je vidět, že v pozdějším čase  $t$  se průběh pole posune o vzdálenost  $ct$ . Matematicky to pro jednorozměrný případ, o který se zajímáme, můžeme vyjádřit tak, že elektrické pole je funkcí  $x - ct$ . Je vidět, že při  $t = 0$  je určitou funkcí  $x$ . Budeme-li uvažovat pozdější okamžik, dostaneme stejnou hodnotu elektrického pole při větším  $x$ . Například, když bylo maximum pole v nulovém okamžiku při  $x = 3$ , určíme novou polohu maxima pole v okamžiku  $t$  takto

$$x - ct = 3, \text{ resp. } x = 3 + ct.$$

Vidíme, že taková funkce odpovídá šíření vlny.



Obr. 47.2 Průběh elektrického pole v určitém časovém okamžiku (plná čára) a v okamžiku, který je o dobu  $t$  zpožděn (přerušovaná čára)

Funkce  $f(x - ct)$  tedy představuje vlnu. Tento popis vlny můžeme shrnout do tvrzení, že

$$f(x - ct) = f(x + \Delta x - c(t + \Delta t)),$$

když  $\Delta x = c\Delta t$ . Samozřejmě existuje i jiná možnost, kdy místo zdroje na levé straně (obr. 47.2) máme zdroj na pravé straně a vlna se šíří v záporném směru  $x$ . V takovém případě bude vlnu popisovat funkce  $g(x + ct)$ .

Existuje i taková možnost, že v prostoru je současně více vln, takže elektrické pole je například součtem dvou polí a každé se šíří nezávisle. Takové chování elektrických polí můžeme charakterizovat tvrzením, že když  $f_1(x - ct)$  je vlna a  $f_2(x - ct)$  je jiná vlna, jejich součet je také vlna. Toto tvrzení nazýváme principem superpozice. Tento princip platí i v případě zvuku.

Dobře známe skutečnost, že při zvukové reprodukci slyšíme dokonale věrně stejnou posloupnost zvuků, jaká byla generována. Kdyby se vyšší frekvence šířily rychleji než nižší, slyšeli bychom místo hudby krátký, ostrý a nepřijemný zvuk. Podobně, kdyby se červené světlo šířilo rychleji než modré, záblesk bílého světla by nejprve vypadal červeně, pak bíle a nakonec modře. Mý však velmi dobře víme, že to tak není. I zvuk, i světlo se šíří vzduchem rychlostí, která téměř nezávisí na frekvenci. Příklady šíření vln, kdy není tato nezávislost splněna, budou uvažovány v kapitole 48.

V případě světla (elektromagnetických vln) jsme měli pravidlo, které určovalo elektrické pole v daném bodě jako důsledek zrychlení náboje. Dalo by se očekávat, že by bylo potřeba najít pravidlo, podle něhož by byla některá vlastnost vzduchu, řekněme tlak, určena v dané vzdálenosti od zdroje pomocí pohybu zdroje s přihlédnutím ke zpoždění při šíření zvuku. V případě světla bylo možné takový postup použít, neboť vše, co jsme věděli, spočívalo v tom, že náboj v jednom místě působí silou na druhý náboj v jiném místě. Podrobnosti šíření z jednoho místa na druhé nebyly vůbec podstatné. V případě zvuku však víme, že se šíří vzduchem mezi zdrojem a posluchačem a je jisté přirozené se ptát, jaký je tlak vzduchu v daném okamžiku. Chtěli bychom vědět i to, jak se vzduch skutečně pohybuje. V případě elektřiny jsme mohli akceptovat určité pravidlo, neboť jsme ještě neznali její zákony, ale v případě zvuku je už situace jiná. Už by nás neuspokojilo pravidlo o šíření zvukového tlaku, protože takový proces musí být možné vysvětlit jako důsledek zákonů mechaniky. Zkrátka zvuk je částí mechaniky, a proto ho musí být možné vysvětlit pomocí Newtonových zákonů. Šíření zvuku z jednoho místa na druhé je pouhým důsledkem mechaniky a vlastností plynů, jde-li o šíření v plynu, nebo vlastností kapalin či pevných látek, jde-li o šíření v takovém prostředí. Později odvodíme vlastnosti světla a jeho vlnového šíření podobným způsobem ze zákonů elektrodynamiky.

## 47.2 ŠÍŘENÍ ZVUKU

Nyní odvodíme vlastnosti šíření zvuku mezi zdrojem a přijímačem jako důsledek Newtonových zákonů, interakci zdroje a přijímače nebudeme uvažovat. Obvykle klademe důraz spíše na výsledek než na jeho odvození. V této kapitole zaujmeme opačný postoj. Zde bude v určitém smyslu hlavní právě odvození. Způsob vysvětlení nového jevu pomocí starých jevů, jejichž zákony už známe, je snad největším uměním matematické fyziky. Matematický fyzik má dva problémy: jedním je nalezení řešení dané rovnice a druhým je nalezení rovnic, které popisují nový jev. Odvození, které zde podáme, patří k druhému typu problémů.

Budeme uvažovat ten nejjednodušší problém – šíření zvuku v jednom směru. Abychom mohli takové odvození uskutečnit, musíme mít nejprve určitou představu o tom, co se děje. Základem tohoto jevu je, že při pohybu tělesa ve vzduchu vzniká rozruch, jenž se šíří vzduchem. Na otázku, o jaký rozruch jde, bychom mohli odpovědět, že pohyb předmětu vyvolává změny tlaku. Samozřejmě, když se předmět pohybuje pomalu, vzduch ho jen obtéká, ale nás zajímá rychlý pohyb, když vzduch nestihne obtéct těleso. Při takovém pohybu je vzduch stlačován, vzniká změna tlaku, která ovlivňuje sousedící vzduch. Stlačení tohoto vzduchu vede opět k dodatečnému tlaku, a tak se šíří vlna.

Takový proces chceme vyjádřit matematicky. Musíme se rozhodnout, jaké proměnné potřebujeme. V našem speciálním případě potřebujeme vědět, jak se vzduch přemístil, takže *posunutí* vzduchu ve zvukové vlně bude určité důležitou proměnnou. Navíc bychom chtěli popsat, jak se mění *hustota* vzduchu při jeho posunutí. I *tlak* vzduchu se mění, takže bude další proměnnou, která nás zajímá. Vzduch má, samozřejmě, *rychlost*, a proto musíme popsat rychlost částic vzduchu. Částice vzduchu mají i *zrychlení* – ale při vyjmenovávání těchto mnoha proměnných snadno pochopíme, že rychlost i zrychlení budeme znát, budeme-li vědět, jak se mění posunutí vzduchu s časem.

Jak jsme již uvedli, budeme uvažovat vlnu v jednom rozměru. Tak můžeme uvažovat, jsme-li dostatečně daleko od zdroje a to, co nazýváme *čelem vlny*, se jen velmi málo liší od roviny. Naše úvahy se zjednoduší tím, že bereme ten nejjednodušší příklad. Tak budeme moci říci, že posunutí  $\chi$  závisí pouze na  $x$ ,  $t$  a ne na  $y$ ,  $z$ . Chování vzduchu proto charakterizujeme funkcí  $\chi(x, t)$ .

Je takový popis úplný? Zdálo by se, že zdaleka není úplný, neboť neznáme podrobnosti pohybu molekul vzduchu. Ty se pohybují všemi směry a takový stav určitě není popsán funkcí  $\chi(x, t)$ . Z hlediska kinetické teorie, máme-li větší hustotu molekul v jednom místě a menší v sousedním místě, by molekuly měly odcházet z oblasti větší hustoty a přicházet do místa s menší hustotou, aby se tento rozdíl vyrovnal. Zřejmě bychom nedostali oscilace a neměli bychom ani zvuk.

Abychom dostali zvukovou vlnu, musí nastat následující situace: když molekuly vyletují z oblasti větší hustoty a většího tlaku, odevzdávají hybnost molekulám v přilehlé oblasti menší hustoty. Aby zvuk vznikl, musí být oblast, v níž se mění hustota a tlak, mnohem větší než vzdálenost, kterou projde molekula dříve než se srazí s jinou molekulou. Touto vzdáleností je střední volná dráha a musí být mnohem menší než vzdálenost mezi vrchem a dolem tlaku. V opačném případě se molekuly volně přemístí z vrchu do dolu vlny a okamžitě ji vyhladí.

Chování plynu budeme popisovat v měřítku, které je velké ve srovnání se střední volnou dráhou, a proto je jasné, že vlastnosti plynu nebudeme charakterizovat chováním jednotlivých molekul. Například posunutí bude posunutím těžiště malého objemu plynu a tlak nebo hustota budou tlakem nebo hustotou v tomto objemu. Tlak označíme symbolem  $p$ , hustotu  $\rho$  a tyto veličiny budou funkcemi  $x$  a  $t$ . Musíme však mít na zřeteli, že takový popis je přibližným, které je vhodné jen tehdy, když se vlastnosti plynu nemění příliš rychle se vzdáleností.



### 47.3 VLNOVÁ ROVNICE

Fyzika jevu, který nazýváme zvukovou vlnou, zkoumá tři charakteristické vztahy;

I. Plyn se pohybuje a mění se jeho hustota.

II. Změně hustoty odpovídá změna tlaku.

III. Nerovnoměrné rozdělení tlaku vyvolává pohyb plynu.

Nejdříve uvažujme druhý vztah. Jak v případě plynu, tak i v případě kapaliny nebo pevné látky je tlak určitou funkcí hustoty. Do přechodu zvukové vlny máme rovnováhu s tlakem  $p_0$  a odpovídající hustotou  $\rho_0$ . Tlak v prostředí souvisí s hustotou prostřednictvím určitého charakteristického vztahu  $p = f(\rho)$  a konkrétně rovnovážný tlak  $p_0$  je dán vztahem  $p_0 = f(\rho_0)$ . V případě zvuku jsou změny tlaku vzhledem k rovnovážné hodnotě mimořádně malé. Vhodnou jednotkou měření tlaku je 1 bar, přičemž  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$ .<sup>57)</sup> Tlak jedné standardní atmosféry je přibližně 1 bar. Platí  $1 \text{ atm} = 1,0133 \text{ bar}$ . V případě zvuku používáme logaritmickou stupnici intenzit, neboť citlivost ucha je přibližně logaritmická. Je to decibelová stupnice, v níž je hladina akustického tlaku, odpovídající amplitudě tlaku  $p$ , definována jako

$$I(\text{hladina akustického tlaku}) = 20 \log_{10} (p/p_{\text{ref}}) \text{ v dB}, \quad (47.1)$$

kde referenční tlak  $p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ bar}$ . Amplituda tlaku  $p = 10^3 p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ bar}$ <sup>58)</sup> odpovídá mírně silnému zvuku 60 decibelů. Je vidět, že tlakové změny zvuku jsou mimořádně malé ve srovnání s rovnovážným nebo středním tlakem jedné atmosféry. Posunutí a změny hustoty jsou také mimořádně malé. Při výbuších však změny nejsou už tak malé a vytvořený dodatečný tlak může být větší než 1 atm. Takové velké tlakové změny vedou k novým jevům, které budeme uvažovat později. V případě zvuku často neuvažujeme hladiny akustické intenzity převyšující 100 dB; vždyť při hladině 120 dB již pocítujeme bolest ucha. Proto v případě zvuku, když píšeme

$$p = p_0 + p_e \quad \rho = \rho_0 + \rho_e \quad (47.2)$$

budeme mít vždy změnu tlaku  $p_e$  velmi malou ve srovnání s  $p_0$  a změnu hustoty  $\rho_e$  velmi malou ve srovnání s  $\rho_0$ . Proto

$$p_0 + p_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0), \quad (47.3)$$

kde  $p_0 = f(\rho_0)$  a  $f'(\rho_0)$  představuje derivaci  $f(\rho)$  v bodě  $\rho = \rho_0$ . Pravá strana tohoto vztahu platí jen tehdy, když  $\rho_e$  je velmi malé. Tak zjišťujeme, že dodatečný tlak  $p_e$  je úměrný dodatečné hustotě  $\rho_e$  a koeficient úměrnosti označíme symbolem  $\kappa$ :

$$p_e = \kappa \rho_e, \text{ kde } \kappa = f'(\rho_0) = (dp/d\rho)_0 \quad (\text{II}). \quad (47.4)$$

<sup>57)</sup> Vlastně  $10^3 \text{ hPa}$ . (pozn. red.)

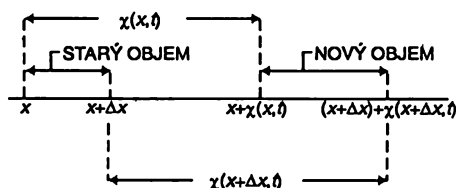
<sup>58)</sup> Při takové volbě  $p_{\text{ref}}$  nepředstavuje tlak  $p$  maximum tlaku zvukové vlny, ale „střední kvadratický“ tlak, který je  $(2)^{-1/2}$ -násobkem maximálního tlaku.

<sup>59)</sup> Indexem  $e$  jsme označili dodatečný „excesivní“ tlak spojený se zvukovou vlnou. (pozn. red.)

To je právě vyjádření vztahu II v tom jednoduchém případě.

Nyní uvažujeme vztah I. Předpokládejme, že poloha objemového elementu vzduchu neporušeného zvukovou vlnou je  $x$  a posunutí v čase  $t$  způsobené zvukem je  $\chi(x, t)$ , takže nová poloha je  $x + \chi(x, t)$ , jak je to znázorněno na obr. 47.3. Neporušená poloha sousedního objemového elementu vzduchu je  $x + \Delta x$  a jeho nová poloha je  $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ . Změny hustoty můžeme najít následujícím způsobem. Omezujeme-li se na rovinné vlny, můžeme vzít jednotkovou plochu kolmou na směr osy  $x$ , který je směrem šíření zvukové vlny. Množství vzduchu připadajícího na jednotkovou plochu v intervalu  $\Delta x$  je  $\rho_0 \Delta x$ , přičemž  $\rho_0$  je neporušená nebo rovnovážná hustota vzduchů. Tento vzduch se po posunutí zvukovou vlnou nachází mezi  $x + \chi(x, t)$  a  $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ , takže v tomto intervalu máme stejné množství vzduchu jako v intervalu  $\Delta x$  dříve, než působila porucha. Je-li  $\rho$  nová hustota, pak

$$\rho_0 \Delta x = \rho [x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)]. \quad (47.5)$$



Obr. 47.3 Posunutí vzduchu v bodě  $x$  je rovno  $\chi(x, t)$  a v bodě  $x + \Delta x$  je rovno  $\chi(x + \Delta x, t)$ . Původní objem připadající na jednotku plochy v rovinné zvukové vlně je roven  $\Delta x$  a nový objem  $\Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t)$ .

Protože  $\Delta x$  je malé, můžeme psát  $\chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t) = (\partial \chi / \partial x) \Delta x$ . Zde vystupuje parciální derivace, neboť  $\chi$  závisí na  $x$  i na čase. Naše rovnice pak získá tvar

$$\rho_0 \Delta x = \rho \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \Delta x + \Delta x \right), \quad (47.6)$$

neboli

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_e) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \rho_0 + \rho_e. \quad (47.7)$$

Ve zvukové vlně jsou všechny změny malé, a proto jsou malé  $\rho_e$ ,  $\chi$  i  $\partial \chi / \partial x$ . Ve vztahu, který jsme právě získali

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} - \rho_e \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (47.8)$$

proto můžeme zanedbat  $\rho_e \partial \chi / \partial x$  vzhledem k  $\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}$ . Tak dostaneme vztah I:

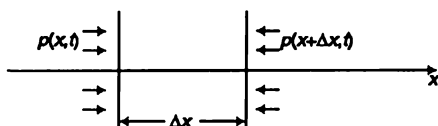
$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (I) \quad (47.9)$$

Takovou rovnici by bylo možné z fyzikálního hlediska očekávat. Mění-li se posunutí při změně

$x$ , musí existovat změny hustoty. Znaménko je také správné; roste-li posunutí  $\chi$  s rostoucím  $x$ , vzduch se rozpíná a hustota musí klesat.

Nyní musíme najít třetí rovnici, která by byla rovnicí pohybu vyvolaného tlakem. Známe-li vztah mezi silou a tlakem, můžeme získat pohybovou rovnici. Vezmeme-li tenkou vrstvu vzduchu s délkou  $\Delta x$  a jednotkovou plochu kolmou na  $x$ , pak hmotnost vzduchu v tomto objemu je  $\rho_0 \Delta x$  a má zrychlení  $\partial^2 \chi / \partial t^2$ , takže součin hmotnosti a zrychlení je v takovém objemu roven  $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$ . (Pro malé  $\Delta x$  nezáleží na tom, zda zrychlení  $\partial^2 \chi / \partial t^2$  počítáme na kraji objemu nebo někde uvnitř.) Chceme-li určit sílu působící na jednotkovou plochu takové vrstvy kolmou na  $x$ , bude rovna  $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$ . V bodě  $x$  máme sílu velikosti  $p(x, t)$  působící na jednotkovou plochu ve směru  $+x$  a v bodě  $x + \Delta x$  máme sílu velikosti  $p(x + \Delta x, t)$  působící na jednotkovou plochu v opačném směru (obr. 47.4), takže výsledná síla na jednotku plochy je

$$p(x, t) - p(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial p_e}{\partial x} \Delta x. \quad (47.10)$$



Obr. 47.4 Výsledná síla v kladném směru osy x vyvířená tlakem působícím na jednotkovou plochu kolmá na  $x$  je rovna  $-(\partial p / \partial x) \Delta x$ .

Přitom jsme využili to, že  $\Delta x$  je malé a jedinou částí  $p$ , která se mění, je dodatečný tlak  $p_e$ . Tak dostáváme vyjádření vztahu III

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_e}{\partial x}, \quad (III) \quad (47.11)$$

a máme dostatek rovnic k tomu, abychom využitím vzájemných souvislostí zredukovali počet proměnných na jedinou, řekněme  $x$ . Ze vztahu III vyloučíme  $p_e$  použitím vztahu (II), takže dostaneme

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -x \frac{\partial \rho_e}{\partial x}, \quad (III) \quad (47.12)$$

a pak použijeme vztah I k vyloučení  $\rho_e$ . Při takovém postupu nám  $\rho_0$  vypadne a zůstane nám

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = x \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}. \quad (47.13)$$

Zavedeme označení  $c_x^2 = x$  a můžeme psát

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_x^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (47.14)$$

To je vlnová rovnice, která popisuje šíření zvuku v látce.

## 47.4 ŘEŠENÍ VLNOVÉ ROVNICE

Nyní si všimneme, zda vlnová rovnice skutečně popisuje podstatné vlastnosti zvukových vln v látce. Chtěli bychom odvodit, že zvukový pulz nebo rozruch se pohybuje konstantní rychlostí. Chtěli bychom ověřit, že dva zvukové pulzy mohou procházet jeden druhým – to je zákon superpozice. Chtěli bychom ověřit i to, že zvuk se může šířit vpravo i vlevo. Všechny tyto vlastnosti musí obsahovat tato jediná rovnice.

Už jsme poznamenali, že každá porucha v podobě rovinné vlny, která se pohybuje konstantní rychlostí  $v$ , má tvar  $f(x - vt)$ . Nyní musíme zjistit, zda  $\chi(x, t) = f(x - vt)$  je řešením vlnové rovnice. Počítáme-li  $\partial\chi/\partial x$ , dostaneme derivaci funkce,  $\partial\chi/\partial x = f'(x - vt)$ . Derivujeme-li ještě jednou, dostaneme

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = f''(x - vt). \quad (47.15)$$

Derivováním téže funkce podle  $t$  dostaneme –  $v$ -násobek derivace funkce, tedy  $\partial\chi/\partial t = -vf'(x - vt)$  a dalším derivováním dostaneme

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt). \quad (47.16)$$

Je zřejmé, že  $f(x - vt)$  bude vyhovovat vlnové rovnici, bude-li rychlost vlny rovna  $c_z$ .

Ze *zákonů mechaniky* jsme tedy odvodili, že zvukový rozruch se šíří rychlostí  $c_z$  a navíc jsme zjistili, že

$$c_z = \kappa^{1/2} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0^{1/2}.$$

Takže jsme dali rychlost vlny do souvislosti s vlastností prostředí.

Kdybychom uvažovali vlnu postupující opačným směrem, takže  $\chi(x, t) = g(x + vt)$ , snadno bychom zjistili, že takový rozruch vyhovuje vlnové rovnici také. Jediný rozdíl mezi takovou vlnou a vlnou postupující opačným směrem je ve znaménku  $u$ . To, zda máme  $x + vt$  nebo  $x - vt$  jako proměnnou ve funkci, znaménko před  $\partial^2\chi/\partial t^2$  neovlivní, neboť tato derivace obsahuje pouze  $v^2$ . Proto řešení rovnice popisuje vlny šířící se v obou směrech rychlostí  $c_z$ .

Mimořádně zajímavá je otázka superpozice. Předpokládejme, že jsme našli jedno řešení vlnové rovnice a označme ho  $\chi_1$ . To znamená, že druhá derivace  $\chi_1$  podle  $x$  je rovna  $1/c_z^2$ -násobku druhé derivace  $\chi_1$  podle  $t$ . Předpokládejme, že máme i jiné řešení  $\chi_2$  a to musí mít stejnou vlastnost. Superponujeme-li tato dvě řešení, dostaneme

$$\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t), \quad (47.17)$$

a proto musíme prověřit, zda  $\chi(x, t)$  je také vlnou, tj. zda vyhovuje vlnové rovnici. To snadno dokážeme, neboť

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} \quad (47.18)$$

a dále

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2}. \quad (47.19)$$

Proto musí platit  $\partial^2 \chi / \partial x^2 = (1/c_z^2) \partial^2 \chi / \partial t^2$  a princip superpozice je ověřen. Důkaz principu superpozice je důsledkem skutečnosti, že vlnová rovnice je lineární v  $\chi$ .

Nyní můžeme očekávat, že rovinná světelná vlna šířící se ve směru osy  $x$  a polarizovaná tak, že elektrické pole je ve směru osy  $y$ , bude splňovat vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (47.20)$$

v níž  $c$  představuje rychlost světla. Tato vlnová rovnice je jedním z důsledků Maxwellových rovnic. Rovnice elektrodynamiky povedou k vlnové rovnici pro světlo právě tak, jako rovnice mechaniky vedly k vlnové rovnici pro zvuk.

## 47.5 RYCHLOST ZVUKU

Odvození vlnové rovnice pro zvuk nás přivedlo ke vztahu, který dával při normálním tlaku do následující souvislosti rychlost vlny a rychlost změny tlaku s hustotou

$$c_z^2 = \left( \frac{d\rho}{d\rho} \right)_0. \quad (47.21)$$

Při výpočtu této rychlosti změny je důležité znát, jak se mění teplota. V případě zvukové vlny můžeme čekat, že v oblasti stlačení vzroste teplota a v oblasti zředění teplota poklesne. Newton, který první počítal rychlost změny tlaku s hustotou, předpokládal, že teplota se nemění. Odůvodňoval to tak, že teplo je vedeno z jedné oblasti do druhé tak rychle, že teplota nestačí vzrůst nebo poklesnout. Takový postup však vede k izotermické rychlosti zvuku a to není správné. Správné odůvodnění podal později Laplace, který na rozdíl od Newtona předpokládal, že tlak a teplota se ve zvukové vlně mění adiabaticky. Tepelný tok ze zhuštěné do zředěné oblasti je zanedbatelný, je-li vlnová délka velká ve srovnání se střední volnou dráhou. Za těchto podmínek nepatrný tepelný tok neovlivňuje rychlost zvukové vlny, i když způsobuje malou absorpci zvukové energie. Je správné očekávat, že tato absorpce vzroste, přiblíží-li se vlnová délka střední volné dráze, ale takové vlnové délky jsou přibližně milionkrát menší, než je vlnová délka slyšitelného zvuku.

Skutečnou změnou tlaku s hustotou ve zvukové vlně je taková změna, při níž neteče teplo. To odpovídá adiabatické změně, pro níž platí  $pV^\gamma = \text{konst}$ , kde  $V$  je objem. Mění-li se hustota  $\rho$  nepřímo úměrně objemu  $V$ , adiabatický vztah mezi  $p$  a  $\rho$  má tvar

$$p = \text{konst} \cdot \rho^\gamma, \quad (47.22)$$

odkud dostaneme  $d\rho/d\rho = \gamma p/\rho$ . Pro rychlost zvuku pak máme vztah

$$c_z^2 = \frac{\gamma p}{\rho}. \quad (47.23)$$

## RYCHLOST ZVUKU

Tento vztah lze napsat i ve tvaru  $c_z^2 = \gamma pV / \rho V$ , v němž můžeme využít toho, že  $pV = NkT$ . Dále je vidět, že  $\rho V$  je hmotnost plynu, kterou lze vyjádřit jako  $Nm$  nebo  $\mu$ , kde  $m$  je hmotnost molekuly a  $\mu$  je molekulární hmotnost. Tak dospějeme ke vztahu

$$c_z^2 = \frac{\gamma kT}{m} = \frac{\gamma RT}{\mu}, \quad (47.24)$$

z něhož je zřejmé, že rychlost zvuku závisí jen na teplotě plynu, a ne na tlaku nebo hustotě. Už víme, že

$$kT = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle, \quad (47.25)$$

kde  $\langle v^2 \rangle$  je druhá mocnina střední kvadratické rychlosti molekul. Proto  $c_z^2 = (\gamma/3) \langle v^2 \rangle$  neboli

$$c_z = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{3}\right) \langle v \rangle}. \quad (47.26)$$

Tento vztah vyjadřuje skutečnost, že rychlost zvuku je součin střední kvadratické rychlosti molekul a určitého čísla, které je přibližně rovno  $1/(3)^{1/2}$ . Jinými slovy: rychlost zvuku je stejného řádu velikosti jako rychlost molekul a je ve skutečnosti o něco menší než střední rychlost molekul.

Tento výsledek jsme, samozřejmě, mohli očekávat, neboť taková porucha, jakou je změna tlaku, se vlastně šíří pohybem molekul. Jenže takový argument by nám ještě neurčil přesnou rychlost šíření; mohlo by se ukázat, že zvuk přenáší především nejrychlejší nebo nejpomalejší molekuly. Je rozumné a uspokojujivé, že rychlost zvuku je zhruba  $1/2$  střední molekulové rychlosti.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 47.1 ■ Najděte poměr rychlostí zvuku v heliu a vodíku při téže teplotě.
- 47.2 ■ Do dvou stejně dlouhých píšťal foukáme jednak vzduch ochlazený na  $-180^{\circ}\text{C}$  (teplota blízká teplotě varu vzduchu), jednak teplý vzduch. Jedna píšťala přitom vydává tón o oktávu vyšší než druhá. Jaká musí být teplota vzduchu, který foukáme do druhé píšťaly?
- 47.3 ■ Nadýchnete-li se helia a začnete mluvit, bude váš hlas nepřírozně vysoký. Kdyby všechny rezonanční dutiny ve vaší hlavě byly zaplněny heliem místo vzduchem, jak by vzrostla jejich rezonanční frekvence? Budete-li přitom zpívat, jak to ovlivní tóninu vašeho zpěvu?
- 47.4 ■ Uvažte rovinnou zvukovou vlnu o frekvenci 1 kHz, u níž se maximální a minimální hodnoty tlaku odlišují o 0,0001 % od normálního atmosférického tlaku. Rychlost zvuku berte rovnou 340 m/s.
- Jak se mění hustota vzduchu při šíření takové vlny?
  - Jaké bude maximální posunutí částic  $\chi_m$ ?
  - Čemu bude rovna intenzita vlny?
- 47.5 ■ Prsty obou rukou uchopte konce gumového pásku asi 5 cm dlouhého a požádejte kolegu, aby lehce bmnul o pásek. Ozve se zvuk. Pak roztahujte pásek na 2, 3, 4, 5 násobnou délku tak, aby hmotnost pásku mezi vašimi rukama zůstala stejná a pokus opakujte. Porovnejte zvuk v těchto případech. Proč něco podobného nenastává u houslové struny?
- 47.6 ■ Stejnorodá, dokonale ohebná struna o lineární hustotě  $\tau$  je natažena napětíovou silou  $T$ . Sestavte vlnovou rovnici popisující šíření vlny příčného posunutí  $y$  podél struny a najděte rychlost této vlny. Využijte předpoklad o tom, že ve všech bodech struny v každém okamžiku platí  $\partial y / \partial x \ll 1$  a uvažujte pouze rovinné kmity struny. Podotkněme, že složka síly napětí struny v příčném směru je velmi blízká k  $T \partial y / \partial x$ .
- 47.7 ■ Ukažte, že výraz  $u = A e^{i(\omega t - kx)}$  vyhovuje vlnové rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

za podmínky, že  $\omega$  a  $k$  jsou vázány vztahem  $\omega = vk$ .

# R48 Rázy

---

## 48.1 SKLÁDÁNÍ DVOU VLN

## 48.2 ZÁZNĚJOVÉ TÓNY A MODULACE

## 48.3 POSTRANNÍ PÁSY

## 48.4 LOKALIZOVANÉ VLNOVÉ BALÍKY

## 48.5 AMPLITUDY PRAVDĚPODOBNOСТИ PRO ČÁSTICE

## 48.6 VLNY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

## 48.7 NORMÁLNÍ MODY

### 48.1 SKLÁDÁNÍ DVOU VLN

Nedávno jsme dost podrobně mluvili o vlastnostech světelných vln a jejich interferenci, tj. superpozici dvou vln z různých zdrojů. V těchto úvahách jsme předpokládali, že frekvence zdrojů jsou stejné. V této kapitole budeme mluvit o některých jevech, jež jsou důsledkem interference dvou zdrojů s *různými* frekvencemi.

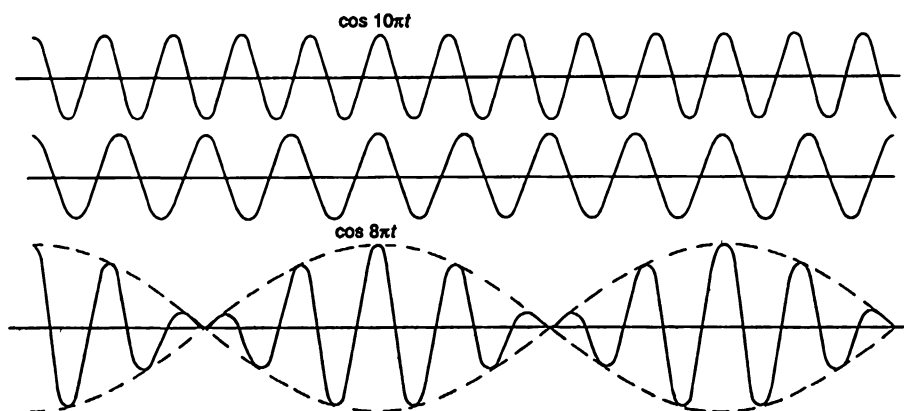
Snadno se dovzpíme, co se stane. Postupujme tak jako dříve a předpokládejme, že máme dva stejné zdroje kmitající se stejnou frekvencí, jejichž fáze jsou nastaveny tak, že do určitého bodu  $P$  přicházejí signály se stejnou fází. Jde-li o světlo, bude v tomto bodě velmi jasné, je-li to zvuk, bude velmi hlasitý, pokud jde o elektrony, bude jich tam hodně. Budou-li přicházející signály posunuty o  $180^\circ$ , nebudeme mít v bodě  $P$  signál, neboť výsledná amplituda zde má minimum. Nyní předpokládejme, že někdo otáčí „regulátorem fáze“ jednoho ze zdrojů a mění tak fázi v bodě  $P$  a tím i fázový rozdíl na tu či onu stranu, například tak, že nejprve je  $0^\circ$ , potom  $180^\circ$  atd. Pak se bude samozřejmě měnit i síla výsledného signálu. Bude-li se fáze jednoho signálu měnit vzhledem k fázi druhého signálu tak, že začne u nuly a bude postupovat k deseti, dvaceti, třiceti, čtyřiceti stupňům atd., naměříme v bodě  $P$  posloupnost silných a slabých „pulzací“, protože při  $360^\circ$  fázovém posunu se amplituda opět změní na maximální. Samozřejmě tvrzení, že jeden ze zdrojů posouvá svou fázi vzhledem k druhému zdroji konstantní rychlostí, je rovnocenné tvrzení, že počet kmitů za sekundu se u těchto zdrojů mírně liší.

Nyní už známe odpověď: máme-li dva zdroje s málo odlišnými frekvencemi, dostaneme výsledné oscilace s pomalu pulzující intenzitou. To je vlastně celá podstata rázů.



Získaný výsledek lze snadno formulovat i matematicky. Předpokládejme například, že máme dvě vlny a na chvíli zapomeneme na všechny prostorové vztahy a budeme se prostě zajímat o to, co přichází do bodu  $P$ . Necht' z jednoho zdroje přichází  $\omega_1 t$  a z druhého  $\omega_2 t$ , přičemž omegy nejsou přesně stejné. Ani amplitudy by nemusely být stejné, ale takový obecný případ budeme řešit až později; nejprve budeme amplitudy považovat za stejné. Celková amplituda v bodě  $P$  je součtem zmíněných dvou kosinů.

Kdybychom si nakreslili závislost amplitudy vlnění na čase, jako je to na *obr. 48.1*, viděli bychom, že tam, kde se setkají hřebeny vln, dostaneme silné vlnění; kde se setká hřeben a brázda, dostaneme prakticky nulu a kde se znovu setkají hřebeny, opět dostaneme silné vlnění.



**Obr. 48.1** Superpozice dvou kosinových vlns frekvencemi v poměru 8:10. Přesné opakování obrazce v každém rázu není typické pro obecný případ

Z matematické stránky musíme pouze vypočítat součet dvou kosinů a výsledek určitým způsobem přeskupit. Mezi kosiny existuje řada vztahů, které není těžké odvodit. Víme, že

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib} \quad (48.1)$$

a reálnou částí  $e^{ia}$  je  $\cos a$ , imaginární částí  $\sin a$ . Vezmeme-li reálnou část z  $e^{i(a+b)}$ , dostaneme  $\cos(a+b)$ . Vynásobením dostaneme

$$e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i \sin a) (\cos b + i \sin b),$$

tedy  $\cos a \cos b - \sin a \sin b$  plus nějaké imaginární části. My však nyní potřebujeme pouze reálnou část, a proto máme

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (48.2)$$

Změníme-li znaménko u  $b$ , dostaneme rovnici

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, \quad (48.3)$$

protože kosinus nezmění znaménko, ale sinus ho změní. Sečteme-li tyto rovnice, ztratíme sinus

## SKLÁDÁNÍ DVOU VLN

a zjistíme, že součin dvou kosinů je roven polovině kosinů součtu plus polovina kosinu rozdílu

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos (a + b) + \frac{1}{2} \cos (a - b). \quad (48.4)$$

Tento vztah můžeme i obrátit a najít vztah pro  $\cos \alpha + \cos \beta$ , položíme-li  $\alpha = a + b$ ,  $\beta = a - b$ . Tehdy  $a = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ ,  $b = \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$  a platí

$$\cos \alpha \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta). \quad (48.5)$$

Nyní můžeme analyzovat náš problém. Součet  $\omega_1 t$  a  $\omega_2 t$  má vyjádření

$$\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) t \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) t. \quad (48.6)$$

Nyní předpokládejme, že frekvence jsou téměř stejné, takže  $(1/2) (\omega_1 + \omega_2)$  je střední frekvence a je více méně stejná jako každá z frekvencí  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Jenže  $\omega_1 - \omega_2$  je *mnohem menší* než  $\omega_1$  nebo  $\omega_2$ , neboť podle předpokladu jsou frekvence  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  téměř stejné. To znamená, že řešení si můžeme představit tak, jakoby tam byla vysokofrekvenční kosinová vlna více méně stejná jako původní vlny, ale „velikost“ této vlny se pomalu mění – tato „velikost“ pulzuje s frekvencí  $(1/2) (\omega_1 - \omega_2)$ . Je to ta frekvence, s kterou slyšíme rázy? I když rovnice (48.6) říká, že amplituda se chová jako  $(1/2) (\omega_1 - \omega_2) t$ , musíme to chápat tak, že vysokofrekvenční kmity jsou ohraničeny dvěma opačnými kosinusoidami (na obr. 48 je to znázorněno přerušovanou čarou). Můžeme tedy říci, že amplituda se mění s frekvencí  $(1/2) (\omega_1 - \omega_2)$ , ale když mluvíme o *intenzitě* vlny, ta se mění s dvojnásobkem této frekvence. Tedy modulace amplitudy, ve smyslu její intenzity, probíhá s frekvencí  $\omega_1 - \omega_2$ , i když v našem vztahu máme násobení kosinem s poloviční frekvencí. Rozdíl spočívá v tom, že vysokofrekvenční vlna má trochu odlišný fázový poměr v druhém půlcyklu.

Nebudeme-li si všimnout této nevelké komplikace, můžeme říci, že sčítáním dvou vln s frekvencemi  $\omega_1$  a  $\omega_2$  dostaneme výslednou vlnu se střední frekvencí  $(1/2) (\omega_1 + \omega_2)$ , její intenzita osciluje s frekvencí  $\omega_1 - \omega_2$ .

Kdyby byly amplitudy různé, museli bychom celý postup provést znovu, kosiny násobit různými amplitudami  $A_1$ ,  $A_2$ , vykonat řadu matematických úprav a použít rovnice podobné rovnicím (48.2) až (48.5). Existují však jiné, jednodušší způsoby, kterými můžeme uskutečnit takovou analýzu. Víme například, že je mnohem jednodušší pracovat s exponenciály, a ne se sinem a kosinem, přičemž  $A_1 \cos \omega_1 t$  představuje reálnou část výrazu  $A_1 e^{i\omega_1 t}$ . Druhá vlna zase bude reálnou částí  $A_2 e^{i\omega_2 t}$ . Složením těchto vln dostaneme  $A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}$  a to můžeme přepsat do tvaru

$$A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} = e^{\frac{1}{2}i(\omega_1 + \omega_2)t} \left[ A_1 e^{\frac{1}{2}i(\omega_1 - \omega_2)t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}i(\omega_1 - \omega_2)t} \right]. \quad (48.7)$$

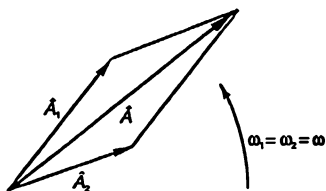
Opět máme vysokofrekvenční vlnu modulovanou nižší frekvencí.

## 48.2 ZÁZNĚJOVÉ TÓNY A MODULACE

Kdybychom chtěli vědět, jaká je intenzita vlny popsané rovnicí (48.7), museli bychom vypočítat druhou mocninu absolutní hodnoty levé nebo pravé strany této rovnice. Vezměme levou stranu. Intenzitu pak lze vyjádřit vztahem

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2) t. \quad (48.8)$$

Je vidět, že intenzita roste a klesá s frekvencí  $\omega_1 - \omega_2$  a mění se v rozsahu od  $(A_1 + A_2)^2$  po  $(A_1 - A_2)^2$ . Je-li  $A_1 \neq A_2$ , není minimum intenzity nulové.



Obr. 48.2 Výslednice dvou komplexních vektorů rotujících se stejnými frekvencemi

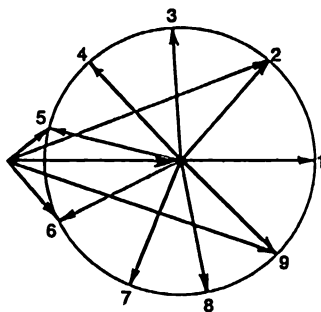
K tomuto výsledku můžeme dospět i graficky, tak jak je to znázorněno na *obr. 48.2*. Nechť vektor délky  $A_1$ , rotující s frekvencí  $\omega_1$ , představuje jednu z vln v komplexní rovině. Jiný vektor, který má délku  $A_2$  a rotuje s frekvencí  $\omega_2$ , představuje druhou vlnu. Kdyby tyto frekvence byly stejné, dostali bychom jako výsledek otáčející se vektor stálé délky, takže intenzita výsledné vlny by byla konstantní. Budou-li se však frekvence nepatrně lišit, budou se tyto dva komplexní vektory otáčet nestejnými rychlostmi. *Obrázek 48.3* znázorňuje, jak vypadá situace z hlediska vektoru  $A_1 e^{i\omega_1 t}$ . Je vidět, že  $A_2$  se pomalu odklání od  $A_1$ , a tak amplituda, kterou dostaneme složením těchto dvou vln je nejdříve velká a pak, když se druhý vektor rozevře, když svírá  $180^\circ$  úhel s prvním vektorem, bude amplituda nejmenší, a tak to půjde dále. Po dobu otáčení vektorů se stává amplituda vektorového součtu jednou větší, jednou menší a intenzita pulzuje. Je to poměrně jednoduchá myšlenka a můžeme ji realizovat rozmanitými způsoby.

Tento jev můžeme velmi snadno pozorovat experimentálně. V akustické oblasti můžeme instalovat dva reproduktory, kde každý je spojen s vlastním oscilátorem vytvářejícím určitý tón. Nastavíme-li u obou oscilátorů stejnou frekvenci, dostaneme v určitém bodě prostoru určitou sílu signálu. Když potom oscilátory mírně rozladíme, budeme slyšet, jak se mění intenzita signálu s časem. Čím větší je rozladění, tím rychlejší jsou změny zvuku. Náš sluch má však určité těžkosti při sledování změn signálu, jejichž frekvence převyšuje frekvenci přibližně deset kmitů za sekundu.<sup>60)</sup>

Tento jev můžeme pozorovat i na osciloskopu, který znázorňuje prostě součet proudů dvou generátorů. Je-li frekvence pulzů poměrně nízká, vidíme postupovat sinusoidální vlnu, jejíž amplituda pulzuje, ale když se pulzy zrychlí, zpozorujeme takový druh vlny, jaký znázorňuje *obr.*

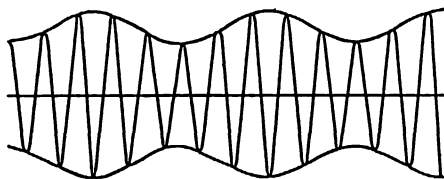
<sup>60)</sup> V akustice používáme často pro rázy staré české slovo zázněje, proto hovoříme o záznějových tónech. (pozn. red.)

48.1. Roste-li rozdíl frekvencí, maxima se vzájemně přibližují. Nejsou-li amplitudy signálů stejné, tedy je-li jeden signál silnější než druhý, dostaneme vlnu, jejíž amplituda nikdy není nulová – a to jsme očekávali. Dostáváme tedy to, co jsme měli dostat – a to v elektrickém i v akustickém případě.



Obr. 48.3 Výslednice dvou komplexních vektorů rotujících s různými frekvencemi v souřadnicové soustavě spojené s jedním vektorem. Obrázek znázorňuje posloupnost devíti poloh pomalu se otáčejícího vektoru.

Existuje i opačný jev! Při rádiovém vysílání se používá *amplitudová modulace* (AM), jejíž pomocí rádiový vysílač zprostředkuje přenos zvuku následujícím způsobem. Oscilátor rádiového vysílače budí elektrické kmity velmi vysoké frekvence, např. 800 kHz, ve vysílacím pásmu. Zapnutím tohoto *nosného signálu* vysílá rádiová stanice vlnu s konstantní amplitudou s frekvencí 800 000 kmitů za sekundu. „Informace“ – často úplně zbytečná, jako např. inzerát nabízející určitou značku automobilu – se vysílá tak, že se mění amplituda nosného signálu v rytmu zvukových kmitů dopadajících na mikrofon.



Obr. 48.4 Modulovaná nosná vlna. Na tomto schématickém obrázku  $\omega_n / \omega_m = 5$ . Ve skutečné rádiové vlně  $\omega_n / \omega_m \sim 100$ .

Budeme-li jako matematicky nejjednodušší případ uvažovat situaci, kdy sopranistka zpívá dokonalý tón vyvolaný sinusoidálním chvěním jejích hlasivek, dostaneme signál, jehož síla se mění tak, jak to znázorňuje *obr. 48.4*. Audiofrekvenční změny pak dešifruje přijímač; v něm se zbavíme nosné vlny a máme jen obálku, která představuje kmity hlasivek, tedy zvuk zpěvačky. Reproduktor pak vytvoří ve vzduchu kmity se stejnou frekvencí a posluchač vlastně nepozná rozdíl mezi skutečným hlasem zpěvačky a reprodukcí. Existuje však řada jemných poruch a jemných efektů, které přece jen dovolují rozpoznat, zda slyšíme skutečný zpěv sopranistky nebo reprodukci jejího zpěvu; jinak však všechno probíhá tak, jak bylo uvedeno.

### 48.3 POSTRANNÍ PÁSY

Matematicky můžeme uvažovanou modulovanou vlnu vyjádřit vztahem

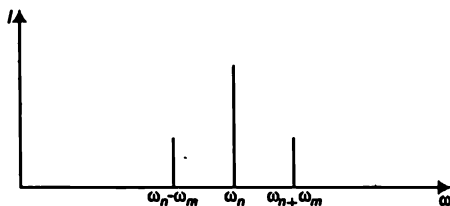
$$S = (1 + b \cos \omega_m t) \cos \omega_n t, \quad (48.9)$$

kde  $\omega_n$  představuje nosnou frekvenci a  $\omega_m$  zvukovou frekvenci. Kdybychom použili všechny ty věty o kosinech, nebo kdybychom pracovali s  $e^{i\theta}$  (vzhledem k výsledku je úplně jedno, jaký způsob zvolíme, ale s  $e^{i\theta}$  je to jednodušší), dostali bychom

$$S = \cos \omega_n t + \frac{1}{2} b \cos (\omega_n + \omega_m) t + \frac{1}{2} b \cos (\omega_n - \omega_m) t. \quad (48.10)$$

Proto bychom mohli z jiného hlediska říci, že výstupní vlna systému představuje superpozici tří vln: nejdříve regulární vlnu s frekvencí  $\omega_n$ , tedy s nosnou frekvencí, a dále dvě nové vlny s dvěma novými frekvencemi. Jedna z nich je rovna součtu nosné a modulační frekvence a druhá rozdíl. Kdybychom sestrojili jakýsi graf závislosti intenzity generovaných kmitů na frekvenci, dostali bychom velkou intenzitu u nosné frekvence, což je přirozené, ale když začne zpěvačka zpívat, najednou bychom objevili i intenzitu úměrnou síle hlasu zpěvačky,  $b^2$ , při frekvencích  $\omega_n + \omega_m$  a  $\omega_n - \omega_m$ , jak je to znázorněno na obr. 48.5. Jsou to tzv. *postranní pásy* a objevují se vždy, když je signál vysílače modulovaný. Znít-li současně více tónů, např.  $\omega_m$  a  $\omega_m'$ , tedy hrají-li dva nástroje nebo máme-li nějakou jinou, složitou kosinovou vlnu, pak nám matematika říká, že dostaneme další vlny, které odpovídají frekvencím  $\omega_n \pm \omega_m$ .

Proto se ukazuje, že v případě složité modulace, kterou můžeme vyjádřit pomocí součtu mnoha kosinů<sup>61)</sup>, vysílač vlastně vysílá celou oblast frekvencí – takovou, která obsahuje interval: mezi nosnou frekvencí od níž odečteme a k níž přičteme maximální frekvenci obsaženou v modulačním signálu.



Obr. 48.5 Frekvenční spektrum nosné vlny  $\omega_n$  modulované jedinou kosinovou vlnou  $\omega_m$

I když jsme zpočátku věřili, že rádiový vysílač vysílá jen nominální nosnou frekvenci, protože obsahuje velké, superstabilní krystalové oscilátory a všechno je nastaveno přesně na 800 kHz,

61) Můžeme si položit následující vedlejší otázku: Kdy můžeme vyjádřit křivku jako součet mnoha kosinů? Ve všech běžných případech kromě některých, které si vymysleli matematici. Samozřejmě křivka musí mít jen jednu hodnotu v daném bodě a nesmí být tak divoká, aby měla nekonečně mnoho skoků na nekonečně malé vzdálenosti nebo se nesmí nějak podobně šíleně chovat. Odhlédneme-li od těchto omezení, můžeme každou rozumnou křivku (i tu, kterou vytvoří zpěvačka chvěním hlasivek) vyjádřit ve tvaru součtu kosinových vln.

v okamžiku, když hlasatel *oznámí*, že vysílání je na 800 kHz, nastává modulace této frekvence a ta už není přesně rovna 800 kHz. Předpokládejme, že zesilovače jsou zkonstruovány tak, že může být přenášena velká část frekvencí, na něž je citlivé lidské ucho. Naše ucho vnímá frekvence až do 20 kHz, ale vysílače a přijímače obvykle nepracují na vyšších frekvencích než 10 kHz, takže v rádiu neslyšíme nejvyšší tóny). Hlas hlasatele tedy může obsahovat frekvence až do 10 kHz, a proto vysílač vysílá frekvence v rozsahu od 790 kHz do 810 kHz. Kdyby na frekvenci 795 kHz vysílala jiná stanice, nastal by zmatek. Chybou by bylo i to, kdybychom zkonstruovali náš přijímač natolik selektivní, že by přijímal jen 800 kHz a nepřijímal těch 10 kHz na obou stranách, pak bychom hlas hlasatele vůbec neslyšeli – informace je totiž na těch nepřijatých frekvencích. Proto je nezbytné dodržovat určitou frekvenční vzdálenost mezi stanicemi, aby se nepřekrývaly jejich postranní pásy. Dále přijímač nesmí být natolik selektivní, že by nedovoloval příjem postranních pásů spolu s nominální frekvencí. V případě zvuku tyto požadavky nezpůsobují mnoho problémů. Slyšíme v oblasti  $\pm 20$  kHz a pásmo středních vln je od 500 kHz do 1500 kHz, takže je tam místo pro mnoho rozhlasových stanic.

V případě televize je situace horší. Elektronový paprsek prochází jednotlivými místy obrazovky a musí v nich vyvolat světlé nebo tmavé body. Tato „světlá“ a „tmavá“ místa jsou vlastně „signálem“. Elektronový paprsek obvykle rastruje obraz tak, že přibližně za třicetinu sekundy proběhne 500 řádků. Předpokládejme, že hustoty bodů obrazu v horizontálním a vertikálním směru jsou téměř stejné, tj. na milimetr každého řádku připadá stejný počet bodů jako na milimetr výšky. Musíme mít možnost rozlišit střídání světlých a tmavých míst pokrývajících 500 řádků. Abychom to mohli provést s kosinovými vlnami, musíme použít takovou vlnovou délku, tj. vzdálenost od maxima po maximum, která je rovna  $1/250$ -tině délky obrazovky. Máme tedy  $250 \times 500 \times 30$  informací za sekundu, a proto je nejvyšší frekvence, kterou budeme přenášet, rovna přibližně 4 MHz. Aby jednotlivé stanice byly od sebe odděleny, potřebujeme trochu vyšší frekvenci, asi 6 MHz; její část se využije k přenosu zvukového signálu a jiných informací. Nyní už víme, proč mají televizní kanály šířku 6 MHz. Rozhodně nelze vyslat televizi na nosném kmitočtu 800 kHz, protože nemůžeme modulovat nosnou frekvenci vyšší frekvencí.

Takže televizní pásma začínají na frekvenci 54 MHz. První vysílací kanál, který však má v USA označení 2 (!), má frekvenční rozsah od 54 do 60 MHz, tedy je 6 MHz široký. Nyní můžete namítnout: „Vždyť jsme dokázali, že postranní pásy jsou na obou stranách, a proto by byla potřebná dvojnásobná frekvenční šířka.“ Jenže radioinženýři jsou lidé chytří. Kdybychom při analýze modulačního signálu pracovali nejen s kosiny, ale i se siny, a tak bychom připustili fázové rozdíly, dospěli bychom k poznatku, že mezi postranním pásem na straně vyšších frekvencí a postranním pásem na straně nižších frekvencí je určitý, invariantní vztah. To znamená, že druhý postranní pás už neobsahuje vzhledem k prvnímu nějakou novou informaci. Proto se jeden postranní pás potlačuje a přijímač je zkonstruován tak, že potlačenou informaci vytváří z jednoho postranního pásu a nosné frekvence. Vysílání pomocí jednoho postranního pásu je důmyslnou metodou zúžení frekvenční šířky potřebné k přenášení informace.

## 48.4 LOKALIZOVANÉ VLNOVÉ BALÍKY

Další otázkou, kterou se budeme zabývat, je interference vln v prostoru a v čase. Předpokládejme, že máme dvě vlny, které se šíří prostorem. Už víme, že vlnu šířící se prostorem, můžeme popsat výrazem  $e^{i(\omega t - kx)}$ . Takový výraz může například představovat posunutý ve zvukové vlně. Předpokládáme-li, že  $\omega^2 = k^2 c^2$ , kde  $c$  je rychlost šíření vlny, pak jde o řešení vlnové rovnice. V takovém případě můžeme exponenciálu zapsat ve tvaru  $e^{ik(x - ct)}$ , což je speciální případ

obecného výrazu  $f(x - ct)$ . Proto to musí být vlna, která postupuje rychlostí  $\omega/k$ , tedy  $c$  a vše je v pořádku.

Nyní složme dvě takové vlny. Necht' se jedna šíří se stejnou frekvencí a druhá s jinou frekvencí. Příklad, kdy vlny mají různé amplitudy, si ověříte sami; podstatným způsobem se neliší od případu stejných amplitud, který budeme nyní zkoumat. Naše skládání bude  $e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}$  a můžeme ho uskutečnit pomocí stejné matematiky jako při skládání signálů. Samozřejmě v obou případech bude  $c$  stejné, a proto to půjde snadno; bude to stejné jako výpočet, který jsme prováděli dříve

$$e^{i\omega_1(t-x/c)} + e^{i\omega_2(t-x/c)} = e^{i\omega_1 t'} + e^{i\omega_2 t'}, \quad (48.11)$$

až na to, že místo  $t$  máme proměnnou  $t' = t - x/c$ . Proto dostaneme stejný druh modulací s tím rozdílem, že tyto modulace se pohybují s vlnou. Jinými slovy, složme-li dvě vlny, které nejen oscilují, ale také se šíří v prostoru, bude se i výsledná vlna šířit stejnou rychlostí.

Naše úvahy bychom chtěli zobecnit i na takové vlny, v nichž neplatí tak jednoduchý vztah mezi frekvencí a vlnovým číslem  $k$ . Jako příklad vezmeme šíření vlny v nějakém materiálu, který má určitý index lomu. V kapitole 31 jsme již studovali teorii indexu lomu a zjistili jsme, že můžeme psát  $k = n\omega/c$ , kde  $n$  je index lomu. Zajímavý je případ rentgenového záření, pro něj jsme našli vztah

$$n = 1 - \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m\omega^2}. \quad (48.12)$$

Ve skutečnosti jsme v kapitole 31 odvodili složitější vztah (31.20), ale jako příklad je náš vztah stejně dobrý.

Mimochodem víme, že i tehdy, není-li mezi  $\omega$  a  $k$  přímá úměrnost, je poměr  $\omega/k$  určitě rychlost šíření dané frekvence a vlnového čísla. Tento poměr nazýváme *fázovou rychlostí*; je to rychlost, jíž se pohybuje fáze nebo uzel jednotlivé vlny

$$v_f = \frac{\omega}{k}. \quad (48.13)$$

V případě rentgenových paprsků šířících se sklem je tato fázová rychlost větší než rychlost světla ve vakuu (protože  $n$  ve vztahu 48.12 je menší než 1) a to nás trochu znepokojuje, protože si nemyslíme, že by bylo možné poslat signály větší rychlostí než je rychlost světla!

Nyní budeme uvažovat interakci dvou vln, ve kterých  $\omega$  a  $k$  jsou vázány zcela určitým vztahem. Takový vztah nám dává uvedený vzorec pro  $n$ , který říká, že  $k$  je dáno jako zcela určitá funkce  $\omega$ . Konkrétně v tomto případě závisí  $k$  na  $\omega$  takto:

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{a}{\omega c}, \quad (48.14)$$

kde  $a = Nq_e^2/2\epsilon_0 m$  představuje konstantu. Každé frekvenci tedy odpovídá zcela konkrétní vlnové číslo a my chceme takové dvě vlny složit. Udělejme to jako v rovnici (48.7):

$$e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} = e^{\frac{i}{2}[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x]} \left\{ e^{\frac{i}{2}[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} + e^{-\frac{i}{2}[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} \right\}. \quad (48.15)$$

Opět máme modulovanou vlnu, která se šíří se střední frekvencí a středním vlnovým číslem, ale její intenzita se mění v závislosti na rozdílu frekvencí a rozdílu vlnových čísel.

Nyní si všimněme případu, kdy je rozdíl mezi dvěma vlnami relativně malý. Předpokládejme, že skládáme dvě vlny, jejich frekvence jsou téměř stejné; pak  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  jsou prakticky stejné jako kterákoliv z frekvencí a podobně je to s  $(k_1 + k_2)/2$ . Proto rychlost vlny, rychlých oscilací, uzlů zůstane v podstatě  $\omega/k$ . Jenže rychlost šíření modulační vlny je poměr

$$v_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \quad (48.16)$$

Rychlost modulační vlny se někdy nazývá i *grupová rychlost*. Vezmeme-li případ, kdy je rozdíl frekvencí relativně malý a rozdíl vlnových čísel je pak také relativně malý, v limitě dostaneme výraz

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (48.17)$$

Jinými slovy, nejpomalejší modulaci odpovídají nejpomalejší rázy a ty se šíří rychlostí, která není stejná jako fázová rychlost vln – a to je záhadné!

*Grupová rychlost je derivace  $\omega$  podle  $k$  a fázová rychlost je  $\omega/k$ .*

Pokusme se vysvětlit, proč tomu tak je. Uvažujme dvě vlny, které mají opět mírně odlišné vlnové délky, tak jak je to znázorněno na obr. 48.1. Jejich fáze se liší, shodují, liší atd. Nyní tyto vlny představují ve skutečnosti takové vlny, které se šíří v prostoru a mají přitom i trochu rozdílné frekvence. Protože fázové rychlosti těchto dvou vln, tedy rychlosti jejich uzlů, nejsou přesně stejné, děje se něco nového. Předpokládejme, že putujeme s jednou z těchto vln a pozorujeme druhou vlnu; kdyby měly obě vlny stejnou rychlost, druhá by zůstávala vzhledem k nám na stejném místě. Putujeme třeba na hřebenu vlny a proti sobě vidíme hřeben druhé vlny; jsou-li rychlosti obou vln stejné, hřebeny těchto vln se překrývají. Jenže rychlosti nejsou ve skutečnosti stejné. Mezi frekvencemi je nepatrný rozdíl, a proto bude nepatrný rozdíl i mezi rychlostmi a právě v důsledku tohoto rozdílu se druhá vlna bude pohybovat vzhledem k naší vlně pomalu dopředu nebo dozadu. Co se stane v průběhu času s uzlem? Pohneme-li jednu vlnu trochu dopředu, uzel postoupí dopředu (nebo dozadu) o značnou vzdálenost. Součet těchto dvou vln má tedy obálku a jak vlna postupuje, obálka po ní jezdí různou rychlostí. *Grupová rychlost* je taková rychlost, jíž se vysílají modulované signály.

Kdybychom vytvořili signál, tj. určitý druh změny ve vlně, který lze rozpoznat např. tím, že je slyšitelný, tedy máme-li určitý druh modulační vlny, pak se tato modulační vlna – je-li relativně pomalá – bude šířit grupovou rychlostí. (Je-li modulační rychlá, je velmi těžké ji analyzovat.)

Nyní můžeme ukázat (konečně!), že rychlost šíření rentgenového záření v grafitovém bloku není větší než rychlost světla, i když fázová rychlost je větší než rychlost světla. Proto musíme najít  $d\omega/dk$ , které vypočítáme derivováním (48.14):  $dk/d\omega = 1/c + a/\omega^2 c$ . Grupová rychlost je převrácená hodnota tohoto výrazu, konkrétně

$$v_g = \frac{c}{1 + a/\omega^2} \quad (48.18)$$



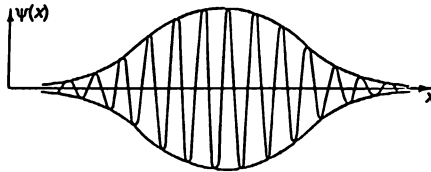
a tento výraz je menší než  $c$ . Takže i když fáze mohou postupovat větší rychlostí než je rychlost světla, modulační signály postupují pomaleji, a v tom spočívá rozluštění zdánlivého paradoxu. Ovšem máme-li jednoduchý případ  $\omega = kc$ , pak i  $d\omega/dk = c$ . Mají-li všechny fáze stejnou rychlost, bude stejná i grupová rychlost.

## 48.5 AMPLITUDY PRAVDĚPODOBNOСТИ PRO ČÁSTICE

Uvažujme ještě jeden mimořádně zajímavý příklad fázové rychlosti, který patří do oblasti kvantové mechaniky. Víme, že amplituda pravděpodobnosti nalezení částice v daném místě se může za určitých okolností měnit v prostoru a čase následujícím způsobem, uvažujeme-li jednorozměrný problém:

$$\psi = A e^{i(\omega t - kx)}, \quad (48.19)$$

přičemž  $\omega$  je frekvence související s klasickou energií  $E = \hbar\omega$  a  $k$  je vlnové číslo související s hybností vztahem  $p = \hbar k$ . Kdyby vlnové číslo bylo rovno přesně  $k$ , tedy šlo by o dokonalou vlnu, která všude postupuje se stejnou amplitudou, částice by měla zcela určitou hybnost. Rovnice (48.19) vyjadřuje amplitudu a kdybychom vzali druhou mocninu absolutní hodnoty, dostali bychom relativní pravděpodobnost výskytu částice jako funkce polohy a času. Tato veličina je *konstantní*, to znamená, že pravděpodobnost nalezení částice je všude stejná. Místo toho předpokládejme, že máme takovou situaci, kdy o částici víme, že se bude vyskytovat s větší pravděpodobností na jednom místě než na nějakém jiném místě. Takovou situaci můžeme popsat vlnou, která má maximum a zaniká, když se vzdalujeme od tohoto maxima na jednu nebo na druhou stranu (obr. 48.6). (Není to sice totéž jako vlna typu (48.1), která má řadu maxim, ale těchto maxim se až na jedno můžeme zbavit tak, že složíme několik vln s téměř stejnými  $\omega$  a  $k$ .)



Obr. 48.6 Lokalizovaný vlnový balík

Protože druhá mocnina výrazu (48.19) představuje pravděpodobnost nalezení částice v některém místě, bude v daném okamžiku částice s největší pravděpodobností v blízkosti středu balíku, kde je maximální amplituda vlny. Kdybychom chvíli počkali, vlna by se posunula a za určitou dobu bychom balík našli někde jinde. Když jsme věděli, kde částice původně byla, mohli bychom podle klasické mechaniky *očekávat*, že někde bude i později, neboť má *rychlost* a hybnost. Přitom kvantová teorie přejde na správnou klasickou teorii dávající do souvislosti hybnost, energii a rychlost jen tehdy, když je grupová rychlost – rychlost modulace – rovna rychlosti, kterou bychom získali klasicky pro částici se stejnou hybností.

Nyní musíme ukázat, zda to tak je nebo ne. Podle klasické teorie souvisí energie s rychlostí vztahem

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.20)$$

Podobně platí pro hybnost

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.21)$$

To je klasická teorie a jako důsledek této teorie vyloučením  $v$  dostaneme

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Tak jsme dospěli k velkolepému čtyřrozměrnému výsledku, o němž jsme již mnohokrát mluvili. Lze ho zapsat ve tvaru  $p_\mu p_\mu = m^2 c^2$  a vyjadřuje vztah mezi energií a hybností v klasické teorii. Přejde-li  $E$  a  $p$  na  $\omega$  a  $k$  substitucí  $E = \hbar \omega$ ,  $p = \hbar k$ , znamená to, že v kvantové mechanice musí platit

$$\frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} - \hbar^2 k^2 = m^2 c^2. \quad (48.22)$$

Tak jsme dostali vztah mezi frekvencí a vlnovým číslem kvantověmechanické amplitudy popisující částici s hmotností  $m$ . Z této rovnice vyplývá, že

$$\omega = c \sqrt{k^2 + m^2 c^2 / \hbar^2}.$$

Fázová rychlost  $\omega/k$  je i v tomto případě větší než rychlost světla!

Nyní věnujme pozornost grupové rychlosti. Grupová rychlost by měla být  $d\omega/dk$ , tedy rychlost s jakou postupuje modulace. Musíme derivovat odmocninu, což není obtížné. Tak dostaneme

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2 + m^2 c^2 / \hbar^2}}.$$

Zde vystupující odmocnina je rovna  $c^{-1} \omega$ , a proto  $d\omega/dk = c^2 k / \omega$ . Dále víme, že  $k/\omega = p/E$ , takže

$$v_g = \frac{c^2 p}{E}.$$

Ze vztahů (48.20) a (48.21)  $c^2 p/E = v$ , kde  $v$  je rychlost částice v klasické mechanice. Je vidět, že zatímco základní kvantověmechanické vztahy  $E = \hbar \omega$ ,  $p = \hbar k$  určující  $\omega$  a  $k$  pomocí klasických veličin  $E$  a  $p$  dávají pouze vztah  $\omega^2 - k^2 c^2 = m^2 c^4 / \hbar^2$ , nyní můžeme pochopit i vztahy (48.20) a (48.21) dávající do souvislosti  $E$  a  $p$  s rychlostí částice. Grupová rychlost musí být samozřejmě rovna rychlosti částice, má-li mít taková interpretace smysl. Předpokládáme-li, že částice je v určitém okamžiku na určitém místě a o deset minut později na jiném místě, pak podle kvantové mechaniky vzdálenost, kterou prošlo maximum balíku, dělená časovým intervalem, musí být rovna klasické rychlosti částice.

## 18.6 VLNY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

Naši diskuzi o vlnách uzavřeme několika obecnými poznámkami o vlnové rovnici. Tyto poznámky jsou mfněny tak, aby poskytlý pohled do budoucna – neumožní nám nyní všechno pochopit, ale naznačí nám, jak budou věci vypadat, budeme-li vlny podrobněji zkoumat. Především uvažme, že vlnová rovnice pro zvuk v jednom rozměru měla tvar

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2},$$

kde  $c$  je rychlost podle toho, o jaké vlny jde – v případě zvuku je to rychlost zvuku, v případě světla je to rychlost světla. Ukázali jsme, že v případě zvukové vlny se určitou rychlostí šíří samotné posunutí. Jenže určitou rychlostí se šíří i dodatečný tlak a stejně i dodatečná hustota. Proto můžeme očekávat, že stejné rovnici bude vyhovovat i tlak, a to je skutečně pravda. Důkaz tohoto tvrzení ať provede čtenář sám. Připomeňme jen, že  $\rho_e$  je úměrné rychlosti změny  $\chi$  v závislosti na  $x$ . Proto derivujeme-li vlnovou rovnici podle  $x$ , okamžitě zjistíme, že  $\partial \chi / \partial x$  vyhovuje stejné rovnici. Tedy  $\rho_e$  vyhovuje stejné rovnici. Jenže  $p_e$  je úměrné  $\rho_e$ , a proto  $p_e$  také vyhovuje rovnici. Proto i tlak a posunutí vyhovují stejné vlnové rovnici.

Vlnová rovnice pro zvuk se obvykle zapisuje pomocí tlaku, a ne pomocí posunutí, neboť tlak je skalární veličina a nemá směr, zatímco posunutí je vektor a má směr a jeho analýza je složitější.

Další věc, s níž se setkáme, je vlnová rovnice v trojrozměrném prostoru. Víme, že jednorozměrná zvuková vlna má tvar  $e^{i(\omega t - kx)}$ , v němž  $\omega = kc$  a víme i to, že v trojrozměrném prostoru popisuje vlnu výraz  $e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ , přičemž nyní  $\omega^2 = k^2 c^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) c^2$ . Chceme uhádnout správný tvar vlnové rovnice v trojrozměrném případě. V případě zvuku můžeme dedukci udělat tak, že v trojrozměrném prostoru použijeme stejné dynamické argumenty, jež jsme používali v jednorozměrném prostoru. My však budeme postupovat jinak; místo toho napíšeme prostě výsledek: rovnice pro tlak (nebo pro posunutí apod.) má tvar

$$\frac{\partial^2 p_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_e}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_e}{\partial t^2}. \quad (48.23)$$

Dosažením  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  se můžeme přesvědčit o tom, že tato rovnice je skutečně správná. Skutečně, když každé derivování podle  $x$  znamená násobení  $-ik_x$ . Dvojnásobné derivování je násobení  $-k_x^2$ , takže první člen pro takovou vlnu bude  $-k_x^2 p_e$ . Podobně druhý člen bude  $-k_y^2 p_e$  a třetí  $-k_z^2 p_e$ . Na pravé straně dostaneme  $-(\omega^2/c^2) p_e$ . Zbavíme-li se vykrácením  $p_e$  a změníme znaménko, dostaneme mezi  $k$  a  $\omega$  právě takový vztah, jaký potřebujeme.

Vrátíme-li se trochu nazpět, nemůžeme odolat, abychom nenapsali rovnici, která odpovídá disperznímu vztahu (48.22) pro kvantověmechanické vlny. Představuje-li  $\varphi$  amplitudu nalezení částice v místě  $x, y, z$  v okamžiku  $t$ , má slavná kvantověmechanická rovnice tvar

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi. \quad (48.24)$$

Nejprve si všimněte, že relativistický charakter tohoto výrazu je zabezpečen takovou kombinací  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a  $t$ , jakou právě teorie relativity vyžaduje. Dále si všimněte, že jde o vlnovou rovnici a dosadíme-li do ní řešení ve tvaru rovinné vlny, dostaneme  $-k^2 + \omega^2/c^2 = m^2 c^2/\hbar^2$ , což je vztah platný v kvantové mechanice. Ještě jedna důležitá věc je obsažena v této vlnové rovnici. Jejím řešením bude i libovolná superpozice vln. Tato rovnice tedy obsahuje celou kvantovou mechaniku a relativitu, o nichž byla do této doby řeč – aspoň pokud jde o jedinou částici v prázdném prostoru bez potenciálů, na kterou nepůsobí žádné síly!

## 48.7 NORMÁLNÍ MODY

Nyní obrátíme naši pozornost na jiný příklad rázů, který je dost zvláštní a trochu odlišný od předcházejících příkladů. Představme si dvě stejná kyvadla, jež jsou navzájem spojena slabou pružinou. Kyvadla jsou pokud možno stejně dlouhá. Vychýlíme-li jedno kyvadlo a pustíme ho, bude samo kývat a natahovat a stlačovat spojovací pružinu. Dostaneme tedy zařízení vytvářející sílu s frekvencí rovnou vlastní frekvenci druhého kyvadla. Jako důsledek teorie rezonance, kterou jsme již studovali, dochází k situaci, kdy síla aplikovaná s vhodnou frekvencí způsobí pohyb daného objektu. Proto jedno kyvadlo svým kývavým pohybem přinutí pohybovat se i druhé kyvadlo. Za těchto okolností však nastává nový úkaz související s tím, že energie systému je konečná. Odevzdává-li totiž jedno kyvadlo svou energii druhému kyvadlu a uvádí ho do pohybu, ztrácí postupně vlastní energii, až jednou ztratí všechnu svou energii a zastaví se! Pak má všechnu energii druhé kyvadlo a první nemá žádnou, a tak všechno začne opačným směrem a energie se vrací k prvnímu kyvadlu. Je to velmi zajímavý a zábavný jev. Už jsme uváděli, že takový jev popisuje teorie rázů a my musíme nyní ukázat, jak můžeme analyzovat tento jev z hlediska takové teorie.

Všimněte si, že pohyb každé ze dvou kuliček jsou vlastně kmity s periodicky se měnící amplitudou. Proto můžeme pohyb jedné z kuliček zřejmě zkoumat i jinak – tak, že jde o součet dvou současně kmitajících oscilátorů, jež mají trochu odlišné frekvence. Proto by mělo být možné najít dva jiné pohyby systému a tvrdit, že to co pozorujeme, je superpozice těchto dvou pohybů, neboť jde samozřejmě o lineární soustavu. Vskutku můžeme snadno najít dva způsoby uvedení našeho systému do pohybu, z nichž každý je dokonalý periodický pohyb s jednou frekvencí. Pohyb, s nímž jsme předtím začali, nebyl přísně periodický, protože nepřetržoval; jedna kulička odevzdávala energii druhé, a tak měnila svou amplitudu. Existují však takové způsoby uvedení do pohybu, při nichž se nic takového nemění. Jen, co se dozvíte, o jaké způsoby jde, ihned pochopíte, proč tomu tak je. Například, kdybychom spustili obě kyvadla současně, pak by v důsledku jejich stejných délek a toho, že tehdy pružina vlastně nic nedělá, kyvadla stále stejně kývala za předpokladu, že není tření a vše je dokonalé. Existuje ještě jiný druh pohybu, při němž také máme určitou frekvenci: je to pohyb, při němž se kyvadla pohybují proti sobě, když jsme je vychýlili v opačných směrech na přesně stejnou vzdálenost. Tehdy také dostaneme absolutně periodický pohyb. V takovém případě pružina vlastně dělá jen to, že trochu zvětšuje obnovující sílu pocházející od gravitace, a proto systém kmitá s trochu větší frekvencí než v prvním případě. Proč větší? Protože tah pružiny napomáhá gravitaci a dělá systém trochu „tužší“, takže frekvence tohoto pohybu je nepatrně větší než frekvence prvního.

Náš systém má dva způsoby, kterými může kmitat při nezměněné amplitudě: může kmitat tak, že obě kyvadla se pohybují stejným směrem a kmitají stále se stejnou frekvencí nebo se kyvadla pohybují opačným směrem s trochu větší frekvencí.

Protože systém je lineární, můžeme si skutečný pohyb představit jako superpozici takových dvou pohybů. (Pamatujme, že předmětem této kapitoly jsou efekty skládání dvou pohybů s různými frekvencemi.) Uvažujme proto, co by se stalo, kdybychom zkombinovali tato dvě řešení. Začnou-li tyto dva pohyby v okamžiku  $t = 0$  se stejnou amplitudou a stejnou fází, superpozice těchto dvou pohybů znamená, že jedna kulička posunutá jedním pohybem na jednu stranu a druhým pohybem na opačnou stranu zůstane na místě, zatímco druhá kulička posunutá stejným směrem v obou pohybech bude mít velkou amplitudu. Postupem času se však fáze jednoho takového základního pohybu pomalu posouvá vzhledem k fázi druhého pohybu, neboť tyto *základní pohyby* probíhají nezávisle. To znamená, že po dostatečně dlouhé době, když se v prvním pohybu uskutečnilo např. „900,5“ kmitů a v druhém pouze „900“ kmitů, relativní fáze bude opačná než byla na začátku. Pohyb, který měl původně velkou amplitudu, se stane nulovým, zatímco původně nehybná kulička se bude pohybovat plnou silou!

Vidíme, že takový složitý pohyb můžeme analyzovat jako rezonanci, při níž přechází energie z jednoho objektu na druhý nebo jako superpozici dvou pohybů s konstantními amplitudami, ale s různými frekvencemi.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 48.1 ■ Fázová rychlost vlny s vlnovou délkou  $\lambda$  šířící se na vodní hladině, zanedbáme-li konečnou hloubku vodního bazénu (tzv. vlna na hluboké vodě) a povrchové napětí, je rovna  $v_f = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ . Ukažte, že grupová rychlost vlny je rovna polovině fázové rychlosti. Čemu jsou rovny fázová a grupová rychlost vlny o vlnové délce 1 000 m?
- 48.2 ■ Vezměme-li v předchozí úloze v úvahu vliv povrchového napětí, můžeme ukázat, že fázová rychlost vlny na hluboké vodě s hustotou  $\rho$  a povrchovým napětím  $\sigma$  bude rovna  $v_f = \sqrt{2\pi\sigma/\lambda\rho + g\lambda/2\pi}$ . Najděte grupovou rychlost takové vlny.
- 48.3 ■ Najděte fázovou rychlost zčeření o vlnové délce 1,0 cm na povrchu vody (povrchové napětí  $\sigma_v = 0,070$  N/m) a etylalkoholu (povrchové napětí  $\sigma_e = 0,026$  N/m).
- 48.4 ■ Najděte vlnovou délku a frekvenci zčeření na povrchu vody, jež se šíří *minimální* rychlostí.
- 48.5 ■ Dlouhý motorový nákladní vlak se blíží ke kopci rychlostí 5,0 m/s po přímé trati. Před tunelem proraženým ve svislé skalní stěně strojvůdce spustí táhlý zvuk sirény o základní frekvenci 340 Hz. Tón sirény a jeho ozvěnu od stěny slyší jednak strojvůdce, jednak člověk stojící na zemi v blízkosti posledního vagónu. Jaký zvuk uslyší strojvůdce a jaký člověk na zemi?

# M<sup>49</sup>ody

## 49.1 ODRAZ VLN

## 49.2 VLNY V OHRANIČENÉ OBLASTI, VLASTNÍ FREKVENCE

## 49.3 DVOJROZMĚRNÉ MODY

## 49.4 VÁZANÁ KYVADLA

## 49.5 LINEÁRNÍ SOUSTAVY

### 49.1 ODRAZ VLN

V této kapitole se budeme zabývat některými pozoruhodnými jevy, které jsou důsledkem toho, že vlny jsou ohraničené určitou konečnou oblastí. Nejprve se zmíníme o několika zajímavých skutečnostech souvisejících například s chvěním struny a pak zobecněním těchto faktů dospějeme k principu, který je pravděpodobně nejdalekosáhlejším principem matematické fyziky.

Naším prvním příkladem ohraničených vln bude vlna ohraničená na jedné straně. Jako příklad uvažujme jednorozměrnou vlnu na struně. Stejně dobře by bylo možné uvažovat jednorozměrné zvuk dopadající na stěnu nebo jiné situace podobného charakteru, ale případ struny pro naše účely postačí. Předpokládejme, že struna je na jednom konci upevněna, například tak, že je uchycena na „nekonečně pevné“ stěně. Tuto skutečnost můžeme matematicky vystihnout tak, že posunutí struny  $y$  v bodě  $x = 0$  je nulové, protože konec struny se nehýbe. Kdyby nebyla stěna, bylo by obecné řešení pohybu součtem dvou funkcí,  $F(x - ct)$  a  $G(x + ct)$ , z nichž první představuje vlnu putující podél struny jedním směrem a druhé vlnu postupující opačným směrem k opačnému konci struny. Obecné řešení pro kteroukoliv strunu je

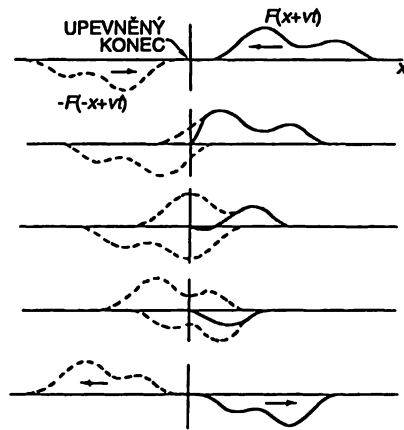
$$y = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (49.1)$$

Mý však musíme vyhovět podmínce, že struna se na jednom konci nehýbe. Položíme-li v rovnici (49.1)  $x = 0$  a určíme  $y$  pro libovolnou hodnotu  $t$ , dostaneme  $y = F(-ct) + G(+ct)$ . Má-li se toto rovnat v každém okamžiku nule, musí být funkce  $G(ct)$  rovna  $-F(-ct)$ . Jinak řečeno, funkce  $G$  nějaké veličiny musí být rovna funkci  $-F$  téže veličiny se znaménkem minus. Vložíme-li tento poznatek do rovnice (49.1), zjistíme, že řešení naší úlohy má tvar

$$y = F(x - ct) - F(-x - ct) \quad (49.2)$$

Snadno se přesvědčíme o tom, že pro  $x = 0$  dostaneme  $y = 0$ .

Obr. 49.1 znázorňuje vlnu postupující v záporném směru osy  $x$  v blízkosti  $x = 0$  a hypotetickou vlnu postupující v opačném směru s opačným znaménkem a na druhé straně od počátku. Říkáme, že jde o hypotetickou vlnu, protože na té straně stěny není struna, která by kmitala. Za výsledný pohyb struny je třeba považovat součet těchto dvou vln v oblasti kladných hodnot  $x$ . Dosáhnou-li počátku  $x = 0$ , vždy se navzájem ruší, takže nakonec bude v oblasti kladných hodnot  $x$  existovat jen ta druhá (odražená) vlna a bude samozřejmě postupovat v opačném směru. Tyto výsledky jsou ekvivalentní tvrzení: Dosáhne-li vlna upevněného konce struny, odrazí se se změněným znaménkem. Takový odraz můžeme pochopit, představíme-li si, že to, co přichází na konec struny, vychází převrácené za stěnou. Krátce řečeno: Představíme-li si nekonečnou strunu a předpokládáme, že tam, kde máme vlnu postupující jedním směrem, máme i vlnu postupující opačným směrem s uvedenou symetrií. Potom posunutí v  $x = 0$  je vždy nulové a nic se nestane, jestliže strunu v tomto bodě upevníme.



Obr. 49.1 Odraz vlny jako superpozice dvou postupných vln

Další věc, o níž budeme mluvit, je odraz periodické vlny. Předpokládejme, že vlna charakterizovaná funkcí  $F(x - ct)$  je sinusoidální vlna a ta se odrazila; odražená vlna je potom  $-F(-x - ct)$  je také sinusoidální vlna se stejnou frekvencí, ale postupující opačným směrem. Takovou situaci můžeme nejjednodušeji popsat pomocí komplexních funkcí:  $F(x - ct) = e^{i\omega(t - x/c)}$  a  $F(-x - ct) = e^{i\omega(t + x/c)}$ . Kdybychom tyto výrazy dosadili do vztahu (49.2) a položili  $x = 0$ , platilo by  $y = 0$  pro všechny hodnoty  $t$ , takže by to splnilo nutnou podmínku. Kdybychom využili vlastnosti exponenciál, mohli bychom tento výsledek přepsat do jednoduššího tvaru

$$y = e^{i\omega t} (e^{-i\omega x/c} - e^{i\omega x/c}) = -2ie^{i\omega t} \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right). \quad (49.3)$$

Je zde něco zajímavého a nového, a spočívá to v tom, že pohled na libovolný bod  $x$  struny nás přesvědčí o tom, že struna kmitá s frekvencí  $\omega$ . Bez ohledu na to, kde se bod nachází, bude frekvence stejná! Existují však místa, v nichž  $\sin(\omega x/c) = 0$ , a v těchto místech nedochází k posunutí. Uděláme-li dále v kterémkoliv okamžiku fotografickou momentku kmitající struny, bude



obrázkem sinusoidální vlna. Posunutí této sinusoidální vlny bude záviset na čase  $t$ . Z vyjádření (49.3) vidíme, že délka jednoho cyklu sinusové vlny je rovna vlnové délce skládajících se vln

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (49.4)$$

Nehybné body vyhovují podmínce  $\sin(\omega x/c) = 0$ , to znamená, že  $(\omega x/c) = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$ . Takové body se nazývají *uzly*. Mezi libovolnými dvěma za sebou jdoucími uzly se každý bod pohybuje nahoru a dolů sinusoidálně, ale pohybový obrazec zůstává v prostoru nehybný. Taková je základní charakteristika toho, co nazýváme *mod*. Je-li obrazec pohybu takový, že každý bod objektu se pohybuje sinusoidálně a všechny body se pohybují se stejnou frekvencí (i když některé se pohybují víc než druhé), máme co činit s modem.

## 49.2 VLNY V OHRANIČENÉ OBLASTI, VLASTNÍ FREKVENCE

Bude zajímavé uvážit, co se stane, upevníme-li strunu na obou koncích, např. v bodech  $x = 0$ ,  $x = L$ . Naše úvahy můžeme začít představou o odrazu vln, a to tak, že si představíme, jak se jakási vyvýšenina nebo hrb šíří v jednom směru. S přibývajícím časem se hrb dostane blíže k jednomu konci a jak čas roste, hrb se zmenšuje, protože se složí s obráceným zrcadlovým hrbem přicházejícím z opačné strany. Nakonec původní hrb vymizí a zrcadlový hrb bude postupovat v opačném směru, aby na opačném konci zopakoval předcházející proces. Taková úloha má jednoduché řešení, ale bylo by zajímavé si položit otázku, zda můžeme v takovém případě dostat sinusoidální pohyb (popsané řešení je *periodické*, ale není *sinusoidálně periodické*). Zkusme na struně vybudit sinusoidálně periodickou vlnu. Je-li struna na jednom konci upevněna, musí řešení vypadat tak jako v předcházejícím případě, tj. jako (49.3). Je-li struna upevněna i na druhém konci, musí mít i tam řešení stejný tvar. Jedinou možností pro periodický sinusoidální pohyb je, že vlna se pěkně rozmístí podél délky struny. Nestane-li se to, nepůjde o vlastní frekvenci, při níž by struna setrvala v kmitání. Prostě, vznikne-li na struně vlna sinusoidálního tvaru, která vyhovuje délce struny, udrží se tento dokonale sinusoidální tvar vlny a struna bude harmonicky kmitat s určitou frekvencí.

Matematicky můžeme vyjádřit tvar vlny funkcí  $\sin kx$ , kde  $k$  je rovno  $(\omega/c)$  z rovnic (49.3) a (49.4). Tato funkce je rovna nule v bodě  $x = 0$ , musí však být nulová i na druhém konci. Podstatné je to, že  $k$  už nemůže být libovolné jako v případě struny upevněné jen na jednom konci. Je-li struna upevněna na obou koncích, jedinou možností je, aby  $\sin(kL) = 0$ , neboť jen taková podmínka připouští pevné konce struny. Aby byl sinus nulový, musí být úhel roven  $0, \pi, 2\pi$  nebo jinému celočíselnému násobku  $\pi$ . Rovnice

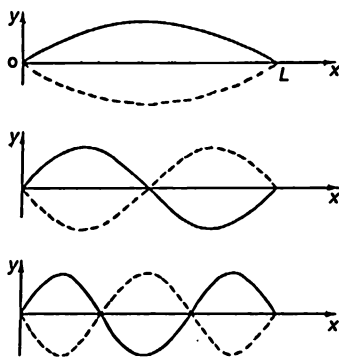
$$kL = n\pi \quad (49.5)$$

nám proto dá všechny možné hodnoty  $k$  v závislosti na celých číslech  $n$ . Každému  $k$  odpovídá určitá frekvence  $\omega$ , pro niž podle vztahu (49.3) platí

$$\omega = kc = \frac{n\pi c}{L}. \quad (49.6)$$

Tak jsme zjistili, že struna má tu vlastnost, že může konat sinusoidální pohyb, *ale jen při určité*

tých frekvencích. To je nejdůležitější rys ohraničených vln. Bez ohledu na složitost soustavy se vždy ukáže, že existují určité druhy pohybů s dokonale sinusoidální časovou závislostí, ale s frekvencemi závislými na vlastnostech dané soustavy a povaze jejích hranic. V případě struny máme mnoho různých možných frekvencí, každá podle definice odpovídá nějakému modu, neboť mod představuje pohybový obrazec, který se sinusoidálně opakuje. Na obr. 49.2 jsou znázorněny první tři mody struny. Vlnová délka  $\lambda$  prvního modu je  $2L$ . Zjistili bychom to, kdybychom prodloužili vlnu do  $x = 2L$ , a tak bychom dostali úplný cyklus sinusoidální vlny. Úhlová frekvence  $\omega$  je obecně rovna podílu  $2\pi c$  a vlnové délky, což je v našem případě  $\pi c/L$ , protože  $\lambda$  je rovna  $2L$  a tento výsledek je ve shodě se vztahem (49.6) pro  $n = 1$ . Označme frekvenci prvního modu symbolem  $\omega_1$ . Další mod vykazuje dvě smyčky s jedním uzlem uprostřed. Vlnová délka tohoto modu je prostě  $L$ . Odpovídající hodnota  $k$  a i vlastní frekvence jsou nyní dvakrát větší, tedy  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Frekvence třetího modu je rovna  $3\omega_1$  atd. Všechny různé frekvence struny jsou tedy celočíselné násobky nejnižší frekvence  $\omega_1$ .



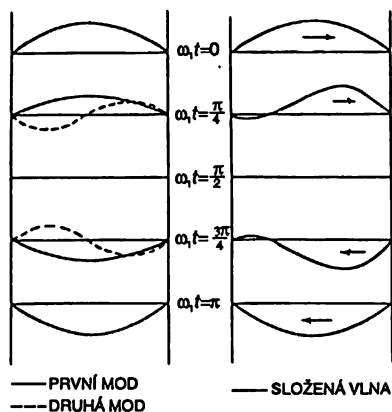
Obr. 49.2 První tři mody vibrující struny

Vraťme se opět k obecnému pohybu struny. Ukazuje se, že libovolný možný pohyb lze zkoumat jako současné působení několika modů. Pro úplně obecný pohyb musí být současně vybudeno nekonečně mnoho modů. Abychom o tom získali určitou představu, nakreslíme si, co se děje, jsou-li současně vybudeny dva mody. Předpokládejme, že první mod probíhá tak, jak to znázorňuje posloupnost obrázků 49.3, která zachycuje výchylku struny ve stejně vzdálených časových intervalech v průběhu polovičního cyklu nejnižší frekvence.

Nyní předpokládejme, že je současně vybuděn i druhý mod. Na obr. 49.3 je znázorněna i posloupnost výchylek struny u druhého modu, který je na počátku fázově posunut o  $90^\circ$  proti prvnímu modu. To znamená, že zpočátku nebyla výchylka, ale dvě poloviny struny měly opačně orientované rychlosti. Nyní si připomeňme obecný princip platný pro lineární systémy: máme-li libovolná dvě řešení, je řešením i jejich součet. Proto třetím možným pohybem struny bude výchylka, kterou získáme sčítáním dvou řešení znázorněných na obr. 49.3. Výsledek je také znázorněn na obrázku a začíná připomínat vyvýšeninu pohybující se dopředu a dozadu mezi konci struny. Se dvěma mody si o tom nemůžeme vytvořit dostatečně dobrou představu; potřebovali bychom modů víc. Tento výsledek je vlastně speciálním případem vynikajícího principu lineárních soustav:

*Libovolný pohyb můžeme zkoumat za předpokladu, že jde o součet pohybů všech různých modů s vhodnými amplitudami a fázemi.*

## MODY



Obr. 49.3 Dva mody vytvoří při složení postupnou vlnu

Význam tohoto principu spočívá v tom, že každý mod je velmi jednoduchý – není to nic jiného než sinusoidální pohyb v čase. Je sice pravda, že ani obecný pohyb struny není příliš komplikovaný, ale existují jiné systémy, např. chvění křídla letadla, při nichž je pohyb mnohem složitější. Ale i v případě křídla letadla zjišťujeme existenci určitého stáčení, které má jednu frekvenci a jiných stáčení s jinými frekvencemi. Umíme-li takové mody najít, můžeme výsledný pohyb zkoumat jako superpozici harmonických kmitů (s výjimkou těch případů, kdy chvění je tak velké, že systém už nemůžeme považovat za lineární).

### 49.3 DVOJROZMĚRNÉ MODY

Další příklad, který si zaslouží pozornost, je případ modů ve dvou rozměrech. Dokud jsme mluvili jen o jednorozměrných situacích – o napjaté struně nebo o zvukových vlnách v trubici. Nakonec budeme muset uvažovat trojrozměrný případ, ale jako mezikrok uvažujme jednodušší případ, kdy máme dva rozměry. Pro konkrétnost uvažujme pravoúhlý buben s gumovou blánou, který je sestaven tak, že na pravoúhlém okraji bubnu se blána nevychyluje a rozměry blány jsou  $a, b$  (obr. 49.4). Ptáme se, jaký je charakter možného pohybu. Můžeme začít stejným postupem jako v případě struny. Kdyby nebylo žádné upevnění, mohli bychom očekávat, že půjde o šíření vln s určitým druhem vlnového pohybu. Například  $(e^{i\omega t}) (e^{-ik_x x + ik_y y})$  by představovalo sinusoidální vlnu postupující určitým směrem, který závisí na relativních hodnotách  $k_x$  a  $k_y$ . Zajímá nás, jak se může stát osa  $x$ , tedy přímka  $y = 0$ , uzlem. Využijme stejné myšlenky jako v případě jednorozměrné struny a představme si jinou vlnu popisovanou komplexní funkcí  $(e^{-i\omega t}) (e^{-ik_x x - ik_y y})$ . Superpozice těchto vln dá nulovou výchylku při  $y = 0$  bez ohledu na to, jaké jsou hodnoty  $x$  a  $t$ . (I když tyto funkce jsou definovány pro záporná  $y$ , kde není buben, který by kmital, nemusíme si toho všimnout, neboť výchylka je opravdu nulová při  $y = 0$ .) V tomto případě můžeme na druhou funkci hledět jako na odraženou vlnu.

Chceme však, aby uzlová přímka byla nejen pro  $y = 0$ , ale i pro  $y = b$ . Jak toho docílíme? Řešení takové úlohy souvisí s něčím, co jsme už dělali, když jsme zkoumali odraz světla od krystalů. Ty vlny, které se kompenzují pro  $y = 0$ , se kompenzují i pro  $y = b$  jen tehdy, když  $2b \sin \vartheta$  je celočíselným násobkem  $\lambda$ , přičemž  $\vartheta$  je úhel znázorněný na obr. 49.4

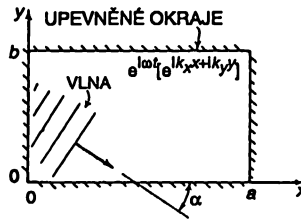
## DVOJROZMĚRNÉ MODY

$$m\lambda = 2b \sin \vartheta, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (49.7)$$

Stejným způsobem můžeme udělat uzlovou přímku z osy  $y$ , přidáme-li další dvě funkce  $-(e^{i\omega t}) (e^{ik_x x + ik_y y})$  a  $+(e^{i\omega t}) (e^{ik_x x - ik_y y})$ , z nichž každá představuje odraz jedné z druhých dvou vln od přímky  $x = 0$ . Podmínka pro to, aby přímka  $x = a$  byla uzlovou přímkou je podobná té, kterou jsme už měli pro  $y = b$ , takže  $2a \cos \vartheta$  musí být celočíselným násobkem  $\lambda$ :

$$n\lambda = 2a \cos \vartheta. \quad (49.8)$$

Konečným výsledkem pak je, že vlny odrážející se v krabici mají tvar stojaté vlny, tedy tvoří určité mody.



Obr. 49.4 Kmitající pravouhelná deska

Chceme-li tedy dostat mody, musíme splnit uvedené dvě podmínky. Najdeme nejprve vlnovou délku. Eliminujeme-li z rovnic (49.7) a (49.8) úhel  $\vartheta$ , dostaneme vlnovou délku vyjádřenou pomocí  $a, b, n, m$ . Nejjednodušeji se to udělá tak, že se obě strany příslušných rovnic dělí  $2b$ , resp.  $2a$ , umocní se a rovnice se sečtou. Tak dostaneme  $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1 = (n\lambda/2a)^2 + (m\lambda/2b)^2$  a odtud dostaneme pro  $\lambda$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4b^2}. \quad (49.9)$$

Tak máme vlnovou délku určenou pomocí dvou celých čísel  $a$  a  $n$  ihned dostaneme frekvenci  $\omega$ , neboť víme, že frekvence je rovna  $2\pi c$  dělenému vlnovou délkou.

Tento výsledek je tak zajímavý a důležitý, že bychom ho měli odvodit čistě matematickou analýzou, a ne použitím představ o odrazech. Představme si kmity jako superpozici čtyř vln zvolených tak, že čtyři přímky  $x = 0, x = a, y = 0, y = b$  jsou uzlové. Dále budeme požadovat, aby všechny vlny měly stejnou frekvenci, takže výsledný pohyb bude představovat nějaký mod. Z našeho předcházejícího postupu při odrazu světla už víme, že  $(e^{i\omega t}) (e^{-ik_x x + ik_y y})$  představuje vlnu postupující ve směru označeném na obr. 49.4. Rovnice (49.6), tj.  $k = \omega/c$ , stále platí, předpokládáme-li

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (49.10)$$

Z obrázku je jasné, že  $k_x = k \cos \vartheta$ ,  $k_y = k \sin \vartheta$ .

Tak naše rovnice pro výchylku  $\varphi$  pravouhelníkové blány bubnu nabude výsledného tvaru

$$\varphi = [e^{i\omega t}] \left[ e^{(-ik_x x + ik_y y)} - e^{(+ik_x x + ik_y y)} - e^{(-ik_x x - ik_y y)} + e^{(+ik_x x - ik_y y)} \right]. \quad (49.11a)$$

MODY

I když to působí chaotickým dojmem, součet takových výrazů není příliš komplikovaný. Exponenciály můžeme kombinovat tak, aby z nich vznikly sinusové funkce a výraz pro výchylku pak můžeme zapsat takto

$$\varphi = (-4 \sin k_x x \sin k_y y) (e^{i\omega t}). \quad (49.11b)$$


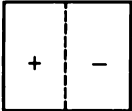
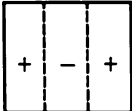
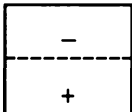
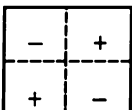
Jinými slovy, máme sinusoidální kmity a jejich tvar je také sinusoidální, jak ve směru osy  $x$ , tak ve směru osy  $y$ . Naše okrajové podmínky jsou samozřejmě splněny pro  $x=0$  i  $y=0$ . Chceme však, aby  $\varphi$  bylo nulové pro  $x=a$  a také  $y=b$ . Proto musíme položit dvě další podmínky:  $k_x a$  musí být celočíselným násobkem  $\pi$  a  $k_y b$  musí být také nějakým celočíselným násobkem  $\pi$ . Platí-li  $k_x = k \sin \vartheta$ ,  $k_y = k \sin \vartheta$ , ihned dostáváme rovnice (49.7) a (49.8) a z nich konečný výsledek (49.9).

Jako příklad uvažujme obdélník, jehož délka je rovna dvojnásobku šířky. Položíme-li  $a = 2b$  a využijeme rovnice (49.4) a (49.9), můžeme vypočítat frekvence všech modů

$$\omega^2 = \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2 \frac{4m^2 + n^2}{4}. \quad (49.12)$$

Tabulka 49.1 představuje soupis několika jednoduchých modů a kvalitativním způsobem ukazuje i jejich tvar.

Tabulka 49.1

Typ modu	$m$	$n$	$(\omega/\omega_0)^2$	$\omega/\omega_0$
	1	1	1,25	1,12
	1	2	2,00	1,41
	1	3	3,25	1,80
	2	1	4,25	2,06
	2	2	5,00	2,24

Na tomto speciálním případě je třeba ukázat na jeden důležitý fakt spočívající v tom, že frekvence nejsou soudělné a nejsou násobky nějakého čísla. Obecně neplatí představa o tom, že vlastní frekvence jsou harmonicky vázány. Neplatí pro soustavy, které mají víc než jeden rozměr a neplatí ani pro ty jednorozměrné soustavy, které jsou složitější než struna s homogenní hustotou a napětím. Příkladem takové složitější jednorozměrné soustavy je zavěšený řetěz, v němž je napětí na horním konci větší než na dolním. Vybudíme-li v takovém řetězu harmonické kmity, vzniknou různé mody a frekvence, ale frekvence nebudou jednoduchými násobky nějakého čísla a ani tvar modů nebude sinusoidální.

Mody složitějších systémů jsou ještě komplikovanější. Například v ústech máme nad hlasivkami dutinu a pohybem jazyka, rtů apod. vytváříme otevřenou nebo uzavřenou píšťalu různých tvarů a parametrů. Je to opravdu velmi složitý rezonátor, ale přece jen to rezonátor je. Mluvíme-li, naše hlasivky vydávají nějaký tón. Tóny jsou velmi složité a je jich mnoho, ale ústní dutina tyto tóny dále modifikuje, dává různým rezonančním frekvencím této dutiny. Například zpěvák může zpívat různé samohlásky: *a, o, u* atd. se stejnou výškou, ale budou znít různě, neboť různé harmonické kmity různě rezonují s dutinou. Velký význam rezonančních frekvencí dutiny pro modifikaci hlasových zvuků můžeme demonstrovat jednoduchým experimentem. Protože rychlost zvuku je nepřímo úměrná druhé mocnině hustoty, můžeme tuto rychlost měnit použitím různých plynů. Použijeme-li místo vzduchu hélium, které má nižší hustotu, dostaneme mnohem větší rychlost zvuku a všechny rezonanční frekvence dutiny vzrostou. Kdyby si tedy někdo naplnil plíce před hovorem héliem, charakter jeho hlasu by se drasticky změnil, i kdyby jeho hlasivky kmitaly nezměněně.

#### 49.4 VÁZANÁ KYVADLA

Nakonec je třeba zdůraznit, že mody existují nejen v případech složitých spojitých soustav, ale i v případě velmi jednoduchých mechanických systémů. Vhodným příkladem je soustava dvou vázaných kyvadel, již jsme se zabývali v předcházející kapitole. Tam jsme ukázali, že pohyb můžeme chápat jako superpozici dvou harmonických pohybů s různými frekvencemi. I tuto soustavu tedy můžeme zkoumat pomocí harmonických modů. Struna má nekonečně mnoho modů a dvojrozměrná plocha má také nekonečně mnoho modů. Je to svým způsobem dvojnásobně nekonečno, umíme-li nekonečna sčítat. Ale v jednoduchém mechanickém zařízení, které má jen dva stupně volnosti a vyžaduje k popisu jen dvě proměnné, existují jen dva mody.

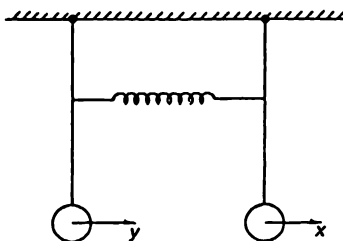
Proveďme matematický rozbor těchto dvou modů v případě, kdy jsou obě kyvadla stejně dlouhá. Necht' je stejně jako na *obr. 49.5* výchylka jednoho kyvadla  $x$  a druhého  $y$ . Kdyby nebyla pružina, v důsledku tíhy by byla síla působící na první hmotný bod úměrná jeho výchylce. Kdyby nebyla pružina, existovala by pro toto kyvadlo nějaká vlastní frekvence  $\omega_0$ . Pohybová rovnice pro kyvadlo bez pružiny by měla tvar

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x. \quad (49.13)$$

Podobně bez přítomnosti pružiny by druhé kyvadlo kývalo stejným způsobem. V přítomnosti pružiny se vedle obnovující síly podmíněné tíhou objevuje dodatečná síla od pružiny přitahující první hmotný bod. Tato síla závisí na převýšení výchylky  $x$  nad výchylkou  $y$  a je úměrná tomuto rozdílu, takže lze zapsat jako nějaká konstanta, závislá na geometrii, násobená rozdílem  $(x - y)$ .

Stejná síla, ale v opačném smyslu, působí na druhý hmotný bod. Proto musíme vyřešit tyto pohybové rovnice

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - k(x - y), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - k(y - x). \quad (49.14)$$



Obr. 49.5 Dvě vázaná kyvadla

Abychom našli pohyb, při němž se obě závaží kyvadel pohybují se stejnou frekvencí, musíme určit, jak se každé z nich vychyluje. Jinými slovy, kyvadlo  $x$  a kyvadlo  $y$  se budou kývat se stejnou frekvencí, ale jejich amplitudy musí mít určité hodnoty  $A$  a  $B$ , jejichž poměr je stálý. Zkusme třeba řešení

$$x = A e^{i\omega t}, \quad y = B e^{i\omega t}. \quad (49.15)$$

Dosadíme-li tyto veličiny do rovnic (49.14) a seskupíme podobné členy, dostaneme

$$\left( \omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m} \right) A = -\frac{k}{m} B, \quad \left( \omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m} \right) B = -\frac{k}{m} A. \quad (49.16)$$

Rovnice jsme získali dělením společným faktorem  $e^{i\omega t}$  a  $m$ .

Vypadá to tak jako bychom měli dvě rovnice pro dvě neznámé. Ve skutečnosti však nemáme *dvě* neznámé, neboť celý rozsah pohybu nemůžeme z těchto rovnic určit. Uvedené rovnice nám dovolují najít jen *poměr veličin*  $A$  a  $B$  a *obě musí dát stejný poměr*. Aby tyto rovnice byly současně splnitelné, musí být frekvence zcela speciální.

V tomto konkrétním případě můžeme frekvenci snadno najít. Vynásobíme-li rovnice navzájem, dostaneme

$$\left( \omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m} \right)^2 AB = \left( \frac{k}{m} \right)^2 AB. \quad (49.17)$$

Pokud  $A$  a  $B$  jsou nenulové (kdyby byly nulové, nebyl by pohyb), můžeme výrazem  $AB$  krátit. Nastává-li pohyb, dostaneme z uvedeného vztahu kvadratickou rovnici. Jejím vyřešením dostaneme dvě možné frekvence

$$\omega_1^2 = \omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}. \quad (49.18)$$

Dosadíme-li dále tyto hodnoty frekvencí zpět do rovnice (49.16), zjistíme, že pro první frekvenci platí  $A = B$  a pro druhou  $A = -B$ . Tak tedy vypadá „tvar modů“, o čemž se můžeme přesvědčit experimentem.

Je jasné, že v případě prvního modu, když  $A = B$ , se pružina nenapíná a obě závaží kmitají s frekvencí  $\omega_0$ , jakoby pružina neexistovala. V případě druhého řešení, kdy  $A = -B$ , přispívá pružina k obnovovací síle a zvyšuje frekvenci. Ještě zajímavější případ bychom dostali, kdybychom měli kyvadla různé délky. I v tomto případě je analýza podobná té, kterou jsme provedli a můžeme ji doporučit čtenáři jako cvičení.

## 49.5 LINEÁRNÍ SOUSTAVY

Nyní shrňme myšlenky, o nichž jsme mluvili a které všechny představují aspekty toho, co je pravděpodobně nejobecnější a nejkrásnější princip matematické fyziky. Máme-li lineární soustavu, jejíž charakter nezávisí na čase, nemusí být jeho pohyb nějak jednoduchý, může být i neobyčejně složitý, a přece existují velmi speciální pohyby, obvykle celá řada takových pohybů, při nichž se celkový tvar pohybu mění exponenciálně s časem. Pro kmitající soustavy, o nichž jsme nyní mluvili, je exponenciála imaginární a místo výrazu „exponenciálně“ by bylo lépe říkat „sinusoidálně“ s časem. Můžeme to však říci obecněji a to tak, že pohyby se mění exponenciálně s časem ve velmi speciálních modech s velmi speciální formou. Ten nejobecnější pohyb soustavy lze vždy vyjádřit jako superpozici pohybů zahrnujících každou z různých exponenciál.

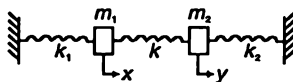
Stojí za to zdůraznit to ještě jednou i pro sinusoidální pohyby: lineární soustava se nemusí pohybovat čistě sinusoidálním způsobem, tj. s jednou určitou frekvencí, ale ať se pohybuje jakkoliv, tento pohyb lze vyjádřit jako superpozici čistě sinusoidálních pohybů. Frekvence každého z těchto pohybů a také forma vlny jsou charakteristické pro danou soustavu. Obecný pohyb v každé takové soustavě můžeme charakterizovat udáním amplitudy a fáze každého z těchto modů a pak je sečíst. Lze to říci i tak, že každá kmitající lineární soustava je ekvivalentní souboru nezávislých harmonických oscilátorů, jejichž frekvence odpovídají frekvencím modů soustavy.

Tuto kapitolu uzavřeme poznámkou o vztahu modů a kvantové mechaniky. V kvantové mechanice je kmitajícím objektem, tedy tím, co se mění s časem, amplituda pravděpodobnostní funkce, která udává pravděpodobnost nalezení elektronu resp. systému elektronů v dané konfiguraci. Tato amplituda se může měnit v prostoru a čase a ve skutečnosti splňuje lineární rovnici. Jenže v kvantové mechanice existuje transformace, podle níž to, co jsme nazývali frekvence amplitudy pravděpodobnosti, je rovno energii v jejím klasickém smyslu. Proto už zformulovaný princip můžeme na takový případ přenést tak, že slovo *frekvence* nahradíme slovem *energie*. Pak tento princip vypadá takto: Kvantověmechanická soustava, například atom, nemusí mít určitou energii, tak jako jednoduchý mechanický systém nemusí mít určitou frekvenci. Ale ať se tato soustava chová jakkoliv, její chování můžeme vždy vyjádřit jako superpozici stavů s určitou energií. Energie každého stavu a právě tak forma amplitudy určující pravděpodobnost nalezení částice v různých místech je charakteristikou atomu. Obecný pohyb můžeme popsat udáním amplitud každého z těchto rozličných energetických stavů. Zde je původ energetických hladin v kvantové mechanice. Protože kvantová mechanika je reprezentována vlnami, pak v podmínkách, kdy elektron nemá dost energie na to, aby se odtrhl od protonu, jsou tyto vlny ohraničené. Stejně jako v případě ohraničených vln struny existují pouze určité frekvence při řešení vlnové rovnice kvantové mechaniky. V kvantověmechanické interpretaci to budou určité energie. Jako důsledek toho, že kvantověmechanická soustava je reprezentována vlnami, může mít určité stavy s danou energií; příkladem jsou diskrétní energetické hladiny atomu.



## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 49.1 ■ Dvě tělesa o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  jsou upevněna ke dvěma stěnám pružinami o tuhostech  $k_1$  a  $k_2$ . Vzájemně jsou spojeny pružinou o tuhosti  $k$  (viz obrázek). Napište pohybové rovnice těchto těles a označte přitom  $k_1/m_1 = k_2/m_2 = \omega_0^2$ .



- 49.2 ■ Do rovnic získaných v předchozí úloze dosadte  $x = Ae^{i\omega t}$  a  $y = Be^{i\omega t}$  a najděte frekvence a poměr amplitud modů soustavy.

- 49.3 ■ Dokažte, že funkce  $f(x, y, z, t) = Ae^{i\omega t} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c}$ , kde

$$\omega^2 = v^2 \pi^2 \left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right), \text{ a } l, m, n \text{ jsou celá čísla větší nebo rovna jedné,}$$

- a) vyhovuje trojrozměrné vlnové rovnici popisující vlnu o rychlosti šíření  $v$ ,  
b) je rovna 0 při  $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$ ,  
c) mění se v čase jako sinusoida.

- 49.4 ■ Za předpokladu, že v předchozí úloze  $a:b:c = 1:2:3$  najděte 10 minimálních frekvencí vyjádřených pomocí nejmenší frekvence  $\omega_0$ . Uspořádejte je podle velikosti a naneste na vertikální stupnici.

- 49.5 ■ Na základě představy o nekonečně dlouhých periodických vlnách šířících se proti sobě vysvětlete, co se stane, jestliže ideální homogenní napjatou strunu délky  $L$  vychýlíme ve středním bodě kolmo o vzdálenost  $A$  a pustíme. Zakreslete několik poloh struny v různých okamžicích během jedné půlperrody první harmonické.

# Harmonické kmity

- 50.1 HUDEBNÍ TÓNY
- 50.2 FOURIEROVY ŘADY
- 50.3 KVALITA A LIBOZVUČNOST
- 50.4 FOURIEROVY KOEFICIENTY
- 50.5 VĚTA O ENERGII
- 50.6 NELINEÁRNÍ ODEZVY

## 50.1 HUDEBNÍ TÓNY

Říká se, že to byl Pythagoras, kdo objevil tento jev: Pro ucho je libozvučné současné znění dvou stejných a stejně napjatých strun s různými délkami, jsou-li délky těchto strun v poměru malých celých čísel. Je-li poměr délek jedna ku dvěma, odpovídá to v hudbě oktávě. Je-li poměr dva ku třem, odpovídá to intervalu mezi  $C$  a  $G$ , který se nazývá kvintou. Takové intervaly jsou obecně považovány za „libozvučné“ akordy.

Pythagoras byl tak unesen tímto objevem, že na něm založil celou školu – nazývala se pythago-rejská – která mysticky věřila ve velkou moc čísel. Panovalo přesvědčení, že něco podobného se zjistí i pro planety – resp. „sféry“. Proto se říká „hudba sfér“. Základní myšlenka této teorie spočívala v existenci číselných vztahů mezi orbitami planet nebo mezi jinými objekty v přírodě. Lidé to obvykle považují za projev pověrčivosti Řeků. Položme si však otázku, zda je to tak příliš odlišné od našeho vědeckého zájmu o kvantitativní vztahy. Pythagorův objev byl kromě geometrie prvním příkladem numerického vztahu v přírodě. Muselo to být úžasně překvapující najednou objevit v přírodě *fakt* vyjádřený jednoduchým číselným vztahem. Jednoduchá měření délky poskytla předpověď o něčem, co zjevně nesouviselo s geometrií, předpověď o tvorbě příjemných zvuků. Tento objev vedl k myšlence, že snad aritmetika a numerická analýza budou vhodnými nástroji pro pochopení přírody. Výsledky moderní vědy potvrzují toto stanovisko.

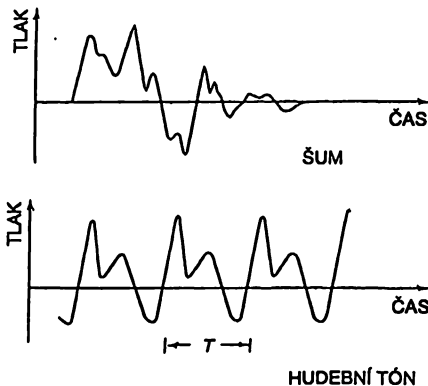
Pythagorovi se podařilo učinit svůj objev jen díky experimentálnímu pozorování. Přesto na něho, jak se zdá, tento důležitý aspekt nezapůsobil. V opačném případě by totiž rozvoj fyziky začal mnohem dříve. (Snadno se mluví o tom, co někdo kdysi udělal, jak to měl udělat!)

Všimněme si třetího aspektu tohoto velmi zajímavého objevu: máme co činit se dvěma tóny, které pro ucho *příjemně znějí*. Můžeme si položit otázku, zda jsme na tom lépe než Pythagoras v poznání, proč jsou našemu uchu příjemné určité tóny. Obecná teorie estetiky od dob

Pythagora téměř vůbec nepokročila. V tomto jediném objevu Řeků jsou vlastně tři aspekty: experiment, matematické vztahy a estetika. Fyzici byli úspěšní jen v prvních dvou oblastech. Tato kapitola se bude zabývat současným chápáním Pythagorova objevu.

Mezi zvuky, které slyšíme, je určitý druh, který nazýváme *šumem*. Šumu odpovídají jakési nepravidelné kmity ušního bubínku vyvolané nepravidelným kmitáním nějakého blízkého objektu. Kdybychom nakreslili graf závislosti tlaku vzduchu na bubínek (a tedy i posunutí bubínku) na čas, zjistili bychom, že je podobný grafu na obr. 50.1a. Takový šum odpovídá zhruba dupotu nohou. *Hudební tón* má jiný charakter. Hudbu můžeme charakterizovat přítomností více méně *setrávajících tónů* – nebo hudebních „not“. (Hudební nástroje však dokážou vytvářet i šum!) Tón může trvat relativně krátkou dobu, jako když stlačíme klávesu klavíru nebo může trvat velmi dlouho, jako v případě flétnisty, který píská dlouhý tón.

V čem spočívá zvláštnost hudebního tónu z hlediska tlaku vzduchu? Hudební tón se liší od šumu v tom, že jeho graf je periodický. Existuje určitý nepravidelný průběh změny tlaku vzduchu v určitém časovém intervalu, ale tento průběh se pak periodicky opakuje. Příklad závislosti tlaku na čase odpovídající hudebnímu tónu je vidět na obr. 50.1b.



Obr. 50.1 Tlak jako funkce času a) v případě šumu b) v případě hudebního tónu

Hudebníci obvykle charakterizují hudební tón hlasitostí (silou), výškou a kvalitou. Hlasitost odpovídá velikosti tlakových změn. Výška odpovídá časové periodě opakování základní tlakové funkce. (Nízké tóny mají delší periody než vysoké tóny.) Kvalita tónu je charakterizována rozdíly, které slyšíme při znění dvou tónů stejné hlasitosti a výšky. Hoboj, housle nebo soprán rozeznáme i tehdy, když vytvářejí tón stejné výšky. Kvalita souvisí se strukturou periodicky se opakujícího obrazce.

Na chvíli předpokládejme, že zvuk vzniká kmitáním struny. Rozezvučíme-li strunu tak, že ji uprostřed vychýlíme a pustíme, bude její další pohyb určován vlnami, které jsme vybudili. Víme, že takové vlny se budou šířit oběma směry a na koncích se odrazí. Tak budou dlouhou dobu putovat z jednoho konce na druhý. Vlna se bude bez ohledu na to, jak je složitá, periodicky opakovat. Perioda opakování je právě doba  $T$  potřebná k tomu, aby vlna proběhla dvě délky celé struny. Je to doba, kterou potřebuje jakákoliv vybuzená vlna k odrazu od každého konce, návratu do původní polohy a pokračování v původním směru. Doba je stejná pro vlny postupující v jednom nebo druhém směru. Každý bod struny se vrátí do své počáteční polohy po jedné periodě a pak znovu po další periodě atd. Vybuzená zvuková vlna se musí opakovat stejně. Tak můžeme vysvětlit vznik hudebního tónu brnknutím o strunu.

## 50.2 FOURIEROVY ŘADY

V předcházející kapitole jsme se seznámili s jiným pohledem na kmitající soustavu. Poznali jsme, že struna má různé módy a každou určitou vibraci podmíněnou počátečními podmínkami můžeme považovat za vhodnou kombinaci několika módů, které kmitají současně. V případě struny jsme zjistili, že normální módy mají frekvence  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ . Nejobecnější pohyb rozkmitané struny je proto složen ze sinusoidálních kmitů se základní frekvencí  $\omega_0$ , dále s druhou harmonickou frekvencí  $2\omega_0$ , dále s třetí harmonickou  $3\omega_0$  atd. Základní mód se opakuje po každé periodě  $T_1 = 2\pi/\omega_0$ . Druhý harmonický mód se opakuje po každé periodě  $T_2 = 2\pi/2\omega_0$ . Opakuje se však i po  $T_1 = 2T_2$ , tedy po dvou svých periodách. Podobně se třetí harmonický kmit opakuje po časovém intervalu  $T_1$ , který představuje jeho tři periody. Tak vidíme, že struna, kterou jsme rozkmitali, opakuje obrazec svého pohybu s periodou  $T_1$ . Tím vytváří hudební tón.

Dosud jsme mluvili o pohybu struny. Ale *zvuk*, který je pohybem vzduchu, je vyvolán pohybem struny, a proto i jeho kmity se musí skládat ze stejných harmonických kmitů – i když nemůžeme mluvit o vlastních kmitech vzduchu. I relativní velikost harmonických kmitů může být ve vzduchu jiná než ve struně, hlavně tehdy, je-li struna „vázána“ se vzduchem prostřednictvím ozvučnice. Účinnost této vazby se vzduchem je totiž různá pro různé harmonické kmity.

Vyjadřuje-li funkce  $f(t)$  časovou závislost tlaku vzduchu v případě hudebního tónu (např. takovou jaká je na *obr. 50.1b*), pak můžeme očekávat, že  $f(t)$  lze vyjádřit jako součet určitého počtu jednoduchých harmonických funkcí času – takových jako je  $\cos \omega t$  – pro každou z různých harmonických frekvencí. Je-li perioda kmitů  $T$ , bude základní úhlová frekvence  $\omega = 2\pi/T$  a harmonické frekvence budou  $2\omega, 3\omega$  atd.

Je to však trochu složitější. Nemůžeme totiž očekávat, že počáteční fáze budou pro všechny frekvence stejné. Musíme proto pracovat s funkcemi typu  $\cos(\omega t + \varphi)$ . Je však jednodušší používat pro každou frekvenci sinus i kosinus. Vzpomeňme si, že

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t \quad (50.1)$$

a protože  $\varphi$  je konstanta, můžeme *každý* sinusoidální kmit s frekvencí  $\omega$  vyjádřit jako součet takového členu, který obsahuje  $\cos \omega t$  a takového, který obsahuje  $\sin \omega t$ .

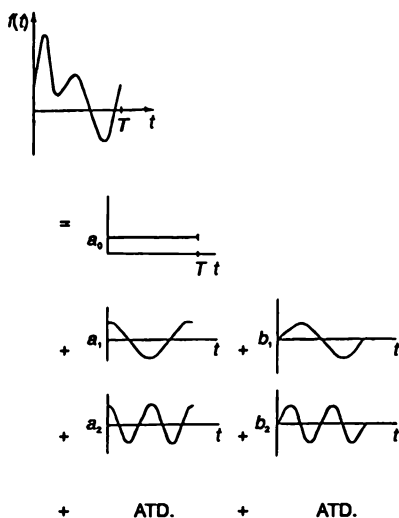
Tak přicházíme k závěru, že *každou* funkci  $f(t)$ , která je periodická s periodou  $T$ , můžeme matematicky vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 \\ & + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \\ & + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t \\ & + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t \\ & + \dots \quad + \dots \quad , \end{aligned} \quad (50.2)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$  a  $a_i$  a  $b_i$  jsou číselné konstanty, které nám říkají s jakou vahou je každá složka kmitů přítomna v kmitu  $f(t)$ . Přidali jsme i člen  $a_0$  s nulovou frekvencí, a tak náš vztah je zcela obecný, i když v hudebním tónu je tento člen obvykle nulový. Tento člen představuje posun střední hodnoty zvukového tlaku (tj. posun „nulové“ hladiny). S tímto členem můžeme náš vztah použít pro libovolný případ. Rovnice (50.2) je schematicky znázorněna na *obr. 50.2*. (Amplitudy

## HARMONICKÉ KMITY

$a_n$ ,  $b_n$  harmonických funkcí musí být vhodně vybrány. Na obrázku jsou jen schématicky znázorněny bez dodržení měřítky.) Řada (50.2) se nazývá *Fourierova řada* pro  $f(t)$ .



Obr. 50.2 Libovlnná periodická funkce  $f(t)$  je rovna součtu jednoduchých harmonických funkcí

Uvedli jsme, že *každou* periodickou funkci lze takovým způsobem vyjádřit. Toto tvrzení musíme opravit v tom smyslu, že platí pro zvukové vlny nebo pro všechny ty funkce, s nimiž se setkáváme ve fyzice. Matematici však dokážou vymyslet funkce, které nemůžeme složit z jednoduchých harmonických funkcí. Takovým příkladem je funkce, která se „stáčí zpět“, takže má pro některá  $t$  dvě hodnoty. Takové funkce nás však nyní nemusí znepokojovat.

### 50.3 KVALITA A LIBOZVUČNOST

Nyní už můžeme říci, co určuje „kvalitu“ hudebního tónu. Je to relativní množství jednotlivých harmonických, tedy hodnoty koeficientů  $a$  a  $b$ . Tón, který obsahuje jen první harmonickou, je „čistý“ tón. Tón, který obsahuje mnoho silných harmonických, je „bohatý“ tón. Housle dávají jiný poměr harmonických tónů než hoboj.

Různé hudební tóny můžeme vytvořit tak, že připojíme k reproduktoru různé oscilátory. (Oscilátor obvykle vytváří téměř čistou jednoduchou harmonickou funkci.) Frekvence oscilátorů můžeme vybrat tak, aby byly  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  atd. Pak můžeme nastavením síly každého oscilátoru skládat požadovaná množství jednotlivých harmonických – tak vytvoříme tóny různé kvality. Na tomto principu spočívá činnost elektronického syntezátoru zvuku. Klávesami volíme frekvenci základního oscilátoru a pomocí jezdců ovládáme relativní poměry harmonických. Tak dosáhneme toho, že zvuk varhan zní jako zvuk flétny, hoboje nebo houslí.

Není bez zajímavosti, že k vytvoření takových „umělých“ tónů potřebujeme jen jeden oscilátor pro každou frekvenci – nepotřebujeme oddělené oscilátory pro sinovou a kosinovou složku. Naše ucho totiž není příliš citlivé na relativní fáze harmonických a zaměřuje se hlavně na celkovou sinovou a kosinovou část každé frekvence. Naše analýza je tedy přesnější než analýza potřebná

k vysvětlení *subjektivního* aspektu hudby. Reakce mikrofonu nebo jiných fyzikálních zařízení však závisí na fázích a naše úplná analýza je pak nezbytná.

„Kvalita“ řeči je určována zvuky samohlásek, které rozeznáváme v hovoře. Tvar úst určuje frekvenci přirozených modů zvukových vibrací vzduchu v ústní dutině. Některé z těchto modů se vybudí zvukovou vlnou od hlasivek. Takovým způsobem amplitudy některých harmonických zvuků vzrostou proti druhým harmonickým. Změníme-li tvar úst, budou upřednostněny harmonické jiných frekvencí. Tak se vytváří rozdíl mezi zvukem  $e - e - e$  a zvukem  $a - a - a$ .

Všichni dobře víme, že určitá samohláska – řekněme  $e - e - e$  – zůstává stále tou samohláskou, i když ji vyslovujeme (nebo zpíváme) s vyšší nebo nižší frekvencí. Z mechanismu, který jsme popsali, by se dalo čekat, že při zformování úst pro vyslovení  $e - e - e$  se zdůrazní *určité* frekvence, které se *nesmí* změnit při změně výšky našeho hlasu. Pak se však se změnou výšky hlasu musí změnit poměr důležitých harmonických k základní harmonické, musí se tedy změnit kvalita. Je zjevné, že mechanismus rozeznávání řeči se nezakládá na poměru jednotlivých harmonických.

Co můžeme nyní říci o Pythagorově objevu? Víme, že dvě podobné struny, jejichž délky jsou v poměru 2 ku 3, budou mít základní frekvence v poměru 3 ku 2. Proč by ale měly společně příjemně znít? Klíčem k tomuto problému snad budou frekvence vyšších harmonických. Druhá harmonická kratší struny bude mít stejnou frekvenci jako třetí harmonická delší struny. Snadno se ukáže – nebo tomu prostě uvěřte – že brnknutím o strunu vybudíme několik silných nejnižších harmonických.

Snad bychom mohli zformulovat tato pravidla. Tóny znějí libozvučně, mají-li harmonické se stejnými frekvencemi. Tóny znějí nelibozvučně, mají-li vyšší harmonické málo se lišící frekvence, ale přece jen jsou dost odlišné k tomu, aby mezi nimi vznikly rychlé záněje. Neumíme popsat, ani definovat, proč záněje neznějí příjemně, ale souzvuk vyšších harmonických zní příjemně. Na základě našich poznatků neumíme říci, co *zní* dobře nebo co by mělo například dobře *vonět*. Jinými slovy, naše chápání tohoto jevu není obecnější než pouhé tvrzení, že když znějí tóny unisono, znějí dobře. Nemůžeme z toho však dedukovat nic víc než vlastnosti souladu v hudbě.

Harmonické vztahy, které jsme popsali, můžeme snadno prověřit jednoduchými experimenty s klavírem. Označme tři po sobě jdoucí noty C někde ze středu klaviatury symboly  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  a tři bezprostředně vyšší noty  $G$  označme symboly  $G$ ,  $G'$ ,  $G''$ . Základní harmonické budou pak mít následující relativní frekvence:

$$\begin{array}{ll} C - 2 & G - 3 \\ C' - 4 & G' - 6 \\ C'' - 8 & G'' - 12. \end{array}$$

Tyto harmonické vztahy můžeme demonstrovat takto: *Pomalustla*čme klávesu  $C'$ , takže nezvučí, ale tlumící pedál zdvihneme. Rozezvůčme-li pak  $C$ , ozve se základní harmonická i druhá harmonická. Druhá harmonická vybudí kmity struny  $C'$ . Uvolníme-li  $C$  (ale  $C'$  ponecháme stlačené), tlumící pedál zastaví kmity struny  $C$  a my slyšíme (měkce) notu  $C'$ , jak zaniká. Podobným způsobem může třetí harmonická  $C$  způsobit kmity  $G'$  nebo šestá harmonická  $C$  (která je mnohem slabší) může vybudit kmity základní harmonické  $G''$ .

Poněkud odlišný výsledek dostaneme tehdy, stlačíme-li jemně  $G$  a pak silně  $C'$ . Třetí harmonická  $C'$  odpovídá čtvrté harmonické  $G$ , takže se vybudí jen čtvrtá harmonická  $G$ . Nasloucháme-li pozorně, můžeme slyšet tón  $G''$ , který je o dvě oktávy vyšší než  $G$ , které jsme stlačili! Není těžké vymyslet mnoho jiných kombinací této hry.

Bude na místě poznamenat, že durovou stupnicí můžeme definovat právě podmínkou, že *každý* ze tří durových akordů ( $F - A - C$ ), ( $C - E - G$ ) a ( $G - B - D$ ) představuje posloupnost tónů

s frekvenčním poměrem (4 : 5 : 6). Tyto poměry – spolu se skutečností, že v oktávě ( $C - C'$ ,  $B - B'$  atd.) jsou frekvence v poměru 1 : 2 – určují celou stupnici „ideálního“ případu, resp. to, co nazýváme přirozené ladění. Klávesnicové nástroje nebo klavír *nej*sou obvykle laděné tímto způsobem, ale při jejich ladění se dopouštíme malého podvodu, takže frekvence jsou jen *přibližně* věrné pro všechny možné počáteční tóny. Pro takové ladění, nazývané „temperované“, je oktáva (poměr frekvencí zůstává 1 : 2) rozdělena na 12 stejných intervalů, které mají frekvenční poměr  $(2)^{1/12}$ . Kvinta už nemá frekvenční poměr 3/2, ale  $(2)^{7/12} = 1,499$ , takže většina lidí tento rozdíl sluchem nepostřehne.

Pomocí shody harmonických frekvencí jsme zformulovali pravidla libozvučnosti v hudbě. Je tato shoda skutečnou *příčinou* libozvučnosti dvou tónů? Jeden vědec tvrdil, že dva *čistě* tóny – tóny zbavené vyšších harmonických – nevytvoří *pocit* libozvučnosti nebo nelibozvučnosti, je-li poměr jejich frekvencí přesně nebo přibližně takový jako očekávaný poměr. (Takové experimenty je však těžké uskutečnit, protože je těžké vytvořit čisté tóny z důvodů, o nichž si povíme později.) Nemůžeme s určitostí tvrdit, zda ucho porovnává harmonické nebo používá aritmetiku, když se rozhoduje, zda se nám zvuk líbí.

## 50.4 FOURIEROVY KOEFICIENTY

Vraťme se nyní k myšlence, že každý tón – tj. *periodický* zvuk – můžeme vyjádřit jako vhodnou kombinaci harmonických frekvencí. Chtěli bychom ukázat, v jaké míře jsou jednotlivé harmonické zastoupeny. Jsou-li *dány* všechny koeficienty  $a$ ,  $b$ , je jednoduché vypočítat  $f(t)$  pomocí rovnice (50.2). Nás však zajímá, jaké jsou pro dané  $f(t)$  koeficienty u jednotlivých harmonických členů. (Je jednoduché upéct koláč podle receptu, ale dokážeme napsat recept, když nám někdo dá ochutnat upečený koláč?)

Fourier přišel na to, že to není příliš složité. Člen  $a_0$  je určitě jednoduchý. Už jsme uvedli, že je to právě střední hodnota  $f(t)$  za jednu periodu (od  $t = 0$  po  $t = T$ ). Snadno se o tom můžeme přesvědčit. Střední hodnota sinové nebo kosinové za jednu periodu je nulová. Za dvě nebo tři periody nebo celočíselný násobek periody je také nulová. Proto je střední hodnota všech členů pravé strany rovnice (50.2) nulová kromě členu  $a_0$ . (Vzpomeňte si, že musíme zvolit  $\omega = 2\pi/T$ .)

Střední hodnota součtu je rovna součtu středních hodnot. Proto je střední hodnotou  $f(t)$  právě střední hodnota z  $a_0$ . Jenže  $a_0$  je konstanta a její střední hodnota je jí právě rovna. Připomeneme-li si definici střední hodnoty, můžeme psát

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (50.3)$$

Určit ostatní koeficienty není o moc těžší. K jejich určení použijeme trik objevený Fourierem. Násobme obě strany rovnice (50.2) nějakou harmonickou funkcí, řekněme  $\cos 7\omega t$ . Tak dostaneme

$$\begin{aligned} f(t) \cdot \cos 7\omega t &= a_0 \cdot \cos 7\omega t \\ &+ a_1 \cos \omega t \cdot \cos 7\omega t + b_1 \sin \omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ a_2 \cos 2\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ \dots \quad + \dots \\ &+ a_7 \cos 7\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_7 \sin 7\omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ \dots \quad + \dots \end{aligned} \quad (50.4)$$

Dále najdeme střední hodnoty obou stran. Střední hodnota  $a_0 \cos 7\omega t$  za dobu  $T$  je úměrná střední hodnotě kosinu za 7 celých period. Jenže ta je rovna nule. Střední hodnota *téměř všech* ostatních členů je *také* rovna nule. Podívejme se na člen s  $a_1$ . Víme, že obecně platí vztah

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos (A + B) + \frac{1}{2} \cos (A - B). \quad (50.5)$$

Člen s  $a_1$  proto lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{1}{2} a_1 (\cos 8\omega t + \cos 6\omega t). \quad (50.6)$$

Máme tedy dva kosinové členy, z nichž má jeden osm úplných period  $T$  a druhý šest. *Střední hodnoty obou těchto členů jsou nulové.* Proto je i střední hodnota členu s  $a_1$  nulová.

Pro člen s  $a_2$  bychom dostali  $a_2 \cos 9\omega t$  a  $a_2 \cos 5\omega t$  a střední hodnota každého z těchto členů je nulová. Pro člen s  $a_3$  bychom dostali  $\cos 16\omega t$  a  $\cos(-2\omega t)$  je stejný jako  $\cos 2\omega t$  a tak střední hodnoty obou těchto členů jsou nulové. Je jasné, že všechny členy s koeficienty  $a$  budou mít nulové střední hodnoty až na jediný člen, který je právě člen s  $a_7$ . Pro tento člen dostaneme

$$\frac{1}{2} a_7 (\cos 14\omega t + \cos 0). \quad (50.7)$$

Kosinus nuly je jedna a taková je i jeho střední hodnota. Přicházíme tak k výsledku, že střední hodnota všech členů rovnice (50.4), které obsahují koeficienty  $a$ , je rovna  $1/2 a_7$ .

Členy s koeficienty  $b$  jsou ještě jednodušší. Násobíme-li je kosinovým výrazem, jako je např.  $\cos n\omega t$ , stejným způsobem jako předtím, můžeme dokázat, že jejich střední hodnoty budou nulové.

Je vidět, že Fourierův „trik“ působil jako síto. Při násobení  $\cos 7\omega t$  a zprůměrování, všechny členy vypadly, kromě členu s  $a_7$ , a platilo

$$\text{Střední hodnota } [f(t) \cdot \cos 7\omega t] = a_7/2, \quad (50.8)$$

tedy

$$a_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos 7\omega t dt. \quad (50.9)$$

Pro čtenáře nebude těžké dokázat, že koeficient  $b_7$  můžeme získat násobením rovnice (50.2) výrazem  $\sin 7\omega t$  a vyjádřením střední hodnoty obou stran rovnice. Tak získáme výsledek

$$b_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin 7\omega t dt. \quad (50.10)$$

To, co platí pro číslo 7, zřejmě platí pro libovolné celé číslo. Výsledek našeho důkazu můžeme shrnout do následujícího elegantnějšího matematického tvaru. Jsou-li  $m$  a  $n$  celá čísla různá od nuly a je-li  $\omega = 2\pi/T$ , pak



$$\text{I.} \quad \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t \, dt = 0 \quad (50.11)$$

$$\text{II.} \quad \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ T/2 & \text{pro } n = m \end{cases} \quad (50.12)$$

$$\text{III.} \quad \int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ T/2 & \text{pro } n = m \end{cases}$$

$$\text{IV.} \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (50.13)$$

$$\text{V.} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt \quad (50.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt \quad (50.15)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t \, dt. \quad (50.16)$$

V předcházejících kapitolách bylo výhodné popisovat jednoduchý harmonický pohyb pomocí exponenciálních funkcí. Místo  $\cos \omega t$  jsme psali  $e^{i\omega t}$ , tedy reálnou část exponenciální funkce. V této kapitole jsme pracovali se sinem a kosinem, protože tak se stal náš důkaz trochu přehlednější. Náš konečný výsledek, rovnice (50.13), však lze vyjádřit v kompaktnější formě

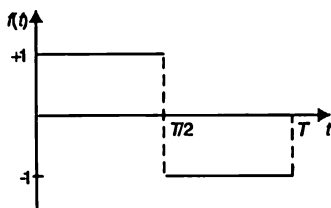
$$f(t) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n e^{in\omega t}, \quad (50.17)$$

kde  $\hat{a}_n$  je komplexní číslo  $a_n - i b_n$  (přičemž  $b_0 = 0$ ). Kdybychom chtěli takový zápis používat důsledně, museli bychom psát

$$\hat{a}_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} \, dt \quad (n \geq 1). \quad (50.18)$$

Nyní už umíme rozložit periodickou vlnu na její harmonické složky. Takový postup se nazývá *rozvoj do Fourierovy řady* a jednotlivé členy se nazývají Fourierovými složkami. *Neukázali* jsme však, že určením všech Fourierových složek a jejich sčítáním se dostaneme opravdu zpět k naší funkci  $f(t)$ . Matematici dokázali pro širokou třídu funkcí, vlastně pro všechny ty, které zajímají fyziky, že umíme-li vypočítat požadované integrály, dostaneme se nazpět k  $f(t)$ . Je zde však jedna malá výjimka. Je-li funkce  $f(x)$  nespojitá, tj. když najednou skočí z jedné hodnoty na druhou, Fourierův součet dá v bodě nespojitosti hodnotu, která leží uprostřed mezi dolní a horní hodnotou skutečné funkce v tomto bodě. Kdybychom tedy měli takovou zvláštní funkci:  $f(t) = 0$ ,  $0 \leq t < t_0$  a  $f(t) = 1$  pro  $t_0 \leq t \leq T$ , Fourierova řada by dala správnou hodnotu všude kromě bodu  $t_0$ , kde by dala hodnotu  $1/2$  místo 1. Je však dost nefyzikální požadovat, aby funkce byla nulová

až po  $t_0$  a jednotková *právé* v  $t_0$ . Snad by bylo přece jen dobré pro fyziky formulovat „pravidlo“ tak, že každá nespojitá funkce (která může být jen zjednodušením *skutečné* fyzikální funkce) musí nabývat v bodě nespojitosti hodnotu, která leží uprostřed hodnot, jež má funkce zleva a zprava. Pak každá taková funkce – s libovolným počtem skoků – bude stejně jako ostatní fyzikálně zajímavé funkce správně určována Fourierovou řadou.



Obr. 50.3 Skoková funkce

$$f(t) = +1 \text{ pro } 0 < t < T/2$$

$$f(t) = -1 \text{ pro } T/2 < t < T$$

Jako cvičení může čtenář určit Fourierovu řadu pro případ funkce znázorněné na obr. 50.3. Vzhledem k tomu, že funkci nemůžeme vyjádřit v explicitním algebraickém tvaru, nebude možné počítat integrály od 0 po  $T$  obvyklým způsobem. Integrály jsou však jednoduché, rozdělme-li je na dvě části: integrál od 0 po  $T/2$  (kde je  $f(t) = 1$ ) a na integrál od  $T/2$  do  $T$  (kde je  $f(t) = -1$ ). Tak musíme dostat

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots \right), \quad (50.19)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$ . Pravoúhelníková vlna (se speciálně zvolenou fází) má tedy jen liché harmonické a jejich amplitudy jsou nepřímo úměrné jejich frekvencím.

Proveřme, zda nás rovnice (50.19) skutečně přivedla nazpět k funkci  $f(t)$  pro některou hodnotu  $t$ . Zvolme  $t = T/4$ , tedy  $\omega t = \pi/2$ . Tehdy máme

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right) \quad (50.20)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) \quad (50.21)$$

Součet takové řady je však znám<sup>62)</sup> a je roven  $\pi/4$ , takže bude  $f(t) = 1$ .

<sup>62)</sup> Součet této řady můžeme vypočítat následujícím způsobem. Nejprve si uvědomme, že  $\int_0^x [dx/(1+x^2)] = \arctg x$ . Dále rozložíme podintegrální výraz do řady  $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ . Integrujeme-li tuto řadu tak, že integrujeme každý člen zvlášť (v intervalu od 0 po  $x$ ), dostaneme  $\arctg x = 1 - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7$ . Položíme-li  $x = 1$ , dostaneme hledaný vztah, neboť  $\arctg 1 = \pi/4$ .

## 50.5 VĚTA O ENERGII

Energie vlny je úměrná druhé mocnině její amplitudy. V případě vlny složitěho tvaru je energie za jednu periodu úměrná  $\int_0^T f^2(t) dt$ . Tuto energii můžeme dát do souvislosti s Fourierovými koeficienty. Můžeme psát

$$\int_0^T f^2(t) dt = \int_0^T \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right]^2 dt, \quad (50.22)$$

Vyjádříme-li druhou mocninu výrazu v závorce, dostaneme všechny možné křížové členy. Jeden z nich je například  $a_5 \cos 5\omega t \cdot b_7 \sin 7\omega t$ . Ukázali jsme však už dříve (rovnice (50.11) a (50.12)), že integrály všech takových členů přes jednu periodu dávají nulu. Zůstávají nám jen kvadratické členy typu  $a_5^2 \cos^2 \omega t$ . Integrál z druhé mocniny libovolného kosinu nebo sinu přes jednu periodu je roven  $T/2$ , a proto máme

$$\begin{aligned} \int_0^T f^2(t) dt &= T a_0^2 + \frac{T}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + b_1^2 + b_2^2 + \dots) = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &= T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned} \quad (50.23)$$

Tato rovnice se nazývá „věta o energii“ a říká, že celková energie vlny je rovna součtu energií všech Fourierových složek. Kdybychom například tuto větu aplikovali na řadu (50.19) a uvážili, že  $[f(t)]^2 = 1$ , dostali bychom

$$T = \frac{T}{2} \cdot \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right),$$

a tak bychom se dozvěděli, že součet reciprokových druhých mocnin lichých celých čísel je roven  $\pi^2/8$ . Kdybychom zapsali podobným způsobem nejprve Fourierovu řadu pro funkci  $a$  pak použili větu o energii, mohli bychom dokázat, že  $1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \dots$  je rovno  $\pi^4/90$ ; tento výsledek jsme potřebovali v 45. kapitole.

## 50.6 NELINEÁRNÍ ODEZVY

V harmonické teorii je ještě jeden důležitý prvek, na který je třeba upozornit pro jeho praktický význam, a tím jsou nelineární efekty. Ve všech soustavách, které jsme dosud uvažovali, jsme předpokládali linearitu, tedy odezvy na síly, např. výchylky nebo zrychlení byly vždy úměrné silám. Proud v obvodech byly úměrné napětím apod. Nyní budeme uvažovat takové případy, kde tato přísná úměrnost není. Na chvíli uvažujme nějaký přístroj, v němž odezva – označíme ji  $x_{od}$  – bude v okamžiku  $t$  určována vstupní veličinou  $x_{vs}$  ve stejném okamžiku. Veličinou  $x_{vs}$  může například být síla a  $x_{od}$  může být výchylka nebo  $x_{vs}$  může být proud a  $x_{od}$  napětí. Je-li přístroj lineární, bude

$$x_{od}(t) = K x_{vs}(t), \quad (50.24)$$

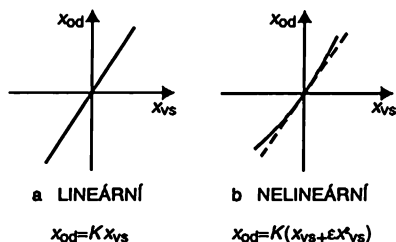
kde  $K$  je konstanta nezávislá na  $t$  a  $x_{vs}$ . Předpokládejme však, že přístroj není přesně lineární, ale jen přibližně, takže můžeme psát

$$x_{od}(t) = K[x_{vs}(t) + \varepsilon x_{vs}^2(t)], \quad (50.25)$$

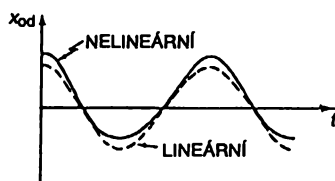
kde  $\varepsilon$  je malé vzhledem k jedné. Takové lineární a nelineární odezvy jsou znázorněné na grafech obrázku 50.4.

Nelineární odezvy mají některé důležité praktické důsledky a o některých z nich si povíme. Nejprve si všimneme, co se stane, připojíme-li na vstup čistý tón. Ať  $x_{vs} = \cos \omega t$ . Nakreslíme-li  $x_{od}$  jako funkci času, dostaneme plnou čáru na obr. 50.5. Přerušovaná čára je pro porovnání a představuje odezvu lineární soustavy. Je vidět, že na výstupu už nedostáváme kosinovou funkci. Tato funkce je nahoře ostřejší a dole plošší. Říkáme, že výstupní signál je *zkreslený*. Taková vlna už není čistým tónem a bude obsahovat vyšší harmonické. Zjistíme, které to budou. Dosadíme-li  $x_{vs} = \cos \omega t$  do rovnice (50.25), dostaneme

$$x_{od} = K(\cos \omega t + \varepsilon \cos^2 \omega t). \quad (50.26)$$



Obr. 50.4 Lineární a nelineární odezva



Obr. 50.5 Odezva nelineárního přístroje na vstupní signál  $\cos \omega t$ . Pro porovnání je znázorněna i lineární odezva.

Využijeme-li známý vztah  $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\vartheta)$ , dostaneme

$$x_{od} = K \left( \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\omega t \right). \quad (50.27)$$

Výstupní signál má tedy nejen složku základní frekvence, kterou měl i vstupní signál, ale má i určitou část druhé harmonické. Na výstupu se objevuje i konstantní člen  $K(\varepsilon/2)$ , který odpovídá posunu střední hodnoty znázorněnému na obr. 50.5. Proces vytvoření posunu střední hodnoty se nazývá *usměrnění*.

Nelineární systém tedy usměrňuje a vytváří vyšší harmonické frekvencí přivedených na vstup. I když nelinearita, kterou jsme uvažovali, vytvářela jenom druhou harmonickou, nelinearity vyššího řádu – například takové, které obsahují členy jako  $x^3$ ,  $x^4$  – budou vytvářet vyšší harmonické než druhou.

Dalším důsledkem nelineární odezvy je *modulace*. Obsahuje-li náš vstupní signál dva čisté tóny (nebo i více), nedostaneme na výstupu jen jejich harmonické, ale i jiné frekvenční složky. Nechť  $x_{vs} = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$ , přičemž  $\omega_1$  a  $\omega_2$  nejsou v harmonickém vztahu. Kromě lineárního členu (který je  $K$ -násobkem vstupního signálu) dostaneme na výstupu tyto složky

$$x_{od} = K\varepsilon (A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t)^2 = \quad (50.28)$$

$$= K\varepsilon (A^2 \cos^2 \omega_1 t + B^2 \cos^2 \omega_2 t + 2AB \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t) \quad (50.29)$$

První dva členy v závorce rovnice (50.29) představují právě ty členy, které daly v našich předcházejících výpočtech konstantní členy a druhé harmonické. Poslední člen je nový.

Tento nový „křížový člen“  $AB \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t$  můžeme chápat dvojím způsobem. Liší-li se podstatně tyto dvě frekvence (je-li například  $\omega_1$  mnohem větší než  $\omega_2$ ), můžeme považovat tento křížový člen za kosinové oscilace s proměnnou amplitudou. Můžeme si ho představit zapsaný následujícím způsobem

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = C(t) \cos \omega_1 t, \quad (50.30)$$

kde

$$C(t) = AB \cos \omega_2 t. \quad (50.31)$$

Řekáme, že amplituda kmitů  $\cos \omega_1 t$  je *modulovaná* frekvencí  $\omega_2$ .

Tento nový člen se však může zapsat i v takovémto tvaru:

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{AB}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2) t + \cos(\omega_1 - \omega_2) t]. \quad (50.32)$$

Z tohoto zápisu je vidět, že se vytvořily dvě nové složky, jedna se *součtovou* frekvencí  $(\omega_1 + \omega_2)$  a druhá s *rozdílovou* frekvencí  $(\omega_1 - \omega_2)$ .

Máme tedy dva různé, ale ekvivalentní pohledy na jeden výsledek. Ve speciálním případě, kdy  $\omega_1 \gg \omega_2$  můžeme dát tyto různé pohledy do souvislosti, uvědomíme-li si, že  $(\omega_1 + \omega_2)$  a  $(\omega_1 - \omega_2)$  se jen málo liší, a proto zpozorujeme zázřejmě. Jenže tyto zázřejmě způsobí *modulaci* amplitudy střední frekvence  $\omega_1$  polovinou rozdílu frekvencí  $2\omega_2$ . Nyní vidíme, proč jsou tyto dva popisy ekvivalentní.

Máme-li shrnout, co jsme zjistili, můžeme říci, že nelineární odezvou vzniká několik jevů: uměrnění, tvorba vyšších harmonických a modulace nebo tvorba složek se součtem a rozdílem frekvencí.

Všimněme si, že všechny tyto jevy (rovnice 50.29) jsou úměrné nejen koeficientu nelinearity  $\varepsilon$ , ale i součinu dvou amplitud – buď  $A^2$  nebo  $B^2$  nebo  $AB$ . Proto lze čekat, že tyto jevy budou mnohem důležitější v případě *silných* než slabých signálů.

Popsané jevy mají mnoho praktických aplikací. Co se týká zvuku, předpokládá se, že ucho je nelineární soustavou. Podkladem pro takový předpoklad je skutečnost, že při silných zvucích máme pocit, že *slyšíme* vyšší harmonické a součtové a rozdílové frekvence, i když zvuková vlna obsahuje pouze čisté tóny.

Prvky používané v zařízeních reprodukcijících zvuk – zesilovače, reproduktory apod. – obsahují vždy nějaké nelinearity. Zkreslují zvuk – vytvářejí vyšší harmonické apod. – tedy zvuky, které v původním signálu nebyly. Tyto nové složky ucho slyší a překáží mu. Proto jsou hi-fi zařízení konstruována tak, aby byla co nejlineárnější. (Není však jasné, proč nám stejným způsobem „nepřekáží“ nelinearita *ucha* nebo odkud vlastně víme, že nelinearita je v *reproduktoru*, a ne v našem uchu!)

Nelinearity jsou však potřebné a v některých částech rádiových vysílačů a přijímačů jsou úmyslně zabudovány velké nelinearity. Ve vysílači s amplitudovou modulací je hlasový signál (s frekvencí několika kHz) kombinován s „nosným“ signálem (s frekvencí několika MHz) v nelineárním obvodu nazývaným *modulátor*, a tak se vytvářejí modulované vlny, které potom vysílač vysílá. V přijímači se složky přijatého signálu dostanou na nelineární obvod, který zkombinuje součtové a rozdílové frekvence modulovaného nosného signálu a opět vytvoří hlasový signál.

Když jsme mluvili o průchodu světla látkou, předpokládali jsme, že indukované oscilace nábojů jsou úměrné elektrickému poli světla – že odezva je lineární. Byla to opravdu velmi dobrá aproximace. Ale byly už zkonstruovány zdroje světla (lasery), které produkují tak intenzivní světlo, že můžeme pozorovat nelineární efekty. Dnes je už možné generovat harmonické světelných frekvencí. Prochází-li intenzivní červené světlo kouskem skla, vychází ze skla i trochu modrého světla – to je druhá harmonická!

# PŘÍKLADY A CVIČENÍ

50.1 ■ S použitím Fourierova rozvoje pravoúhlé vlny

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases} = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

ukážete, že

a)  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ ,

b)  $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ ,

c)  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{6}$ .

50.2 ■ Rozložte funkci  $g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ 2\pi - x & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$  do Fourierova integrálu a ukažete, že získané výsledky jsou ve shodě s tím, co dostanete při integrování funkce z předchozí úlohy.

50.3 ■ Na základě výsledku předchozí úlohy ukažete, že

a)  $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$ ,

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2^4}{2^4 - 1} \left( 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) = \frac{\pi^4}{90}$ .

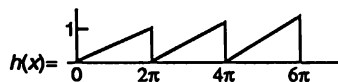
50.4 ■ V kapitole 45 jsme potřebovali vypočítat integrál  $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$ .

Nyní to můžeme provést tak, že vynásobíme čítele i jmenovatele  $e^{-x}$ , rozložíme integrovanou funkci do řady a integrujeme podle jednotlivých členů. Tak dostaneme

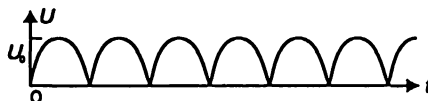
$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du \left[ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right] = 6 \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$$

Ověřte si to.

50.5 ■ Najděte Fourierův rozvoj pilové funkce, která popljuje průběh proudu, protékajícího v síti horizontálního vychylování elektronového paprsku oscilografu:



50.6 ■ Usměrňovač je zařízení, které přeměňuje sinusoidální vlnu, například vlnu napětí amplitudy  $U_0$ , v napětí následujícího průběhu:



- Vypočítejte střední hodnotu  $U(\eta)$  (říká se mu výstupní napětí).
- Najděte amplitudu druhé harmonické výstupního napětí.

50.7 ■ Z transformátoru snímáme výstupní napětí úměrné  $U_{vyst} = U_{vst} + \theta (U_{vst})^3$ . Vysvětlete, jaký bude vliv kubického členu jestliže

- vstupní napětí bude mít sinusoidální průběh;
- na vstup budou přicházet dvě nebo více sinusoidálních vln s různými frekvencemi.

# V51 Iny

## 51.1 KUŽELOVÉ VLNY

## 51.2 RÁZOVÉ VLNY

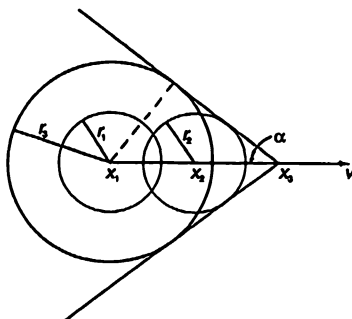
## 51.3 VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH

## 51.4 POVRCHOVÉ VLNY

### 51.1 KUŽELOVÉ VLNY

I když jsme už skončili kvantitativní analýzu vln, věnujeme tuto doplňkovou kapitolu kvalitativnímu posouzení některých jevů souvisejících s vlnami, které jsou příliš složité na to, abychom je mohli v těchto přednáškách podrobně prozkoumat.

Protože jsme už několik kapitol věnovali vlnám, bylo by přiměřenější nazvat tuto kapitolu kapitolou o „některých složitějších jevech souvisejících s vlnami“.



Obr. 51.1 Čelo rázové vlny vytváří kužel s vrcholem ve zdroji a s polovičním úhlem rozvěvení  $\alpha = \arcsin(v/c)$

Prvním předmětem našich úvah bude jev, který vzniká tehdy, když se zdroj vln pohybuje větší rychlostí, než je rychlost vlny nebo fázová rychlost. Uvažujme nejprve vlny jako zvuk nebo světlo, které mají určitou konstantní rychlost. Je-li rychlost pohybu zdroje zvuku větší než rychlost zvuku, nastává následující jev. Předpokládejme, že v daném okamžiku je zvuková vlna vybudena zdrojem v bodě  $x_1$  (viz obr. 51.1). Potom v dalším okamžiku, kdy se zdroj dostane do bodu  $x_2$ , se vlna rozšíří z bodu  $x_1$  na kulovou plochu poloměru  $r_1$ , který je menší než vzdálenost, jíž prošel zdroj. Z bodu  $x_2$  se ovšem začne šířit další vlna. Dostal-li se zvukový zdroj ještě dále, až do bodu  $x_3$ , a z tohoto bodu vychází další vlna, vlna z  $x_2$  se rozšířila na kulovou plochu poloměru

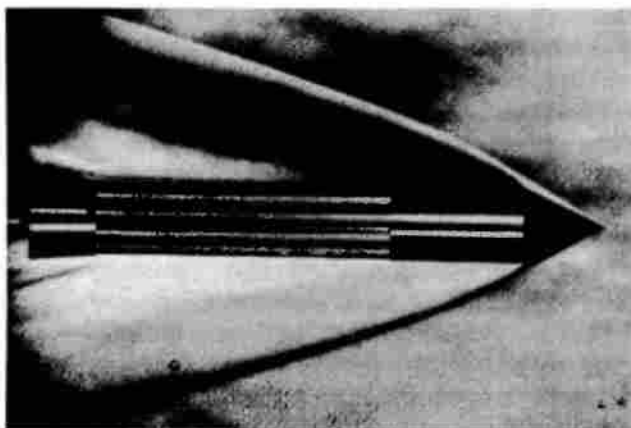


$r_2$  a vlna z  $x_1$  poloměru  $r_3$ . Děje se to samozřejmě spojitě, a ne skoky, a proto máme celou řadu takových kulových vlnoploch dotýkajících se pláště kužele s vrcholem v místě zdroje. Místo toho, aby zdroj vytvářel kulové vlny, jako v případě, kdyby se nepohyboval, vytváří pohybující se zdroj vlny, jejichž čelo je v trojrozměrném prostoru kužel a v dvojrozměrném prostoru dvojice přímek. Vrcholový úhel tohoto kužele lze snadno určit. V určitém časovém intervalu projde zdroj vzdálenost např.  $x_3 - x_1$ , která je úměrná rychlosti zdroje  $v$ . Zatím se čelo vlny dostalo do vzdálenosti  $r_3$ , která je úměrná rychlosti vlny  $c_v$ . Je jasné, že sinus polovičního úhlu rozvěvení kužele je roven poměru rychlosti vlny k rychlosti zdroje a to je možné jen tehdy, když je  $c_v$  menší než  $v$ , tedy když se předmět pohybuje rychleji než vlna. Proto

$$\sin \alpha = \frac{c_v}{v}. \quad (51.1)$$

I když jsme zdůraznili, že máme zdroj zvuku, ukazuje se – a to je velmi zajímavé – že předmět už tím, že se pohybuje rychlostí větší než je rychlost zvuku, vytváří zvuk. To znamená, že on sám nemusí kmitat. Jakýkoliv objekt pohybující se prostředím větší rychlostí než je rychlost, kterou se v tom prostředí šíří vlny, bude vytvářet automaticky vlny právě v důsledku svého rychlého pohybu. Tak je to v případě zvuku, ale stejný jev nastává i v případě světla. Na první pohled by se zdálo, že se nic nemůže pohybovat rychlostí větší než je rychlost světla. Jenže světlo má ve skle menší fázovou rychlost, než je rychlost světla ve vakuu a sklem můžeme propustit nabitou částici s velmi vysokou energií, takže rychlost částice bude blízká rychlosti světla ve vakuu, zatímco rychlost světla ve skle může být rovna jen 2/3 rychlosti světla ve vakuu. Částice pohybující se rychleji než světlo v daném prostředí vytvoří kuželovou světelnou vlnu s vrcholem ve zdroji, která se podobá vlně vznikající na vodě za lodí (jde vlastně o stejný jev). Změřením úhlu u vrcholu kužele můžeme určit rychlost částice. Takový postup se používá v praxi k měření rychlosti částic jako jedna z metod určování jejich energie ve vysokoenergetické oblasti. Jediné, co je třeba měřit, je směr šíření světla.

Tento jev se nazývá podle Čerenkova, který je poprvé pozoroval. Intenzitu tohoto záření teoreticky analyzovali Frank a Tamm. Za tento výzkum dostali ti tři vědci společně Nobelovu cenu za fyziku v roce 1958.

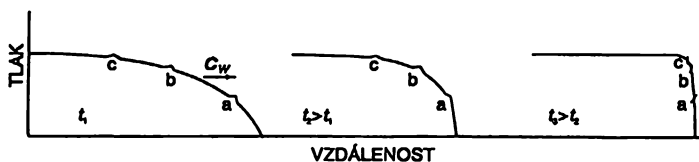


Obr. 51.2 Rázová vlna vyvolaná v plynu projektilem pohybujícím se rychleji než zvuk

Na *obrázku 51.2* můžete vidět, jaká je situace v případě zvuku. Je to fotografie předmětu pohybujícího se v plynu rychlostí, která je větší než rychlost zvuku. Změny tlaku způsobují změny indexu lomu, takže vhodnou optickou soustavou můžeme okraj vln zviditelnit. Tak vidíme, že předmět pohybující se rychlostí, která je větší než je rychlost zvuku, opravdu vytváří kuželovou vlnu. Podrobnější zkoumání nás přesvědčí o tom, že její povrch je vlastně zakřivený. V asymptotické oblasti není zakřivení, ale u vrcholu zakřivení existuje a my bychom si nyní měli promluvit o příčině tohoto zakřivení. To nás přivádí k druhému tématu této kapitoly.

## 51.2 RÁZOVÉ VLNY

Rychlost vlny často závisí na její amplitudě a v případě zvuku má tato závislost následující charakter. Předmět, který se pohybuje ve vzduchu, musí odstraňovat vzduch ze své dráhy, a tak vytváří poruchu ve formě určitého tlakového skoku. Tlak za čelem vlny je vyšší než tlak v neporušené oblasti, do níž se vlna pohybující se normální rychlostí ještě nedostala. Avšak vzduch, který zůstal za vlnou, byl adiabaticky stlačen, a proto jeho teplota bude vyšší. Rychlost zvuku však s teplotou roste, a proto je rychlost v oblasti za skokem větší než ve vzduchu před skokem. To znamená, že jakákoliv další porucha za tímto skokem, vyvolaná třeba stálým tlakem tělesa nebo jinak, se bude šířit rychleji než čelo vlny a s růstem tlaku tato rychlost poroste. *Obr. 51.3* charakterizuje takovou situaci a hrboly na křivce tlaku slouží větší názornosti. Je vidět, že původní zadní oblasti vyššího tlaku postupem času dohánějí čelo vlny, dokud tlaková vlna nevytvoří strmé čelo. Je-li síla vlny velmi velká, stane se to ihned; je-li malá, může to trvat dlouho. Ve skutečnosti se však může stát, že zvuk se rozšíří a zanikne dříve, než k takovému jevu dojde.



Obr. 51.3 „Momentky“ čela vlny v následujících časových okamžicích

Zvuky naší řeči jsou nesmírně slabé vzhledem k atmosferickému tlaku – je to asi jedna milióntina. Ale pro tlakové změny řádově jedné atmosféry vzroste rychlost vlny asi o dvacet procent a strmost čela vlny naroste úměrně rychleji. V přírodě se však nic neděje nekonečně rychle, a to, co nazýváme strmým čelem, má ve skutečnosti přece jen jakousi tloušťku, není to nekonečně strmé. Vzdálenost, na níž se čelo mění, je řádově rovna střední volné dráze, ale na takové vzdálenosti vlnová rovnice neplatí, neboť neuvažujeme strukturu plynu.

Podíváme-li se opět na *obrázek 51.2*, zjistíme, že zakřivení můžeme vysvětlit tím, že v blízkosti vrcholu jsou vyšší tlaky než ve větší vzdálenosti od něho, a proto je tam úhel  $\alpha$  větší. Zakřivení vzniklo v důsledku toho, že rychlost závisí na síle vlny. Proto se vlna pocházející od výbuchu atomové bomby šíří po určitou dobu mnohem větší rychlostí, než je rychlost zvuku, dokud při šíření natolik nezeslábně, že tlakový náraz je malý ve srovnání s atmosferickým tlakem. Rychlost tlakového nárazu se pak přiblíží rychlosti zvuku v plynu, v němž se šíří. (Ukazuje se, že rychlost rázové vlny je vždy vyšší než rychlost zvuku v plynu před ní, ale nižší než rychlost zvuku v plynu za ní. Impulzy přicházející zezadu dohánou čelo, ale čelo se noří do prostředí před sebou rychleji, než je normální rychlost šíření signálů v něm. Proto jen podle zvuku nemůžeme říci,

že přichází rázová vlna, dokud není příliš pozdě. Světlo výbuchu bomby přichází nejdříve, ale že přichází rázová vlna, nemůže nikdo říci, dokud vlna opravdu nedorazí, protože ji nepředchází žádný zvukový signál.)



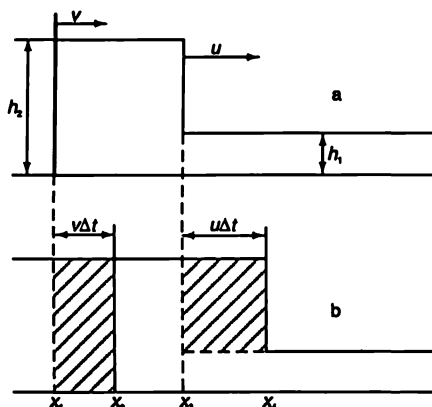
Obr. 51.4

Takové nahromadění vln je velmi zajímavý jev a jeho hlavní příčinou je to, že po příchodu jedné vlny musí rychlost po ní následující vlny vzrůstat. Uvedeme ještě jiný příklad téhož jevu. Představte si, že dlouhým kanálem konečné šířky a hloubky teče voda. Pohybuje-li se podél takového kanálu dostatečně rychle píšt nebo příčná stěna, dojde k takovému nakupení vody jako v případě sněhu před sněžným pluhem. Nechť tedy nastává taková situace, jakou zobrazuje obrázek 51.4, kdy se někde v kanálu objevuje náhlý skok vodní hladiny. Lze ukázat, že v kanálu se dlouhé vlny pohybují v hluboké vodě rychleji než v mělké. Proto každý nový náraz nebo nepravidelnost v přisunu energie od pístu postoupí dopředu a nahromadí se na čele. Teoreticky nakonec opět dostaneme vodu se strmým čelem. Obrázek 51.4 však ukazuje na některé komplikace. Znázorněná vlna prochází na obrázku kanálem tak, že píšt je kdesi daleko na levé straně. Zpočátku mohla situace připomínat dobře se chovající vlnu, ale na cestě podél kanálu se vlna stávala strmější a strmější, až došlo ke stavu znázorněnému na obrázku. Na hladině dochází k silnému víření vody a kapky vody padají dolů, ale podstatné je, že okraj vlny je velmi ostrý a před vlnou není voda porušena.

Ve skutečnosti je vlna na vodě mnohem složitější než zvuk. Pro ilustraci se však pokusíme analyzovat rychlost přílivové vlny v kanálu. Neděláme to proto, že by to pro nás mělo principiální význam – nepředstavuje to totiž velké zobecnění – děláme to jenom proto, abychom ukázali, že zákony mechaniky, které už známe, nám umožní tento jev vysvětlit.

Představte si, že voda vypadá tak, jak to znázorňuje obr. 51.5a na horní hladině ve výšce  $h_2$  se pohybuje rychlostí  $v$  a čelo se posouvá rychlostí  $u$  na neporušenou vodu, jejíž hladina je ve výšce  $h_1$ . Chceme určit rychlost, kterou postupuje čelo. Za dobu  $\Delta t$  se vertikální rovina, která byla původně v  $x_1$ , posune o vzdálenost  $v \Delta t$  do  $x_2$ , zatímco čelo vlny projde vzdálenost  $u \Delta t$ .

Nyní použijeme zákony zachování hmotnosti a hybnosti. Začneme prvním z nich. Je vidět, že na jednotku šířky kanálu je množství vody  $h_2 v \Delta t$ , které prošlo  $x_1$  (vyšrafovaná oblast), kompenzováno druhou vyšrafovanou oblastí, jež představuje množství  $(h_2 - h_1) u \Delta t$ . Dělíme-li veličinou  $\Delta t$ , dostaneme  $v h_2 = u (h_2 - h_1)$ . To nám ještě nestačí, protože i když známe  $h_2$  a  $h_1$ , neznáme ani  $u$ , ani  $v$  a obě tyto veličiny chceme najít.



Obr. 51.5 Dva průřezy vysokého přílivu v kanálu, kde *b* je obraz situace o  $\Delta t$  pozdější než *a*

Dalším krokem je použití zákona zachování hybnosti. Nezabývali jsme se ještě otázkou vodního tlaku a nemluvili jsme o hydrodynamice, ale je jasné, že tlak vody musí v dané hloubce právě stačit k udržení vodního sloupce nad touto hloubkou. Proto je tlak vody roven součinu hustoty vody  $\rho$ , gravitačního zrychlení  $g$  a hloubky pod povrchem. Protože tlak roste lineárně s hloubkou, střední tlak v rovině  $x_1$  je právě  $1/2 \rho g h_2$ . To je také střední síla na jednotku šířky a jednotku výšky tlačící rovinu směrem k  $x_2$ . Abychom dostali celkovou sílu působící na vodu zleva, musíme získaný výraz znovu násobit  $h_2$ . Na vodu však působí i tlak zprava a vyvolává sílu, která na uvažovanou oblast působí v opačném směru. Podobnou úvahou jako v předcházejícím případě můžeme vypočítat její velikost:  $1/2 \rho g h_1^2$ . Nyní musíme tyto síly porovnat s rychlostí změny hybnosti pohybu. Musíme zjistit, o kolik je větší hybnost odpovídající situaci (b) na obr. 51.5 proti hybnosti odpovídající situaci (a). Vidíme, že dodatečná hmotnost, která získala rychlost  $v$ , je rovna právě  $\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t$  (na jednotku šířky) a násobíme-li ji  $v$ , dostaneme dodatečnou hybnost, která musí být rovna impulzu  $F \Delta t$

$$(\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t) v = \left( \frac{1}{2} \rho g h_2^2 - \frac{1}{2} \rho g h_1^2 \right) \Delta t.$$

Dosažením už známého vztahu  $v h_2 = u (h_2 - h_1)$  vyloučíme z této rovnice  $v$ , a když ji ještě zjednodušíme, dostaneme nakonec:  $u^2 = g h_2 (h_1 + h_2) / 2 h_1$ .

Je-li rozdíl výšek velmi malý, takže  $h_1$  a  $h_2$  jsou téměř stejné, rychlost bude rovna  $\sqrt{gh}$ . Později uvidíme, že to platí jen tehdy, je-li vlnová délka vlny větší než hloubka kanálu.

Obdobně můžeme postupovat i v případě rázových vln, ale je třeba uvažovat zachování vnitřní energie, a ne entropie, protože rázová vlna představuje nevratný děj. Opravdu, kdybychom ověřovali platnost zákona zachování energie v případě přílivové vlny, zjistili bychom, že tento zákon není splněn. Jsou-li výškové rozdíly malé, je jeho narušení zanedbatelné, ale v případě velkých výškových rozdílů jsou značné energetické ztráty. Projevuje se to pádem vody a zpěněním znázorněným na obr. 51.4.

I v případě rázových vln se z hlediska adiabatických procesů také vyskytují ztráty energie. Energie zvukové vlny za čelem po průchodu vlny zahřívá plyn, což odpovídá zpěnění vody při přílivu. Ukazuje se, že v případě zvuku je třeba řešit tři rovnice, a jak jsme viděli, teplota za rázovou vlnou je jiná než teplota před ní.

Kdybychom se pokusili vytvořit převrácenou přílivovou vlnu, kdy  $h_2 < h_1$ , zjistili bychom, že energetické ztráty musí být záporné. Protože energie není odnikud k dispozici, takový typ přílivu se nemůže sám udržet; je nestabilní. Kdybychom začali tvořit vlnu takového typu, zploštila by se, protože závislost rychlosti na výšce, která vytvářela v předcházejícím případě strmé čelo, bude nyní právě opačná.

### 51.3 VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH

Dalším složitějším typem vln, o nichž budeme mluvit, jsou vlny v pevných látkách. Už jsme mluvili o zvukových vlnách v plynu a kapalině a tyto vlny mají analogii ve vlnách šířících se v pevných látkách. Při nárazu na pevné těleso dojde k jeho stlačení. Pevná látka se však tomuto stlačení brání a tak vznikne vlna podobná zvuku. V pevné látce však může existovat i takový druh vln, který neexistuje v tekutinách. Zdeformujeme-li pevné těleso tečnými silami, smykem, bude se snažit vrátit do původního stavu. Právě tím se liší podle definice pevná látka od kapaliny. Narušíme-li kapalinu (vnitřně), chvíli ji necháme, aby se uklidnila a pak na ni přestaneme působit, zůstane v nově nabytém stavu. Vezmeme-li pevné těleso a roztřeseme ho jako kus železa, začne se v něm šířit *příčná* vlna postupující tělesem podobně jako vlna stlačení. Rychlost příčné vlny je však vždy menší než rychlost podélné vlny – vlny stlačení. Příčné vlny se víc podobají, alespoň pokud jde o jejich polarizaci, světelným vlnám. Zvuk nemá žádnou polarizaci, je to prostě tlaková vlna. Světlo má charakteristickou orientaci kolmou ke směru šíření.

V pevné látce existují oba druhy vln. Je tam především vlna stlačení, analogická zvuku, která se šíří jednou rychlostí. Není-li pevná látka krystal, šíří se v ní charakteristickou rychlostí libovolným směrem polarizovaná příčná vlna. (Všechny pevné látky jsou krystalické, ale máme-li kousek skládající se z mikrokrytalů všech orientací, krystalová anizotropie se vykompenzuje.)

V souvislosti se zvukovou vlnou si můžeme položit zajímavou otázku: Co se stane, když budeme vlnovou délku v pevné látce stále zmenšovat? Kam až ji můžeme zkracovat? Je zajímavé, že nemůže být kratší než vzdálenost mezi atomy. Předpokládáme-li totiž existenci vlny, v níž jeden bod se pohybuje nahoru, druhý dolů atd., je nám jasné, že nejkratší možná vlnová délka je rovna vzdálenosti mezi atomy. Mody můžeme klasifikovat, a tak známe podélné a příčné mody, dlouhovlnné a krátkovlnné mody. Uvažujeme-li vlnové délky porovnatelné s meziatomovou vzdáleností, nejsou už rychlosti konstantní; vzniká disperzní jev, kdy rychlost závisí na vlnovém čísle. Ale nejvyšším modelem příčných vln bude nakonec ten, při němž se každý atom chová opačně než s ním bezprostředně sousedící atomy.

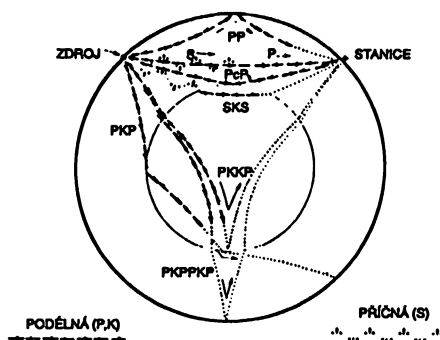
Z atomárního hlediska připomíná situace dvě vázaná kyvadla, o nichž jsme už mluvili a které mají dva typy modů; v jednom případě se pohybují souhlasně, v druhém se pohybují proti sobě. Kmity v pevných látkách můžeme tedy zkoumat i jinak, jako soustavu vázaných harmonických oscilátorů, jako ohromné množství vázaných kyvadel, přičemž nejvyšší harmonická odpovídá situaci, kdy kmitají proti sobě a nižší harmonické odpovídají jiným zřázováním.

Nejkratší vlnové délky jsou tak krátké, že nejsou obvykle technicky dosažitelné. Mají však velký význam, neboť v termodynamické teorii pevných látek můžeme analyzovat tepelné vlastnosti látek například jejich tepelné kapacity pomocí vlastností krátkých zvukových vln. Přechod k extrémně krátkým vlnovým délkám zvukových vln nezbytně vede k individuálním pohybům atomů; tyto dvě věci jsou v konečném důsledku totožné.

Velmi zajímavým příkladem zvukových vln v pevném tělese, podélných i příčných, jsou vlny, které se šíří uvnitř Země. Nevíme, kdo vytváří tyto zvuky, ale uvnitř Země se čas od času projeví zemětřesení – jedna hornina sklouzne po druhé. Je to jako slabý zvuk. Z takového zdroje se

potom začne šířit vlna podobná zvukové vlně. I když její vlnová délka je mnohem větší než vlnová délka obyčejného zvuku, jsou to přece jen zvukové vlny a šíří se Zemí. Země však není homogenní a tlak, hustota, stlačitelnost a jiné vlastnosti se mění s hloubkou, takže se mění s hloubkou i rychlost vlny. Vlny proto nepostupují přímo – vzniká jistý druh indexu lomu a vlny se šíří křivočaře. Podélné a příčné vlny mají jiné rychlosti a pro různé rychlosti máme různá řešené vlnové rovnice. Umístíme-li někde seizmograf a pozorujeme pohyb jehly po zemětřesení, které vzniklo na některém jiném místě, neuvidíme jen nepravidelné chvění. Můžeme registrovat kmitání a ustálení a další kmitání, a všechno, co se děje, závisí na poloze. Kdyby zemětřesení bylo velmi blízko, nejprve by dorazily podélné vlny a o chvíli později příčné, protože postupují pomaleji. Měřením časového rozdílu mezi těmito dvěma událostmi bychom zjistili vzdálenost ohniska zemětřesení, pokud bychom dost věděli o rychlostech těchto vln a skladbě vnitřních částí Země.

Na obrázku 51.6 je schematicky znázorněno chování vln uvnitř Země. Dva druhy vln jsou označeny různými symboly. Kdyby v místě označeném jako zdroj došlo k zemětřesení, příčné a podélné vlny, jdoucí k pozorovací stanici přímo, by dorazily v různých okamžicích a v důsledku odrazu na nespojitostech by se objevily i jiné než přímé dráhy, a tedy i jiné okamžiky příchodu vln. Ukazuje se, že v Zemi existuje jádro, které nevede příčné vlny. Je-li pozorovací stanice proti zdroji, dojdou k ní příčné vlny, ale nesprávně načasované. Dochází totiž k tomu, že když příčná vlna přichází na své cestě k jádru k šikmému povrchu mezi dvěma materiály, vznikají nové vlny: jedna příčná a jedna podélná. V zemském jádře se však příčná vlna nešíří (aspoň na to nemáme na rozdíl od podélných vln důkaz). Na druhé straně jádra podélná vlna opět vybudí vlny dvě a ty přicházejí k pozorovací stanici.

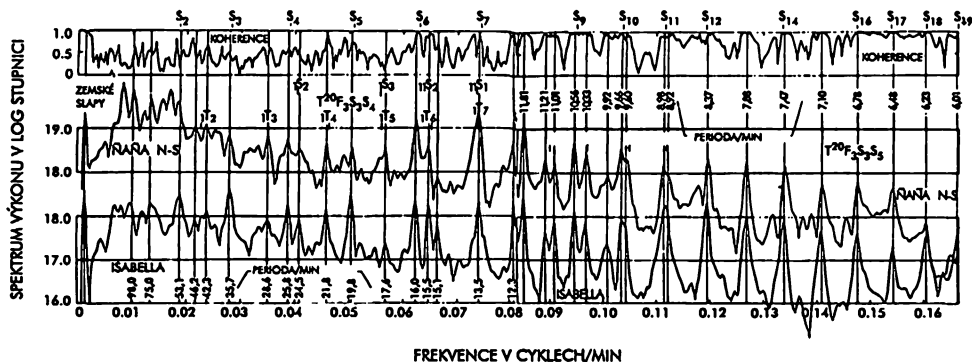


Obr. 51.6 Schématické znázornění Země, na kterém jsou vidět dráhy podélných a příčných zvukových vln

Právě z povahy vln vyvolaných zemětřesením se zjistilo, že příčné vlny se nemohou šířit v kulovém objemu ve středu Země. To znamená, že střed Země je kapalný v tom smyslu, že nevede příčné vlny. Jediným způsobem, kterým se dovídáme, co je uvnitř Země, je studium zemětřesení. Velkým počtem pozorování mnoha zemětřesení v různých pozorovacích stanicích byly zjištěny všechny podrobnosti – nyní už známe rychlosti vln, jejich dráhy, atd. Víme, jakými rychlostmi se šíří různé druhy vln v libovolné hloubce. Když už známe rychlost šíření zvukových vln, můžeme vypočítat, jaké jsou vibrační módy Země. Jinými slovy: známe elastické vlastnosti obou druhů vln v libovolné hloubce. Předpokládáme, že se Země zdeformovala do tvaru elipsoidu a v této podobě zůstala. Abychom určili periodu a tvar volného modu, stačí superponovat vlny šířící se elipsoidem. Už jsme zjistili, že v případě poruchy se objeví množství modů, od nejnižšího, který je elipsoidální k vyšším modům se složitější strukturou.

Zemětřesení v Chile v květnu 1960 vyvolalo tak silný „šum“, že jeho signály mnohokrát obešly Zemi. V této době už byly nainstalovány nové, velmi citlivé seizmografy, pomocí nichž bylo možno určit základní mody Země a porovnat je s hodnotami vypočítanými z teorie zvuku pomocí rychlostí změřených při jiných, nezávislých zemětřeseních. Výsledek takového experimentu je ilustrován na obr. 51.7 ve formě závislosti síly signálu na jeho frekvenci (Fourierova analýza). Na některých z přijímaných frekvencí jsou signály podstatně silnější, jsou tam určitá maxima. Ta odpovídají vlastním frekvencím Země, jsou to hlavní frekvence, na nichž Země může kmitat. Je-li celkový pohyb Země složen z modů mnoha frekvencí, můžeme pro každou stanicí očekávat, že nepravidelné výkyvy jsou superpozicí signálů mnoha frekvencí. Z jejich frekvenční analýzy bychom mohli určit charakteristické frekvence Země. Svislé plné čáry na obrázku jsou vypočtené frekvence a zjišťujeme pozoruhodnou shodu, která svědčí o tom, že teorie zvuku uvnitř Země platí.

Velmi zajímavou skutečnost odhaluje obrázek 51.8, na němž jsou znázorněny výsledky velmi přesného měření s lepším rozlišením nejnižšího – elipsoidálního modu Země. Všimněme si, že nejde o jednoduché, ale o zdvojené maximum, jehož vrcholy v 54,7 min. a 53,1 min. jsou trochu posunuty. Příčina těchto dvou různých frekvencí nebyla v době jejich měření známá, ale dnes už se na ni možná přišlo. Existují přinejmenším alespoň dvě možná vysvětlení. První z nich vychází z možné asymetrie v rozložení zemské hmoty a ta by způsobila existenci dvou podobných modů. Jiné, ještě zajímavější vysvětlení spočívá v následujícím. Představte si vlny, které postupují od zdroje kolem Země ve dvou směrech. Jejich rychlosti nebudou stejné, neboť v pohybových rovnicích figuruje otáčení Země, s nímž jsme dosud v analýzách nepočítali. Pohyb v rotující soustavě je modifikován Coriolisovou silou a to může způsobit pozorované rozštěpení.

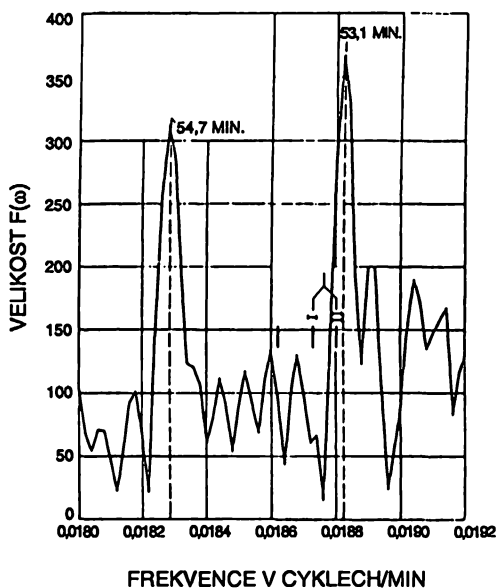


Obr. 51.7 Závislost výkonu na frekvenci zaznamenaná seizmografy v Nafta (Peru) a Isabella (Kalifornie). Koherence udává míru vazby mezi oběma stanicemi.

[Benioff, Press and Smith, J. Geoph. Research 66,605 (1961)]

Řekněme si ještě pár slov o metodě registrace takových otřesů. To, co zapisuje seizmograf, není závislost amplitudy na frekvenci, ale závislost posunutí na čase, což zanechává velmi nepravidelnou stopu. My, však už víme, co musíme udělat, abychom dostali podíl jednotlivých sinových vln pro všechny frekvence. Získaný údaj musíme násobit sinovou vlnou dané frekvence a integrovat, tj. vystředovat ji. Při tomto postupu ostatní frekvence vymizí. Na obrázcích jsou vlastně znázorněny křivky integrálů z údajů násobených sinovými vlnami s různým počtem period za minutu.

## VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH



Obr. 51.8 Analýza jednoho seizmografického záznamu s vysokým rozlišením ukazuje spektrální dublet.

### 51.4 POVRCHOVÉ VLNY

Dalším zajímavým typem vln jsou vlny na vodě, které každý z nás určitě viděl a které bývají často používány jako příklad vln v základních kursech. Jak brzy uvidíme, je to ten nejhorší příklad, neboť tyto vlny vůbec nepřipomínají zvuk nebo světlo a vyznačují se všemi komplikacemi, které vlny mohou mít. Uvažujme nejprve dlouhé vlny na hluboké vodě. Považujme-li oceán za nekonečně hluboký a na jeho povrchu vznikne rozruch, objeví se vlny. Vzniknou všechny druhy nepravidelných pohybů, ale sinusoidální pohyb s velmi malou výchylkou může připomínat obyčejné hladké mořské vlny postupující k pobřeží. V případě takových vln zůstává voda v průměru na místě a pohybuje se pouze vlna. Položme si otázku: Jde o příčný nebo o podélný pohyb? Nemůže to být ani příčný, ani podélný pohyb! I když v daném místě je voda střídavě v brázdě a na hřebenu, nemůže jít o jednoduchý pohyb nahoru a dolů v důsledku zákona zachování množství vody. Kam by se totiž poděla voda po klesání, když je nestlačitelná? Rychlost vln stlačení – tedy zvuku ve vodě – je mnohem, mnohem větší a nebudeme nyní o nich mluvit. Vodu budeme považovat za nestlačitelnou a proto při sestupování hřebene musí voda z této oblasti odcházet do stran. Ve skutečnosti dochází k tomu, že vodní částice se v blízkosti hladiny pohybují přibližně po kružnicích. Člověk vznášející se na gumovém kole by po přechodu hladkých vln zpozoroval kruhový pohyb okolních předmětů. Aby náš zmatek byl dokonalý, máme co činit se směsí příčných a podélných vln. Ve větších hloubkách probíhá pohyb po menších kružnicích a dostatečně hluboko už pohyb zaniká (obr. 51.9).

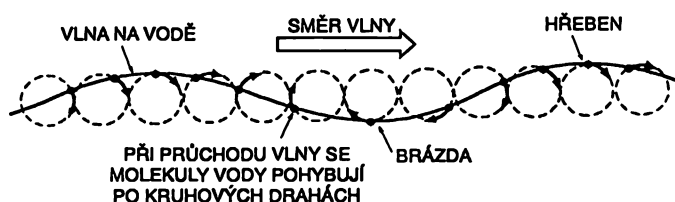
Bude velmi zajímavé najít rychlost takových vln. Musí to být nějaká kombinace hustoty vody, gravitačního zrychlení (gravitace je v tomto případě obnovující silou, která vytváří vlny) a možná vlnové délky a hloubky. Ať už bude vztah pro fázovou rychlost vln jakýkoliv, musí to být taková kombinace uvedených faktorů, která dá správný fyzikální rozměr. Budeme-li se o takovou



kombinaci pokoušet různými způsoby, jen jedním z nich bychom zkombinovali hustotu,  $g$  a  $\lambda$  tak, abychom dostali rychlost a to je právě veličina  $\sqrt{g\lambda}$ , která hustotu vůbec neobsahuje. Tento výraz pro fázovou rychlost není vlastně zcela správný ale úplná analýza dynamiky, kterou však nebudeme provádět, by nám poskytla vztah, který se od našeho liší o bezrozměrný koeficient  $\sqrt{2\pi}$ , takže

$$v_{\text{fáz}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (\text{pro gravitační vlny}).$$

Je zajímavé, že dlouhé vlny postupují rychleji než krátké. Vytvoří-li někde v dále sportovní motorový člun vlny, dorazí ke břehu nejprve vlny v podobě ojedinelých nárazů a pak budou tyto nárazy častější a rychlejší, neboť jako první dorazily dlouhé vlny. Postupem času přicházejí kratší a kratší vlny, neboť rychlost se chová jako druhá odmocnina z vlnové délky.



Obr. 51.9 Vlny na hluboké vodě vznikají při pohybu částic po kružnicích. Všimněte si systematického fázového posunu od jedné kružnice k druhé. Jak by se pohyboval plavající předmět?

Nyní možná namítnete, že k takovým úvahám potřebujeme znát *grupovou* rychlost. Budete mít samozřejmě pravdu. Vztah pro fázovou rychlost nám neřekne, co dorazí první; k tomu potřebujeme znát grupovou rychlost. Musíme tedy určit grupovou rychlost a snadno si vypočítáte, že je rovna polovině fázové rychlosti za předpokladu, že tato rychlost se chová jako druhá odmocnina z vlnové délky. Grupová rychlost se také chová jako odmocnina z vlnové délky. Jak je možné, že grupová rychlost je dvakrát menší než fázová rychlost? Všimněte si skupiny vln vytvářených člunem plujícím vedle. Budeme-li sledovat některý hřeben zjistíme, že se pohybuje ve skupině vln kupředu a postupně slabne až na čele úplně zanikne. V zadní části se nějak mysticky a tajuplně objevuje malá vlnka, dere se dopředu a postupně sílí. Krátce řečeno, ve skupině se pohybují vlny, ale samotná skupina vln se pohybuje jen poloviční rychlostí než je rychlost jednotlivých vln.

Protože grupová a fázová rychlost jsou rozdílné, nebudou vlny vytvářené pohybující se předmětem kuželové, ale budou mít podstatně zajímavější tvar. Jaký tvar to bude, je možné vidět z obrázku 51.10, který znázorňuje vlny vytvořené předmětem, pohybující se po vodě. Všimněte si, že vlny vypadají zcela jinak než v případě zvuku, kdy rychlost nezávisí na vlnové délce. Ve vzduchu byla čela vln jen podél kužele postupujícího do stran. Místo toho máme vlny vzadu, jejich čela postupují souběžně s pohybem člunu a kromě nich máme vlnky po stranách postupující pod jinými úhly. Tento složitý obrazec vln můžeme důvtipně analyzovat, jen když víme, že fázová rychlost je úměrná druhé odmocnině z vlnové délky. Celý vtíp spočívá v tom, že tento obrazec vln je stacionární vzhledem k člunu (pohybující se konstantní rychlostí). Jakýkoliv jiný obrazec vln při pohybu člunu zmizí.

Dosud jsme uvažovali dlouhé vlny, jejich obnovující silou byla gravitace. Jde-li však o velmi krátké vlny ve vodě, jejich hlavní příčinou bude kapilární přitahování, tj. energie povrchového napětí. Ukazuje se, že pro fázovou rychlost vln povrchového pláť vztah

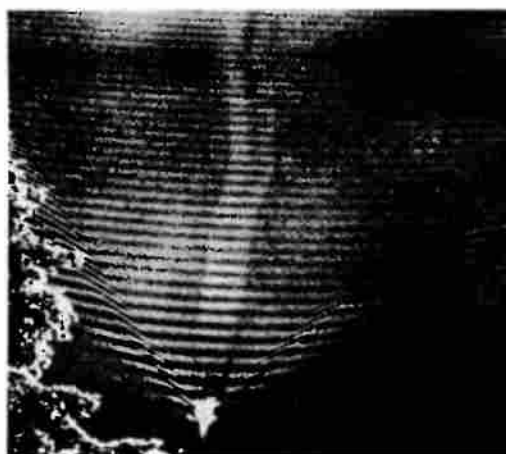
## VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH

$$v_{\text{fáz}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} \quad (\text{pro vlnky}),$$

v němž  $\sigma$  označuje povrchové napětí a  $\rho$  hustotu. Nyní máme opačnou situaci: je-li vlnová délka velmi malá, pak čím je vlnová délka kratší, tím je fázová rychlost *větší*. Máme-li i gravitaci, i kapilární působení – což je vlastně běžné – musíme je zkombinovat a dostaneme

$$v_{\text{fáz}} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k}},$$

kde  $k = 2\pi/\lambda$  je vlnové číslo. Je vidět, že rychlost vln na vodě je opravdu složitá věc.

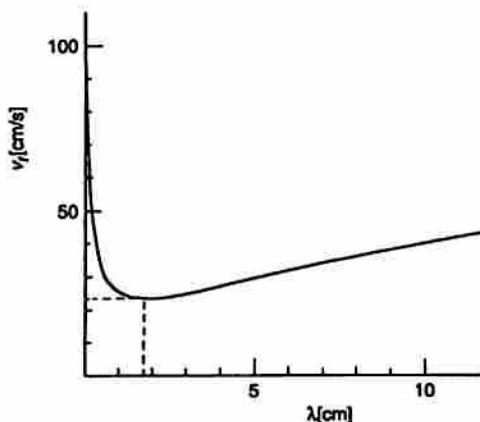


Obr. 51.10 Brázda za člunem

*Obrázek 51.11* představuje fázovou rychlost jako funkci vlnové délky; pro velmi krátké i velmi dlouhé vlny je velká a mezi těmito oblastmi existuje minimální rychlost šíření vln. Kdybychom vycházeli z tohoto vztahu, mohli bychom určit i grupovou rychlost; v případě vlnek je rovna  $3/2$  fázové rychlosti a v případě gravitačních vln  $1/2$  fázové rychlosti. Vlevo od minima je grupová rychlost větší než fázová, vpravo je tomu naopak. S těmito skutečnostmi souvisí několik zajímavých jevů. Protože grupová rychlost roste velmi rychle s poklesem vlnové délky, pak kdybychom vyvolali určitý rozruch, vznikly by vlny příslušné délky, šířící se minimální rychlostí a před nimi by postupovaly rychlejší krátké a velmi dlouhé vlny. Ve vodní nádrži snadno zpozorujete krátké vlny, ale jen těžko uvidíte dlouhé vlny.

Dozvěděli jsme se, že vlnky, které se tak často používají k ilustraci jednoduchých vln, jsou vlastně složité a velmi zajímavé. Vůbec nemají strmá čela jako zvukové a světelné vlny. Kromě hlavní vlny jsou zde vlnky, které vyběhají dopředu. Ostrý rozruch ve vodě nevyvolává ostrou vlnu právě v důsledku disperze. Nejprve přicházejí velmi drobné vlnky. Pohybuje-li se předmět ve vodě určitou rychlostí, vzniká složitý obrazec, neboť různé vlny se pohybují různými rychlostmi. Na tácku s vodou můžeme ukázat, že nejrychlejší jsou drobné kapilární vlny a vřadu postupují ty nejpomalejší. Nakloníme-li dno, zjistíme, že tam, kde je malá hloubka vody, je menší i rychlost vln. Postupuje-li vlna pod určitým úhlem vzhledem k přímce maximálního sklonu, ohýbá se

směrem k této přímce a má tendenci se pohybovat podél ní. Takovým způsobem se můžeme přesvědčit o mnoha zvláštěnostech vln na vodě a dojde k poznatku, že jsou mnohem složitější než vlny ve vzduchu.



Obr. 51.11 Závislost fázové rychlosti vln na vodě na vlnové délce

Rychlost dlouhých vodních vln s cirkulačním pohybem je menší při menší hloubce a větší při větší hloubce vody. Proto se vlna zpomalí, když se přiblíží k pobřeží, kde je mělčí voda. V hlubší vodě se vlna pohybuje rychleji, a proto se objeví mechanismus rázové vlny. Tentokrát, protože vlna není tak jednoduchá, rázová vlna je deformovaná a hřeben vlny se láme známým způsobem zobrazeným na *obrázku 51.12*. S takovou situací se setkáváme, když vlna dorazí ke břehu a podhání ohromnou složitost přírody. Dodnes se nikomu nepodařilo spočítat tvar vlny v okamžiku zlomu. Tvar vln se určí snadno, když jsou malé, ale když vzrostou a lámou se, je to velice složité.



Obr. 51.12 Vlna na vodě

Zajímavou vlastnost kapilárních vln můžeme pozorovat, je-li vodní hladina porušena pohybujícím se předmětem. Z hlediska samotného předmětu proudí voda kolem něho a vlny, které v konečném důsledku zůstanou s ním, jsou vždy ty, které mají právě takovou rychlost, aby se vzhledem k předmětu nepohybovaly. Podobně budou vlny v okolí nehybného předmětu

obtékaneho proudem vytvářet stacionární obrazec a budou to ty vlny, které mají stejnou rychlost jako obtékající voda. Je-li však grupová rychlost menší než fázová, porucha postupuje v proudu nazpět, protože grupová rychlost jí nestačí udržet v proudu. Je-li grupová rychlost větší než fázová, objeví se vlnový obrazec před předmětem. Když se pozorně zahledíme na předmět v proudu, zpozorujeme drobné vlnky před ním a dlouhé vzadu.

Jiný zajímavý jev podobného druhu je možno pozorovat při lití kapalin. Vyléváme-li například z láhve dostatečně rychle mléko, zpozorujeme veliké množství čar křižujících se ve vytékajícím proudu. Jsou to vlny vyvolané poruchou na okrajích a velice se podobají vlnám, pocházejícím od předmětu nacházejícího se v proudu. Teď však jev vzniká po obou stranách, a tak se tvoří křižující se čáry.

Seznámili jsme se s některými zajímavými vlastnostmi vln, s komplikacemi, které vznikají jako důsledek toho, že fázová rychlost závisí na vlnové délce, rychlost vln na hloubce vody atd., a které dělají přírodní jevy skutečně komplexními, a proto i zajímavými.

# Symetrie

## fyzikálních zákonů

---

- 52.1 SYMETRICKÉ OPERACE
- 52.2 SYMETRIE V PROSTORU A ČASE
- 52.3 SYMETRIE A ZÁKONY ZACHOVÁNÍ
- 52.4 ZRCADLOVÝ OBRAZ
- 52.5 POLÁRNÍ A AXIÁLNÍ VEKTORY
- 52.6 KTERÁ RUKA JE PRAVÁ?
- 52.7 PARITA SE NEZACHOVÁVÁ
- 52.8 ANTIHMOTA
- 52.9 PORUŠENÁ SYMETRIE

### 52.1 SYMETRICKÉ OPERACE

Předmětem této kapitoly bude to, co můžeme nazvat *symetrie fyzikálních zákonů*. O některých rysech symetrie fyzikálních zákonů jsme již mluvili v souvislosti s vektorovou analýzou (kapitola 16) a rotacemi (kapitola 20).

Proč nás symetrie tak zajímá? Především proto, že symetrie přímo fascinuje lidskou mysl a každý má rád předměty nebo obrazce, jež jsou určitým způsobem symetrické. Je zajímavé, že v předmětech okolního světa příroda často projevuje určité druhy symetrie. Snad nejsymetričtější objekt, jaký si umíme představit, je koule a příroda je jich plná – jsou to hvězdy, planety, vodní kapky v mračích. Krystaly, které najdeme v horninách, vykazují množství různých druhů symetrie a jejich studiem se dozvídáme mnoho zajímavého o struktuře pevných látek. Dokonce i zvířata a rostlinná říše vykazují určitý stupeň symetrie, i když symetrie květu nebo včelí plástve není tak dokonalá a nemá tak základní význam jako symetrie krystalu.

Mý se však nyní nebudeme zabývat tím, že v přírodě jsou *předměty* často symetrické. Budeme

se zabývat ještě pozoruhodnější symetrií Vesmíru – symetrií, která je v *samotných základních zákonech*, jimž podléhají procesy fyzikálního světa.

Položme si nejprve otázku: Co je to symetrie? Jak může být fyzikální zákon „symetrický“? Problém definování symetrie je zajímavý a už jsme uváděli velmi dobrou Weylovu definici, která v podstatě říká, že předmět je symetrický, když s ním můžeme něco udělat a i potom bude vypadat stejně jako předtím. Například symetrická je váza, kterou můžeme zobrazit v zrcadlo nebo potočit a bude vypadat stejně jako dříve. Nás bude zajímat, co můžeme udělat v experimentu s fyzikálním jevem nebo fyzikální situací, abychom dostali opět původní výsledek. Seznam známých operací, při nichž se nemění různé fyzikální jevy, najdete v *tabulce 52.1*.

Tabulka 52.1

Symetrické operace

<p>Translace v prostoru                  Translace v čase                  Rotace o pevný úhel                  Pohyb po přímce konstantní rychlostí (Lorentzova transformace)                  Inverze času                  Zrcadlové zobrazení                  Výměna stejných atomů nebo stejných částic                  Změna kvantověmechanické fáze                  Záměna hmoty antihmotou (nábojové sdružení)</p>
---

## 52.2 SYMETRIE V PROSTORU A ČASE

První věc, o kterou se například můžeme pokusit, je *posunutí* (translace) jevů v *prostoru*. Provádíme-li experiment na určitém místě a stejnou aparaturu pak postavíme na jiném místě prostoru (nebo tam přemístíme původní aparaturu), vše, co se stalo v určitém časovém sledu s první aparaturou, se stane i s druhou, pokud zabezpečíme na obou místech stejné podmínky. Přitom musíme dbát na to, abychom dodrželi již zmíněnou podmínku, že budou umístěny i všechny ty prvky okolí aparatury, jež by mohly způsobit její odlišné chování. O tom, co vše je třeba přemístit a co ne, jsme už mluvili a nebudeme to v podrobnostech opakovat.

Podobně jsme přesvědčeni, že *posunutí v čase* neovlivní fyzikální zákony. (Je třeba mít na zřeteli, že to, o čem mluvíme, se týká *současného stavu poznání*, a bude proto dobře, když si náš výrok doplníte tvrzením: *pokud je nám známo!*) Postavíme-li tedy nějakou aparaturu a spustíme ji v určitém okamžiku, např. ve čtvrtek v 10 hodin a pak postavíme stejnou aparaturu a spustíme ji za stejných podmínek např. o tři dny později, tyto aparatury budou vykonávat činnosti, které jsou stejnými funkcemi času bez ohledu na to, kdy začaly, pokud se podstatné vlastnosti okolí v obou případech stejně přizpůsobují času. Z hlediska této symetrie je stejnou událostí, zda jste si koupili akcie General Motors před třemi měsíci nebo dnes.

Musíme však uvážit i zeměpisné rozdíly, neboť některé charakteristiky se mění se změnou polohy na Zemi. Když například v určité oblasti měříme magnetické pole a aparaturu pak přemístíme do jiné oblasti, nemusí pracovat přesně stejně, neboť tam bude jiné magnetické pole, ale tato odchylka bude způsobena zemským magnetickým polem. Kdybychom si však představili, že jsme přemístili aparaturu spolu se Zemí, rozdíl se v činnosti aparatury neprojeví.

Další věc, kterou jsme už podrobně prozkoumali, je rotace v prostoru. Otočíme-li aparaturu o nějaký úhel, bude pracovat nezměněn za předpokladu, že jsme spolu s aparaturou otočili vše, co je v této situaci podstatné. Problém symetrie při otáčení v prostoru jsme podrobně studovali v 11. kapitole a tam jsme zavedli *vektorovou analýzu* – matematický aparát umožňující velmi elegantní způsob popisu rotační symetrie.

Na pokročilejším stupni se setkáváme s dalším druhem symetrie – se symetrií při rovnoměrném přímočarém pohybu. Je to vlastně pozoruhodný jev, že umístěním naší aparatury do rovnoměrně a přímočaře se pohybujícího vozidla (spolu se vším, co je pro práci aparatury podstatné) se nezmění chod aparatury. Jevy ve vozidle probíhají stejně, jako když vozidlo stálo, tj. všechny fyzikální zákony vypadají stejně. Už víme i to, jak se tato symetrie vyjádří matematicky: matematické rovnice fyzikálních zákonů se nesmí měnit při *Lorentzově transformaci*. Bylo to vlastně studium problémů teorie relativity, které soustředilo zájem fyziků na symetrii fyzikálních zákonů.

Uvedené symetrie měly geometrickou povahu, přičemž čas a prostor měly přibližně stejnou úlohu. Existují však i jiné druhy symetrií. Příkladem jiného druhu symetrie je symetrie vystihující skutečnost, že jeden atom můžeme nahradit jiným atomem stejného druhu. Jinak řečeno, *existují stejné atomy*. Můžeme najít takové skupiny atomů, v nichž vzájemná záměna dvou libovolných atomů nezpůsobí žádnou změnu – atomy jsou identické. Vše, co může udělat jeden atom kyslíku určitého druhu, může udělat i jiný atom kyslíku stejného druhu. Můžete namítnout: „To je směšné, to je prostě *definice* stejného druhu atomů.“

Mohla by to být pouhá definice, ale pak bychom stále ještě nevěděli, zda vůbec *existují* atomy „stejného druhu“. *Skutečností* však je, že existuje ohromné množství atomů stejného druhu. Takže tvrzení, že nezáleží na tom, zda nahradíme jeden atom jiným atomem stejného druhu, skutečně něco znamená. Takzvané elementární částice, z nichž se skládají atomy, jsou také identickými částicemi v uvedeném smyslu – všechny elektrony jsou stejné, všechny protony jsou stejné, všechny kladné piony jsou stejné atd.

Když jsme vyjmenovali tolik věcí, které můžeme dělat, aniž by se změnily fyzikální jevy, zdálo by se, že můžeme dělat prakticky všechno. Abychom ukázali, že to není pravda, všimněme si několika příkladů. Ptejme se: „Jsou fyzikální zákony symetrické vzhledem ke změně měřítka?“ Předpokládejme, že jsme postavili určitý přístroj a také jiný přístroj, který má každou součástku pětkrát větší, a jsme zvědaví, zda tyto přístroje budou pracovat stejně. *Ne*, nebudou! Například vlnová délka světla emitovaného atomy sodíku nacházejícího se uvnitř jedné nádoby a vlnová délka světla emitovaného plynem sodíkových atomů v pětkrát větší nádobě budou stejné a nebudou v poměru jedna ku pěti. Poměr vlnové délky k velikosti zářiče se změní.

Vezměme jiný příklad: každou chvíli vidáme v novinách obrázky modelů velkých katedrál ze zápalek – jsou to úžasná umělecká díla vytvořená obvykle penzisty, kteří mají čas a trpělivost k takové práci. Tato díla jsou ještě pečlivěji provedena a jsou úžasnější než skutečné katedrály. A nyní si představte, že tato dřevěná katedrála, by byla postavena ve skutečném měřítku katedrály. Jistě víte, co by se stalo; zřítíla by se, protože zvětšené zápalky by nebyly dost silné. Někdo z vás by však mohl namítnout, že v souladu se zvětšením měřítka by bylo třeba změnit i vnější vlivy. Máme na mysli schopnost předmětu odolávat gravitaci. Nejprve bychom tedy měli vzít model katedrály ze skutečných zápalek a skutečnou Zemi (v tom případě je katedrála stabilní) a pak vzít větší katedrálu a větší Zemi. To by však bylo ještě horší, neboť gravitace by ještě vzrostla!

Dnes už víme, že závislost jevů na rozměrech je dána atomovým složením látky a kdyby se nám podařilo sestavit tak malé zařízení, které by se skládalo jen z pěti atomů, nemohli bychom ho už libovolně zvětšovat nebo zmenšovat. Rozměr jednotlivého atomu není vůbec libovolný, je dán.

Skutečnost, že fyzikální zákony nejsou neměnné při změně měřítka objevil Galileo. Uvědomil si, že pevnost materiálů není přesně úměrná jejich velikosti, a to, co jsme říkali v souvislosti s modelem katedrály, ilustroval na příkladu dvou kostí. Nakreslil obyčejnou kost psa v takovém rozměru, jaký je potřebný k udržení jeho váhy, a potom nakreslil takovou myšlenou kost, která by udržela „superpsa“ deset nebo stokrát většího. Ta druhá kost byla velká a pevná a měla jiný poměr rozměrů než první kost. Nevíme, zda Galileo dospěl až k takovému závěru, že přírodní zákony musí mít určité měřítka. Víme však, že musel být ohromen tímto objevem a považoval ho za tak důležitý jako pohybové zákony, neboť je uveřejnil ve stejném díle nazvaném „O dvou nových vědách“.

Uveďme další známý příklad nesymetrie zákonů. V soustavě rotující konstantní úhlovou rychlostí budou fyzikální zákony vypadat zcela jinak než v soustavě, která se neotáčí. Kdybychom provedli nějaký experiment a pak celé zařízení bychom umístili do kosmické lodi rotující v meziplanetárním prostoru konstantní úhlovou rychlostí, zařízení by pracovalo jinak. Víme totiž, že v takovém případě budou předměty uvnitř lodi vrhány ven, bude působit odstředivá síla, Coriolisova síla atd. Vždyť o tom, že Země rotuje, se můžeme přesvědčit pomocí Foucaultova kyvadla aniž bychom se dívali na hvězdy.

Ještě se zmíníme o velmi zajímavé symetrii, která je zřejmě falešná, a tou je inverze času. Fyzikální zákony nemohou být zjevně obráceny v čase, neboť víme, že všechny jevy jsou ve velkém měřítku (tj. v našich běžných rozměrech) nevratné. Říká se: „Ruka píše, a když napsala, přemísťuje se dál.“ Pokud víme, tuto nevratnost způsobuje ohromné množství částic zúčastňujících se fyzikálních jevů, ale kdybychom rozlišili jednotlivé molekuly, nemohli bychom říci, zda mechanismus pracuje tím nebo opačným směrem. Vysvětlíme to podrobněji. Mějme drobné zařízení, o němž víme, jak pracují jednotlivé atomy, protože můžeme pozorovat jejich pohyby. Sestrojíme stejné zařízení, které se začne pohybovat tak, že počáteční rychlosti v novém zařízení budou rovny konečným rychlostem ve starém zařízení vzatým s opačnými znaménky: ( $v$  (začátek v novém) =  $-v$  (konec ve starém)). *Toto zařízení bude konat stejné pohyby, ale přesně v opačném směru.* Jinak řečeno, kdybychom tedy nafilmovali se všemi podrobnostmi vnitřní pohyby v nějakém kusu materiálu a promítli ji na plátno v obráceném sledu, žádný z fyziků by nemohl říci: „To je proti fyzikálním zákonům, ten děj neprobíhá správně!“ Pokud nevidíme všechny podrobnosti, situace je zcela jiná. Vidíme-li, jak se vejce rozbilo na chodníku, rozbila se skořápka a vnitřek vytekl, určitě řekneme: „Tento děj je nevratný, neboť při opačném chodu filmu by se žlutek a bílek spojily, skořápka scelila, a to všechno by bylo absurdní!“ Hledíme-li však jen na jednotlivé atomy, zákony vypadají vratně. Odhalit tuto symetrii nebylo snadné, ale faktem je, že základní fyzikální zákony jsou na mikroskopické úrovni zcela vratné v čase!

## 52.3 SYMETRIE A ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

Už i na této úrovni jsou různé druhy symetrie fyzikálních zákonů velmi zajímavé, avšak později v kvantové mechanice uvidíme, jak jsou vzrušující. Ve výkladu jsme ještě nepokročili dost daleko, abych vám mohl říci, proč většina fyziků stále považuje za udivující a krásnou skutečnost, že v kvantové mechanice *každému z pravidel symetrie odpovídá určitý zákon zachování*. Existuje zcela určitá souvislost mezi zákony zachování a symetrií fyzikálních zákonů. My to nyní můžeme konstatovat, aniž bychom se to pokusili vysvětlit.

Ukazuje se například, že zákony symetrie pro translaci v prostoru vedou spolu s principy kvantové mechaniky k *zachování hybnosti*.



Zákony symetrie pro časovou translaci vedou v kvantové mechanice k *zachování energie*.

Invariantnost vůči rotaci o pevný úhel v prostoru odpovídá *zachování momentu hybnosti*. Tyto vztahy jsou skutečně velmi zajímavé a patří k těm nejkrásnějším a nehlubším myšlenkám ve fyzice.

V kvantové mechanice existují i takové symetrie, které nemají klasický analog a nemůžeme je popsat metodami klasické fyziky. Jedna z nich spočívá v následujícím: Představuje-li  $\psi$  amplitudu nějakého procesu, pak druhá mocnina absolutní hodnoty  $\psi$  představuje pravděpodobnost, že takový proces se uskuteční. Kdyby někdo jiný počítal ne s veličinou  $\psi$ , ale s veličinou  $\psi'$ , která se od  $\psi$  liší jen ve fázi (je-li  $\Delta$  je nějaká konstanta a  $\psi'$  se od  $\psi$  liší faktorem  $e^{i\Delta}$ ), dostal by pro druhou mocninu absolutní hodnoty  $\psi'$  (to je pravděpodobnost události) stejnou hodnotu jako pro druhou mocninu absolutní hodnoty  $\psi$

$$\psi' = \psi e^{i\Delta}; |\psi'|^2 = |\psi|^2. \quad (52.1)$$

Fyzikální zákony se tedy nezmění, posune-li se fáze vlnové funkce o libovolnou konstantu. To je další druh symetrie. Fyzikální zákony musí mít takovou povahu, že se na nich posun kvantověmechanické fáze neprojeví. Jak už jsme uvedli, v kvantové mechanice odpovídá každé symetrii určitý zákon zachování. Zdá se, že *zákon zachování elektrického náboje* je zákonem zachování souvisejícím s kvantověmechanickou fází. To je další velmi významný poznatek!

## 52.4 ZRCADLOVÝ ODRAZ

Dalším problémem, kterým se budeme zabývat téměř v celém zbytku této kapitoly, je problém symetrie při zrcadlovém *odrazu v prostoru*. Mohli bychom se zeptat: Jsou fyzikální zákony symetrické vzhledem k odrazu? Tuto otázku bychom mohli formulovat i takto: Předpokládejme, že jsme sestrojili nějaké zařízení, například hodiny, a ty mají mnoho koleček, ručiček, číslic i pružinu, tikají a pracují. Podívejme se na tyto hodiny v zrcadle. Nezájímá nás jejich *vzhled* v zrcadle. *Sestrojíme* ale jiné hodiny, které jsou navlas stejné jako vypadají první hodiny v zrcadle – všude tam, kde byl šroubek s pravotočivým závitem, bude nyní šroubek s levotočivým závitem; kde byl znak „2“, bude nyní znak „S“; kde byla doleva stočená pružina, bude doprava stočená pružina. Když to všechno uskutečníme, budeme mít dvoje hodiny, oboje fyzikální a přitom budou v takovém vztahu jako předmět a jeho zrcadlový obraz, jenže nyní to budou dva skutečné, materiální předměty. Ptáme se: Začnou-li tyto hodiny jít za stejných podmínek, jejich pružiny budou stejně natažené, půjdou hodiny vždy jako zrcadlové obrazy? (Je to fyzikální, ne filozofická otázka.) Na tuto otázku nám naše fyzikální intuice odpovídá kladně, tyto hodiny by *měly tak jít*.

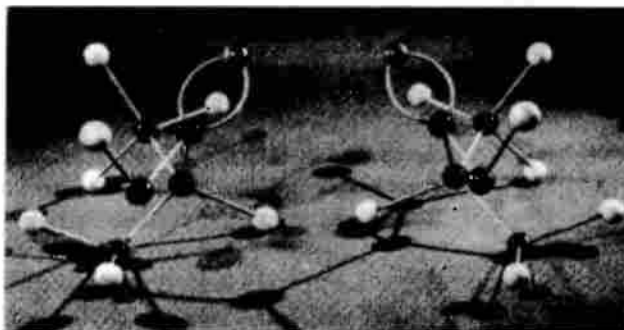
Máme podezření, že aspoň v případě těchto hodin je zrcadlení jednou ze symetrií fyzikálních zákonů, tedy když vše změním z „levého“ na „pravé“ a vše ostatní necháme nezměněné, nezjistíme rozdíl. Na chvíli předpokládejme, že je to skutečně pravda. Je-li to pravda, bude nemožné rozlišit „pravé“ od „levého“ pomocí nějakého fyzikálního jevu právě tak, jako je například nemožné určit pomocí fyzikálního jevu absolutní rychlost. Pomocí fyzikálních experimentů by tedy nebylo možné absolutně určit, co je třeba rozumět „pravým“ v opaku k „levému“, neboť fyzikální zákony by byly symetrické.

Svět samozřejmě *nemusí* být symetrický. V zeměpisu například pojem „pravý“ můžeme zavést. Například, stojíme-li v New Orleansu a díváme se směrem k Chicagu, je Florida vpravo (stojíme-li nohama na zemi!). „Pravé“ a „levé“ tedy můžeme definovat pomocí zeměpisu. Je jen samozřejmé, že v libovolném systému nemusí mít skutečná situace tu symetrii, o níž mluvíme; jde však

o to, zda jsou symetrické *zákony*. Jinak řečeno, zda by bylo *proti fyzikálním zákonům*, kdyby existovala taková koule jako Země s „levostranným povrchem“ a s lidmi, kteří by se nám podobali, ale při pohledu z města New Orleans na město jako Chicago by viděli Floridu na opačné straně. To se vůbec nezdá být nemožné; záměna všeho levého na pravé není v rozporu s fyzikálními zákony.

Dále musíme žádat, aby naše definice „pravého“ nezávisela na historii. Snadno byste rozlišili pravé od levého, kdybyste si v železářství koupili náhodně vybraný šroubek. Tento šroubek bude mít pravotočivý závit – není to sice úplně jisté, ale je to velmi pravděpodobné. Příčina je v historii, v zavedené konvenci, ale ne v základních zákonech. Kdokoliv totiž mohl začít vyrábět šroubky s levotočivým závitem!

Musíme proto hledat takový jev, v kterém by „pravé“ vystupovalo principiálně. Další možnost, o níž budeme mluvit, spočívá ve skutečnosti, že polarizované světlo stáčí rovinu polarizace například při průchodu roztokem cukru. V kapitole 33. jsme už poznali, že rovina polarizace se stáčí v určitém cukrovém roztoku doprava... Tak máme způsob, jak definovat pravou stranu, protože nám stačí rozpustit cukr ve vodě a směr stáčení polarizační roviny nám určí pravou stranu. Ale cukr pochází ze živých organismů a kdybychom ho vyrobili uměle, zjistili bychom, že *nestáčí* rovinu polarizace! Kdybychom do uměle vyrobeného a polarizační rovinu nestáčejšího cukru nasadili bakterie (které se živí cukrem) a pak bakterie odfiltrovali, zjistili bychom, že zůstala část cukru (téměř polovina původního množství), a tento cukr stáčí rovinu polarizace na *opačnou stranu*! I když to vypadá zamotaně, lze to snadno vysvětlit.



Obr. 52.1 Modely alaninové molekuly. Vlevo: *L*-alanin, vpravo: *D*-alanin

Všimněme si jiného příkladu: Jednou z látek společných všem živým organismům a nezbytných pro život je bílkovina. Bílkoviny se skládají z aminokyselinových řetězců. Na *obrázku 52.1* je vidět model aminokyseliny, kterou můžeme získat z bílkoviny. Tato aminokyselina se nazývá alanin a její molekulární uspořádání ukazuje *obr. 52.1a*, pochází-li z bílkoviny živého organismu. Na druhé straně, kdybychom vyrobili alanin z oxidu uhličitého, etanu a čpavku (a to umíme, neboť nejde o složitou molekulu), zjistili bychom, že vznikají stejná množství zmíněných molekul a molekul znázorněných na *obr. 52.1b*. První molekula, ta která vzniká v živých organismech, se nazývá *L-alanin*. Druhá molekula, nazývaná *D-alanin*, která je chemicky stejná v tom smyslu, že má stejné druhy a stejné vazby atomů, je „pravostrannou“ molekulou ve srovnání s „levostranným“ *L-alaninem*. Je zajímavé, že při laboratorní výrobě alaninu z jednoduchých plynů dostáváme ve směsi stejná množství obou druhů. Živé organismy však používají jen *L-alanin*. (Není to úplně pravda. Občas živé organismy používají ke speciálním účelům i *D-alanin*. Děje se to však velmi řídce a bílkoviny používají výlučně *L-alanin*.) Vyrobíme-li oba druhy alaninu a touto směsí krmíme nějaké organismy, které „jedí“ nebo vylučují alanin, spotřebují *L-alanin*, neboť *D-*

alanin je pro ně nepoužitelný. Stane se tedy to, co se stalo v případě cukru, kdy bakterie „snědly“ jim vyhovující cukr a „špatný“ cukr nechaly! (Levotočivý cukr má sladkou chuť, ale jinou než pravotočivý cukr.)

Vypadá to tak, jakoby životní procesy dovolovaly rozlišit „pravé“ od „levého“, neboť takové dvě molekuly jsou chemicky jiné. Jenže ve skutečnosti tomu tak není! Můžeme-li provést fyzikální měření takových veličin jako je energie, rychlost chemické reakce atd., dávají obě molekuly stejné výsledky, pokud bylo i vše ostatní zrcadlově převráceno. Jsou-li molekuly ve stejném množství rozpouštědla, jedny stáčí světlo napravo a druhé stejnou mírou nalevo. Z fyzikálního hlediska stejně dobře vyhoví kterákoliv z těchto aminokyselin. Naše současné chápání problému je takové, že už v samotné Schrödingerově rovnici je zakotveno, že tyto dvě molekuly se budou chovat stejně až na to, že jedna se bude orientovat napravo a druhá nalevo. V životě se však setkáme jen s jednou orientací.

Předpokládá se, že příčina takové situace spočívá v následujícím. Představte si, že v určitém okamžiku vznikly takové podmínky pro život, že všechny bílkoviny v určitých organizmech obsahovaly levotočivé aminokyseliny. Když se trávicí enzymy pokoušely změnit chemické látky v potravě z jednoho druhu na druhý druh, jedna látka se enzymu hodila, ale druhá ne. Bylo to jako s Popelčíným střevíčkem, až na to, že v našem případě jde o levou nožku, na níž zkoušíme střevíček. Pokud víme, bylo by možné aspoň v principu vytvořit např. žábu, která by měla všechny molekuly převrácené. Byla by jako levostranný zrcadlový obraz skutečné žáby. Kdybychom měli takovou levostrannou žábu, bylo by vše v pořádku až na to, že by nenašla nic k jídlu. Kdyby spolkla mouchu, její enzymy by ji nemohly ztrávit. Moucha má totiž nevhodný druh aminokyselin (pokud bychom žábě nenabídlí levostrannou mouchu). Vypadá to tedy tak, že kdyby bylo vše zrcadlově převráceno, pokračovaly by chemické a životní procesy stejným způsobem.

Je-li život čistě fyzikální a chemický jev, pak skutečnost, že všechny bílkoviny jsou stočeny jedním směrem, lze pochopit jen tak, že na samém počátku náhodně zvítězil určitý druh molekul. Kdysi se jednou jedna organická molekula určitým způsobem zkroutila a tato událost způsobila, že se právě rozrostlo v našem živém světě. Určitá historická událost byla jednostranná a od té doby je vše živé jednostranné. Když se dospělo do dnešního stavu, bude to už tak stále pokračovat – všechny enzymy tráví a produkují jen pravotočivé látky. Dostanou-li se oxid uhličitý, vodní páry a jiné látky do listů rostlin, enzymy produkující cukr z nich vyrobí pravostranné látky, neboť i tyto enzymy jsou pravostranné. Kdyby vznikl nový druh viru nebo nějaký živý organizmus, přežil by jen tehdy, kdyby dokázal „jíst“ ten druh živé hmoty, který už existuje. Musel by tedy být stejného druhu.

Počet pravotočivých molekul se nezachovává. Tento počet může stále narůstat. Usuzujeme tedy, že životní jevy nemluví o tom, že by fyzikálními zákony chyběla určitá symetrie, ale o tom, že všechny živé organizmy na Zemi měly společný prapůvodní počátek v uvedeném smyslu.

## 52.5 POLÁRNÍ A AXIÁLNÍ VEKTORY

Budeme pokračovat. Ve fyzice je mnoho případů, kdy se využívají pravidla „pravé“ a „levé“ ruky. Když jsme mluvili o vektorové analýze, uváděli jsme pravidlo pravé ruky, pomocí něhož se určuje správný směr momentu hybnosti, momentu síly, magnetického pole atd. Síla působící na náboj pohybující se v magnetickém poli je například rovna  $F = q v \times B$ . Není tato rovnice postačující k tomu, abychom v dané situaci, když známe  $F$ ,  $v$  a  $B$ , definovali pravou stranu? Vráťme-li se nazpět a uvědomíme si, jak byly vektory zavedeny, víme, že „pravidlo pravé ruky“ bylo pouhou dohodou, jen jakýmsi trikem. Původní veličiny jako moment hybnosti, úhlová

rychlost a ostatní podobné veličiny nebyly vůbec vektory! Všechny jsou nějakým způsobem spojeny s určitou rovinou a jen proto, že náš prostor je trojrozměrný, můžeme tyto veličiny vázat na směr kolmý k této rovině. Ze dvou možných směrů jsme si zvolili „pravý“.

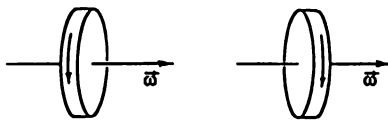
Jsou-li fyzikální zákony symetrické, nic by se nezměnilo, kdyby se do každé fyzikální laboratoře vkradl jakýsi démon a v každé knize, kde vystupuje „pravidlo pravé ruky“, nahradil slovo „pravý“ slovem „levý“, takže by všude bylo „pravidlo levé ruky“.

Ukažme to na příkladu. Existují dva druhy vektorů. Existují „správné“ vektory, tak jako je například posunutí  $\Delta r$  v prostoru. Máme-li v našem zařízení něco tady a něco jiného tam, budou tyto věci i v zrcadlovém zařízení, a spojíme-li původní dvě věci vektorem a podobně i zrcadlové vektorem, bude jeden vektor zrcadlovým obrazem druhého (obr. 52.2). Vektor podobně jako celý prostor, se převrací a takový vektor nazýváme *polární vektor*.



Obr. 52.2 Posunutí v prostoru a jeho zrcadlový obraz

S jiným druhem vektorů se setkáváme při otáčení. Představte si, že v trojrozměrném prostoru rotuje něco tak, jak to znázorňuje obrázek 52.3. Na obrázku je zakreslena i rotace, kterou vidíme při pohledu do zrcadla; je to zrcadlový obraz původní rotace. Dohodneme se, že zrcadlovou rotaci popíšeme pomocí stejného pravidla jako původní rotaci; tak dostaneme „vektor“, který na rozdíl od polárního vektoru při odrazu nemění směr a vzhledem k polárním vektorům a geometrii prostoru je obrácený. Takový vektor nazýváme *axiální vektor*.

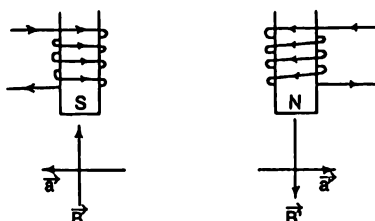


Obr. 52.3 Rotující kolo a jeho zrcadlový obraz. Všimněte si, že směr „vektoru“ úhlové rychlosti se nezměnil.

Platí-li ve fyzice zákon symetrie při odrazu, musí být rovnice sestaveny tak, že při záměně znaménka každého axiálního vektoru a každého vektorového součinu, jak to odpovídá zrcadlovému odrazu, se nic nestane. Například, zapíšeme-li vztah pro moment hybnosti  $L = r \times p$ , bude vše v pořádku, neboť při přechodu k levé souřadnicové soustavě se změní znaménko  $L$ , ale  $p$  a  $r$  se nezmění. Znaménko vektorového součinu se musí změnit, musíme přejít od pravidla pravé ruky k pravidlu levé ruky. Uvedme další příklad. Víme, že pro sílu působící na náboj pohybující se v magnetickém poli platí vztah  $F = q v \times B$  a vektory  $F$  a  $v$  jsou polární. Přejdeme-li od pravé soustavy k levé, musí se změna znaménka vektorového součinu kompenzovat změnou znaménka  $B$ , tedy  $B$  musí být axiální vektor. Jinak řečeno při takovém zrcadlení musí  $B$  přejít na  $-B$ . Změníme-li tedy souřadnice z pravých na levé, musíme změnit severní pól magnetu na jižní.

Na příkladu si všimněme, jak se to stane. Mějme dva takové magnety jako na obr. 52.4. První magnet má cívku navinutou určitým způsobem a teče jí proud určitým směrem. Druhý magnet je jako zrcadlový obraz prvního – cívku má navinutou opačně než první magnet a vše v ní probíhá opačně než v cívkce prvního magnetu; směr proudu je zakreslen na obrázku. Směr magnetického pole můžeme určit ze zákonů magnetizmu, které jsme se v tomto kurzu ještě

neučili, ale které už znáte ze střední školy. Tento směr je v obou případech znázorněn na obrázku. V jednom případě jde o jižní magnetický pól, zatímco v druhém magnetu teče proud opačně a magnetické pole je obrácené – jde o severní magnetický pól. Je tedy vidět, že při přechodu od pravé soustavy k levé se musí změnit sever na jih!



Obr. 52.4 Magnet a jeho zrcadlový obraz

Záměna severu jihem ještě mnoho neřká, neboť tyto pojmy jsou dány dohodou. Musíme si proto všimnout samotného *jevu*. Předpokládejme, že v jednom poli se elektron pohybuje tak, že letí směrem do roviny stránky knihy. Použijeme-li vztah vyjadřující sílu,  $v \times B$  (pamatujte, že elektron nese záporný náboj), zjistíme, že ve shodě s tímto fyzikálním zákonem se elektron vychýlí v znázorněném směru. Jev tedy spočívá v tom, že při proudu tekoucím cívku v určitém smyslu se elektron vychyluje určitým směrem. Pro fyziku není podstatné označení pólů, ale tento jev.

Ukudtečněme stejný experiment se zrcadlovým magnetem: poletí-li elektron uvedeným směrem, bude síla obrácená, pokud ji vypočítáme pomocí stejného pravidla. To je však v pořádku, neboť odpovídající pohyb bude zrcadlovým odrazem.

## 52.6 KTERÁ RUKA JE PRAVÁ?

Situace je taková, že při studiu jakýchkoliv jevů se setkáme s pravidlem pravé ruky dvakrát nebo je-li to vícekrát, je tento počet sudý. Tak se stává, že výsledný jev vypadá vždy symetricky. Krátce řečeno: nemůžeme-li se rozhodnout, zda jde o severní nebo jižní pól, nemůžeme rozhodnout ani to, zda jde o pravé nebo levé. Může se zdát, že *umíme* určit, který pól magnetu je severní. Například severní pól magnetky je ten, který směřuje na sever. Jenže to je lokální vlastnost a máme co dělat s geografii Země; je to stejné, jako kdybychom se zeptali, kterým směrem leží Chicago, a to není dobrá otázka. Kdybychom si všimli magnetky, zjistili bychom, že její severní konec je natřený modravou barvou. To však je už práce člověka. Jde tedy o lokální, konvenční kritéria.

Kdyby měl magnet tu vlastnost, že při pozorném sledování by bylo na severním pólu vidět vyrůstat jakési chloupky, zatímco na jižním by nic takového nebylo a to by bylo obecným pravidlem, nebo by existoval *nějaký* jiný jednoznačný způsob rozlišení severního pólu magnetu od jižního, *byl by to konec zákona symetrie při zrcadlení*.

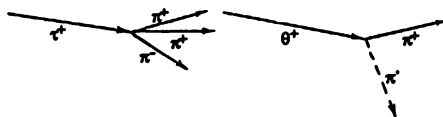
Pro lepší ilustraci celého problému si představte, že máme telefonický rozhovor s Martánem nebo někým hodně vzdáleným. Přitom mu nesmíme poslat žádný vzorek k prozkoumání. Kdybychom mu například mohli poslat světlo, mohlo by to být světlo pravotočivě kruhově polarizované a pak by stačilo říci: „Všimni si, jak je světlo polarizované; takovou polarizaci nazveme pravostrannou!“ My mu však nesmíme nic *poslat*, smíme s ním jen mluvit a on je přitom někde velmi daleko, na neznámém místě a nemůže vidět nic z toho, co vidíme my. Nemůžeme

mu například říct: „Podívej se na Velký vůz a všimni si, jak jsou rozmístěny jeho hvězdy; ‚pravou‘ stranou rozumíme...“ My mu směsme jen telefonovat.

Chtěli bychom mu o nás všechno povědět. Samozřejmě bychom začali s definováním čísel, a to tak, že bychom řekli: „Tik, tik – dva, tik, tik, tik – tři...“, takže by mohl postupně pochopit několik slov, a tak bychom pokračovali dále. Časem bychom se s ním natolik seznámili, že by se nás zeptal: „Jak vy vlastně vypadáte?“ A my bychom mu začali popisovat náš vzhled. „Jsme 175 cm vysokí.“ On by nás přerušil: „Moment, co to vlastně znamená – 175 centimetrů?“ Mohli bychom mu to vysvětlit? Zcela určitě! Stačilo by říci: „Znáš průměr vodíkového atomu a naše výška je stejně velká jako 17 000 000 000 průměrů vodíkového atomu.“ Takový postup je možný, neboť fyzikální zákony se nezmění při změně měřítka, a tak *můžeme* definovat absolutní délku. Takovým způsobem určíme velikost našeho těla, povíme mu o tvaru našeho těla, že máme končetiny s pěti výrůstky na konci atd. a on pravděpodobně bez obtíží pochopí, jak navenek vypadáme. Dokonce si udělá podle našeho popisu model našeho těla a řekne nám: „Zvenku jste celkem pěkní, ale jak vypadáte zevnitř?“ Pak se pustíme do popisu našich vnitřních orgánů, dostaneme se až k srdci, podrobně ho seznámíme s tvarem našeho srdce a řekneme mu: „Srdce máme na levé straně.“ Od něho dostaneme odpověď: „Hm – na levé straně?“ Bude v rozpacích, a proto mu musíme popsat, kde vlastně máme srdce, ale on přitom nikdy neviděl to, co vidíme my a nikdy od nás nedostal vzorek, podle něhož by bylo jasné, co je to pravá strana. Dokážeme to?

## 52.7 PARITA SE NEZACHOVÁVÁ

Ukazuje se, že zákony gravitace, elektřiny a magnetizmu i jaderných sil vyhovují principu zrcadlové symetrie, takže závěry z nich odvozené nám v naší úloze nepomohou. Ale v přírodě existuje mnoho částic, které vykazují jev nazývaný *rozpad  $\beta$*  nebo *slabý rozpad*. Jeden z případů slabého rozpadu souvisí s částicí, jež byla objevena kolem roku 1954, postavil před fyziky hlavolam. Vyskytla se taková nabitá částice, která se rozpadla na tři  $\pi$ -mezony podle schématu znázorněného na *obr. 52.5*. Na určitou dobu nazvali tuto částici  $\tau$ -mezon. Na *obr. 52.5* je vidět i jiná částice, která se rozpadá na dva mezony; ze zákona zachování náboje vyplývá, že jeden z nich musí být neutrální. Tuto částici nazvali  $\theta$ -mezonem. Na jedné straně tedy máme částici nazývanou  $\tau$ , jež se rozpadá na tři  $\pi$ -mezony a na druhé částici  $\theta$ , jež se rozpadá na dva  $\pi$ -mezony. Zjistilo se, že  $\tau$  a  $\theta$  mají téměř stejné hmotnosti; v rámci experimentální chyby jsou vlastně stejné. I o časech potřebných k rozpadu na tři  $\pi$ -mezony a na dva  $\pi$ -mezony se zjistilo, že jsou téměř zcela stejné; obě částice žijí stejně dlouho. Kdykoliv byly vytvořeny, vždy to bylo ve stejném poměru, řekněme 14%  $\tau$  ku 86%  $\theta$ .



Obr. 52.5 Schématický diagram rozpadu  $\tau^+$  a  $\theta^+$  částice

Každý s trochou důvtipu okamžitě pochopí, že to musí být stejná částice, a ne dvě rozdílné částice, že vlastně vytváříme objekt, který se rozpadá dvojným způsobem. Tento objekt, který se

může rozpadnout dvojnásobným způsobem, má proto stejnou dobu života a stejné procentuální zastoupení (jde vlastně o poměr pravděpodobností uvedených rozpadů).<sup>63)</sup>

V kvantové mechanice můžeme pomocí principu zrcadlové symetrie dokázat (na tomto místě si však nemůžeme říci *jak*), že je *nemožné*, aby oba vzniklé produkty pocházely ze stejné částice – stejná částice by se *nemohla* rozpadnout oběma způsoby. Zákon zachování odpovídajícího principu symetrie při zrcadlení představuje něco, co nemá klasický analog a toto kvantověmechanické zachování bylo nazváno *zachování parity*. Jako důsledek zachování parity nebo přesněji ze symetrie kvantověmechanických rovnic slabých rozpadů vůči zrcadlení by vyplynulo, že jedna a táž částice se nemůže rozpadnout oběma způsoby. Muselo by tedy jít o jakousi shodu hmotností, dob života apod. Čím víc však byl tento problém zkoumán, tím byla shoda pozoruhodnější a nastalo podezření, že zákon symetrie přírody vůči zrcadlení nemusí platit.

Podezření na neplatnost tohoto zákona vedlo dva fyziky Leeho a Yanga k návrhu jiných experimentů s přibuznými rozpady, aby se ověřila platnost zákona i na jiných případech. První takový experiment provedla slečna Wu z Kolumbijské university následujícím způsobem. Velmi silným magnetem při velmi nízkých teplotách působila na určitý izotop kobaltu, který se rozpadá za emise elektronů. Je magnetický a při dostatečně nízké teplotě tepelné pohyby příliš nerozkládají atomové magnetické momenty, takže ty se uspořádají podél magnetického pole. Proto budou všechny atomy kobaltu tímto silným polem uspořádány rovnoběžně. Pak se rozpadnou, vyzáří elektron a zjistilo se, že v případě atomů uspořádaných polem, jehož vektor  $B$  směřuje nahoru, bude většina emitovaných elektronů letět dolů.

Ten, kdo není dost vnímavým pozorovatelem, nebude této poznámce připisovat velký význam, ale ten, kdo má smysl pro tajemství přírody, bude považovat tuto poznámku za dramatický objev. Vložíme-li atomy kobaltu do velmi silného magnetického pole, poletí více elektronů, které vznikly při rozpadu dolů a méně nahoru. Kdybychom provedli „zrcadlový“ experiment, v němž jsou atomy kobaltu seřazeny opačně, emitované elektrony by letěly převážně *nahoru*, a ne *dolů*; je to tedy *nesymetrický* děj. Nyní bychom už mohli obrazně říci, že *magnetu narostly ty chloupky*, které jsme na něm předtím marně hledali. Jižním pólem magnetu je ten pól, od něhož se elektrony vzniklé při  $\beta$ -rozpadu vzdalují. Tak můžeme fyzikálním způsobem odlišit severní pól magnetu od jižního pólu.

Pak následovalo mnoho jiných experimentů: rozpad  $\pi$ -mezonu na  $\mu$  a  $\nu$ ; rozpad  $\mu$ -mezonu na elektron a dvě neutrina, rozpad  $\Lambda$ -částice na proton a  $\pi$ -mezon, rozpad  $\Sigma$ -částic a mnoho dalších rozpadů. Téměř ve všech předpokládaných případech se potvrdila *neplatnost* principu zrcadlové symetrie. Zákon zrcadlové symetrie je tedy na této úrovni fyziky principiálně nesprávný.

Stručně řečeno, nyní už můžeme Marťanovi oznámit, na které straně máme srdce. Můžeme mu dát následující návod: „Sestroj magnet, cvíčkou pusť proud, vezmi kobalt a sniž teplotu. Experimentální zařízení orientuj tak, aby elektrony letěly od nohou k hlavě a pak směr, jímž prochází proud cvíčkou, je směr zleva doprava.“ Pomocí takového experimentu už můžeme definovat pravou a levou stranu.

Bylo předpovězeno mnoho jiných jevů. Ukázalo se, že spin, moment hybnosti kobaltového jádra, představuje před rozpadem pět jednotek  $\hbar$  a po rozpadu 4 jednotky. Elektron tedy odnáší spinový moment a úlohu přitom hraje i neutrino. Není těžké si představit, že elektron musí nést svůj spinový moment hybnosti orientovaný ve směru svého pohybu a podobně i neutrino. Elektron by se tedy měl jakoby otáčet zprava doleva, to se opravdu zjistilo. Na Kalifornském technickém institutu dokázali Boehm a Wapstra, že spin elektronu je orientován levotočivě. (O experimentech dokazujících opak se ukázalo, že jsou nesprávné!)

<sup>63)</sup> Dnes této částici říkáme  $K^+$  mezon nebo kaon. (Pozn. red.)

Další úlohou bylo najít zákon o nezachování parity. Jaké pravidlo nám říká, kdy se parita zachovává? Takové pravidlo existuje a říká, že selhání se vyskytuje jen ve velmi pomalých reakcích nazývaných slabé rozpady a dojde-li k narušení zachování parity, pak částice se spinem, jako je elektron nebo neutrino apod., vychází převážně se spinem orientovaným levotočivě. Je to jakési pravidlo jednostrannosti; dává do souvislosti polární vektor rychlosti a axiální vektor momentu hybnosti a říká, že moment hybnosti směřuje s větší pravděpodobností proti vektoru rychlosti než souhlasně s tímto vektorem.

Takové je pravidlo, ale dodnes vlastně neznáme jeho příčiny. Proč platí právě toto pravidlo, jakou má hlavní příčinu a jak to souvisí s ostatními? Takovou nesymetrii jsme byli velmi překvapeni a dosud jsme se z toho neprobrali, takže jsme ještě nepochopili, co znamená tato nesymetrie z hlediska všech ostatních pravidel. Víme však, že je to zájímavý, moderní a dosud nerozřešený problém, takže bude vhodné, promluvíme-li si o některých s ním souvisejících otázkách.

## 52.8 ANTIHMOTA

Když se ztratí jedna ze symetrií, první věcí, kterou musíme udělat, je vrátit se k seznamu známých nebo předpokládaných symetrií a ptát se, zda některá z nich nezanikla. Ještě jsme se nezmínili o jedné operaci z naší tabulky, kterou nemůžeme nechat nepovšimnutou – je jí vztah mezi hmotou a antihmotou. Dirac předpověděl, že vedle elektronu musí existovat ještě jiná částice (nazval ji pozitron a objevil ji Anderson z Kalifornského technického institutu), která s elektronem úzce souvisí. Vlastnosti těchto částic jsou v určitém vztahu, splňují určitá pravidla korespondence: jejich energie jsou stejné, hmotnosti jsou stejné, náboje jsou opačné, ale co je nejdůležitější, když se tyto dvě částice setkají, anihilují se a celá jejich hmotnost přejde na energii, např.  $\gamma$ -záření. Pozitron nazýváme *antičásticí* elektronu a uvedené vlastnosti jsou pro částici a antičástici charakteristické. Z Diracovy argumentace bylo jasné, že i ostatní částice musí mít odpovídající antičástice. Například k protonu musí existovat antiproton, který označujeme symbolem  $\bar{p}$  a jenž má záporný elektrický náboj, stejnou hmotnost jako proton atd. Nejdůležitější vlastností však je, že proton a antiproton mohou při setkání anihilovat. Tuto vlastnost zdůrazňujeme, neboť lidé dost dobře nechápou, že může existovat neutron a antineutron a říká: „Neutron je neutrální a jak může mít tedy antineutron opačný náboj?“ To, že říkáme „anti-“, neznamena, že jde právě o opačný náboj, ale jde o celý soubor vlastností, z nichž mnohé jsou právě opačné. Antineutron se od neutronu liší v následujícím. Kdybychom dali dohromady dva neutrony, zůstaly by dvěma neutrony, ale kdybychom dali dohromady neutron a antineutron, navzájem by anihilovaly za současného uvolnění velkého množství energie v podobě  $\pi$ -mezonů,  $\gamma$ -záření apod.

Máme-li antineutrony, antiprotony a antielektrony, můžeme v principu vytvářet antiatomy. Zatím ještě vytvořeny nebyly, ale v principu je to možné.<sup>64)</sup> Například atom vodíku má uprostřed proton a elektron ho obíhá. Představte si, že bychom vytvořili antiproton a k němu přiblížili pozitron. Bude pozitron kolem něho obíhat? Víme, že antiproton je elektricky záporný a antielektron je elektricky kladný, takže se budou přitahovat a jsou-li jejich hmotnosti stejné jako hmotnosti protonu a elektronu, bude stejně i vše ostatní. Jeden z principů symetrie ve

<sup>64)</sup> V roce 1996 bylo na urychlovači v CERNu v Ženevě vyrobeno 11 prvních atomů antivodíku. Žily jen 30 miliardtin sekundy a za tu dobu uletěly 10 m. (Pozn. red.)



fyzice, který se zdá vyplývat z rovnic, je ten, že sestrojíme-li jedny hodiny z látky a druhé z antilátky, oboje půjdou stejně. (Kdybychom však takové hodiny přiložili k sobě, navzájem by anihilovaly, ale to už je jiná záležitost.)

Nyní nás může napadnout následující otázka. Z hmoty můžeme sestrojít dvojce hodiny – jedny „levostranné“ a druhé „pravostranné“. Můžeme například sestrojít ne obyčejné hodiny, ale hodiny s kobaltem a magnety a detektory elektronů, které zaznamenávají přítomnost elektronů vzniklých  $\beta$ -rozpadem a počítají je. Je-li zaregistrován elektron, pohne se sekundová ručička. Zrcadlové hodiny, které napočítají méně elektronů, půjdou jinou rychlostí. Zřejmě tedy můžeme sestrojít takovou dvojici hodin, v níž levostranné hodiny jdou jinak než pravostranné. Nyní sestrojme z hmoty hodiny, které nazveme standardní nebo pravostranné. Dále sestrojme z hmoty také hodiny, které nazveme levostrannými. Konstatovali jsme, že obecně *nepůjdou* tyto hodiny stejně, ale až do tohoto významného objevu se předpokládalo, že obě tyto hodiny by měly jít stejně. Předpokládalo se i to, že hmota a antihmota jsou ekvivalentní, tedy že kdybychom sestrojili pravostranné hodiny z antihmoty stejného tvaru jako pravostranné hodiny z hmoty, oboje by šly stejně a totéž by platilo o levostranných hodinách z hmoty a antihmoty. Jinými slovy: zpočátku se předpokládalo, že *všechny tyto čtyři* hodiny půjdou stejně. Nyní už však víme, že pravostranné a levostranné hodiny z hmoty nejsou stejné. Proto můžeme předpokládat, že ani pravostranné a levostranné hodiny z antihmoty nebudou stejné.

Vzniká tedy přirozená otázka, půjdou vůbec některé hodiny stejně, a které? Jinými slovy: chová se pravostranná hmota jako pravostranná antihmota nebo se pravostranná hmota chová jako levostranná antihmota? Experimenty s  $\beta$ -rozpadem, v nichž místo elektronu vystupují pozitrony, naznačují, „pravá“ hmota se chová jako „levá“ antihmota.

Nakonec se tedy ukázalo, že pravolevá symetrie přece jen existuje! Kdybychom sestrojili levostranné hodiny ne z hmoty, ale z antihmoty, šly by stejně jako pravostranné hodiny z hmoty. Místo dvou nezávislých pravidel v naší tabulce symetrií by zůstalo jedno nové, kombinované pravidlo, mluvící o tom, že pravostranná hmota je symetrická s levostrannou antihmotou.<sup>65)</sup>

Kdyby byl náš Marťan z antihmoty, dopadly by naše instrukce o „pravostranném“ modelu našeho těla opačně. Co by se stalo, kdybychom se po dlouhé konverzaci rozhodli zkonstruovat kosmické lodě a setkat se někde v půli cesty ve vesmíru? Určitě bychom si řekli o našich zvyklostech při setkávání a chtěli bychom si potřást rukama. Museli bychom se však mít na pozoru, kdyby nám náš kosmický přítel chtěl podat levou ruku!

## 52.9 PORUŠENÁ SYMETRIE

Je přirozené ptát se, co s takovými zákony, které jsou jen *přibližně* symetrické? Co nejvíc udivuje, je skutečnost, že v široké oblasti důležitých jevů, jako jsou jaderné síly, elektrické jevy a dokonce i tak slabé interakce jako je gravitace, ve velmi rozsáhlé oblasti fyziky se tyto zákony ukazují být symetrické. Na druhé straně existuje jeden nepatrný jev a ten nám říká: „Ne, zákony nejsou symetrické!“ Jak je to možné, že příroda je téměř symetrická, ale přece jen symetrickou není? Co s tím máme dělat? Nejdříve si všimněme, zda neznáme nějaké jiné příklady tohoto druhu. Několik takových příkladů opravdu existuje. Například jaderné části sil mezi protonem a protonem, mezi neutronem a neutronem a mezi neutronem a protonem jsou přesně stejné –

<sup>65)</sup> Kdyby Feynmann psal své přednášky o několik let později, určitě by tuto kapitolu dále rozvinul. Další pokusy s kaony ukázaly, že ani kombinované pravidlo s „pravostrannou hmotou“ a „levostrannou antihmotou“ vždy neplatí. U některých procesů je navíc třeba obrátit i znaménko času (CPT teorem). (Pozn. red.)

existuje symetrie jaderných sil, nová symetrie, která dovoluje záměnu neutronu a protonu. Je zřejmé, že nejde o obecnou symetrii, neboť mezi neutrony neexistuje elektrické odpuzování, ale existuje mezi dvěma protony. Obecně tedy neplatí, že proton můžeme nahradit neutronem, ale je to dobrá aproximace. Ptáte se proč *dobrá*? Protože jaderné síly jsou mnohem silnější než elektrické. I v tomto případě jde tedy o „přibližnou“ symetrii. Vidíte, že existují i jiné příklady.

Jsme zvyklí přijímat symetrii jako projev dokonalosti. Tento náš zvyk připomíná starou představu Řeků o dokonalosti kruhů. V důsledku této utkvělé představy bylo přímo hrozné uvěřit, že dráhy planet nejsou přesně kruhové, ale jen přibližně kruhové. Rozdíl mezi kružnicí a něčím, co je téměř kruhové, není vůbec malý a z hlediska myšlení jde o principiální rozdíl. Kružnice nese znak dokonalosti a symetrie a je-li porušena, tyto momenty se ztrácejí – symetrie mizí. Samotná odpověď na otázku, proč jsou dráhy jen *přibližně* kruhové, je příliš složitá. Skutečné dráhy planet jsou obecně eliptické, ale v průběhu věků pod vlivem slapových sil a podobně se staly téměř symetrické. Podobá se tento problém našemu problému? Jde-li o kružnice, pak kdyby byly dokonalé, nebylo by co vysvětlovat, ale když dokonalé nejsou, je vysvětlování příliš mnoho a ve skutečnosti jde o složitý dynamický problém. Měli bychom vysvětlit, proč jsou dráhy planet přibližně symetrické z hlediska slapových sil apod.

Měli bychom tedy vysvětlit, odkud symetrie pochází. Proč je příroda přibližně symetrická? To však dodnes nikdo neví. Jediné, co můžeme navrhnout, je asi toto. V japonském městě Neiko existuje brána, kterou mnozí Japonci nazývají nejkrásnější v Japonsku. Byla postavena v době, kdy japonskou kulturu silně ovlivňovalo čínské umění. Je velmi umělecky vyrobena s množstvím štítů, sloupů, dračích hlav, princů a nádherných rytin. Při pozorném pohledu však můžeme spatřit, že na jednom ze sloupů je ve složitém komplexu znaků jeden z dekoračních prvků vyrytý převráceně. Jinak je vše úplně symetrické. O této bráně koluje pověst, že převrácený prvek je tam proto, aby bohové nežárlili na dokonalost člověka. Tvůrce této brány udělal schválně chybu, aby zabránil hněvu bohů, který by pramenil ze žárlivosti.

Proč bychom tuto myšlenku neobrátili a nepodali následující vysvětlení přibližné symetrie přírody? Bůh stvořil zákony jen přibližně symetrické, aby lidé nežárlili na jeho dokonalost!

# Výsledky a návody ke cvičením

## KAPITOLA 1

- 1.1 Jeden mol vzduchu obsahuje  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  mol<sup>-1</sup> molekul a za normálního atmosférického tlaku a teploty zaujímá objem 22,4 l. V 1 m<sup>3</sup> je tedy  $n_0 = 2,7 \cdot 10^{25}$  m<sup>-3</sup> molekul. Porovnáním přibližných hustot plynného a kapalného vzduchu najdeme koncentraci molekul kapalného vzduchu  $n_k = 2,7 \cdot 10^{28}$  m<sup>-3</sup> a hmotnost „průměrné“ molekuly vzduchu  $3,7 \cdot 10^{-28}$  kg. Představíme-li si molekuly jako tvrdé kuličky o průměru  $d$  uspořádané v jednotkovém objemu tak, že se navzájem dotýkají, dostaneme  $d = 3,3 \cdot 10^{-10}$  m. Při pohybu střední rychlostí  $v$  narazí molekula za sekundu na všechny molekuly, s jejichž středy se bude její střed míjet ve vzdálenosti menší než  $d$ , tedy nacházející se v objemu  $\pi d^2 v$ . Střední volnou dráhu  $l$  molekuly dostaneme jako součin její střední rychlosti a střední doby, která proběhne mezi srážkami a udává ji známý vztah

$$l = \frac{1}{\pi d^2 n_0}$$

Po dosažení číselných hodnot dostaneme přibližně  $l = 1,1 \cdot 10^{-7}$  m. Předpokládáme-li, že při téže teplotě jsou si koncentrace a tlak plynu vzájemně úměrné, bude střední volná dráha rovna 1 m při tlaku asi 0,11 Pa.

- 1.2 Vezmeme-li v úvahu rozlohu světového oceánu a jeho střední hloubku kolem 3 km, můžeme odhadnout celkový objem vody na zeměkouli na  $1,2 \cdot 10^{18}$  m<sup>3</sup>, tedy asi  $4,0 \cdot 10^{46}$  molekul vody. Původní kapka mohla obsahovat  $3,0 \cdot 10^{22}$  molekul. Jestliže se tyto molekuly rozptýlily rovnoměrně v pozemské vodě, najdeme jich v každé skleničce asi 5.
- 1.3 Je výhodné uvažovat rovnovážný stav v uzavřené nádobce, kdy počet molekul odpařujících se z vody je roven počtu molekul kondenzujících zpět do vody. Bude-li nádobka otevřena, uplatní se jen proces odpařování. Počet molekul kondenzujících do vody závisí na jejich koncentraci  $n$  v tenké vrstvě o výšce rovné střední volné dráze nad hladinou a na střední rychlosti  $v$ . Za 1 s kondenzuje do vody povrchem o obsahu  $S$  celkem  $nSv/6$  molekul (1/6 molekul se pohybuje směrem k hladině). Označíme-li  $n_0$  koncentraci molekul vody ve sklenici a  $h$  výšku hladiny, všechna voda se vypaří za dobu  $t = 6 n_0 h / nv$ . Odhadneme-li  $n_0 = 3,3 \cdot 10^{28}$  m<sup>-3</sup>,  $h = 10$  cm,  $n = 10^{19}$  m<sup>-3</sup> a  $v = 600$  m · s<sup>-1</sup>, dostaneme  $t = 3,3 \cdot 10^6$  s, tj. asi 1 měsíc. Nepřesnost tu spočívá v odhadu koncentrace  $n$ , která závisí na vlhkosti vzduchu a silně se mění se vzdáleností od hladiny. Při našich odhadech se z 1 cm<sup>2</sup> bude odpařovat  $10^{17}$  molekul za sekundu. Množství vody odpařené z povrchu oceánů za rok můžeme přibližně přirovnat ročnímu úhmu srážek.
- 1.4 V pevných tělesech, například v krystalech, atomy vykonávají rychlé kmitavé pohyby kolem rovnovážných poloh, ale jejich střední vzájemné vzdálenosti a uspořádání se nemění.
- 1.5 Stačí uvážit rozložení atomů v jedné z krystalových rovin a použít geometrickou poučku, podle níž k pokrytí roviny mnohoúhelníky téhož druhu lze použít pouze rovnoběžníky, rovnostranné trojúhelníky a pravidelné šestiúhelníky.
- 1.6 Tlak ideálního plynu bude záviset na hustotě toku molekul a na předávané hybnosti, tj. hmotnosti a střední rychlosti molekul. S růstem rychlosti molekuly roste jednak hustota toku, ale také hybnost. Tlak tedy poroste úměrně koncentraci molekul a druhé mocnině střední kvadratické rychlosti.
- 1.7 Tepelný pohyb je chaotický pohyb molekul, jehož střední rychlost roste s teplotou. U letícího míčku se všechny molekuly pohybují navíc společnou, usměrněnou rychlostí.
- 1.8 Dva třoucí se povrchy těles jsou vždy nerovné a mikroskopické nárazy nerovností vedou k růstu chaotického pohybu molekul.
- 1.9 Při roztahování gumy působí řetězky atomů jako svého druhu píst, který při nárazech uvádí do chaotického pohybu i další atomy a guma se zahřívá.
- 1.10 Chaoticky se pohybující atomy se při srážkách snaží narušit uspořádané, roztažené řetězky a zamotat je. Zahřátá napjatá guma se při zahřívání proti očekávání zkracuje.
- 1.11 Z geometrie je známo, že při nejtěsnějším možném prostorovém uspořádání stejných koulí průměru  $d$  budou koule zaujímat  $\pi/\sqrt{18} = 0,7405$  celkového objemu. Do dostatečně velké nádoby objemu  $V$  se tedy vejde  $\sqrt{2} V/d^3$  kuliček.

## KAPITOLA 4

- 4.1 Všimněme si, že  $AC$  a  $BC$  svírají pravý úhel a že napěťové síly  $T_1 = T_2 = T$  jsou stejné. Úlohu bychom mohli řešit prostým rozkladem tíhy závaží  $m$  do složek. Máme-li použít princip virtuálních posunutí, můžeme si třeba představit, že část drátu  $AC$  malinko popustíme,

takže se prodlouží o  $\Delta l$ . Napěťová síla přitom vykoná virtuální práci  $\Delta W = T\Delta l$ ; síla na úseku drátu  $BC$  zůstává k malému posunutí kolmá, takže práci nekoná. Vykonaná práce musí být rovna změně potenciální energie závaží  $mg\Delta l/\sqrt{2}$ . Odtud  $T = mg/\sqrt{2} = 347 \text{ N}$ .

- 4.2 Označme hmotnost žebříku  $M$ , hmotnost závaží  $m$ , úhel, který žebřík svírá se zemí  $\alpha$  a hledané síly  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  v pořadí uvedeném v zadání. Při virtuálním posunutí žebříku se závaží  $m$  svisle dolů o  $\Delta y$  vykoná složka síly  $F_3$  práci  $F_3\Delta y$  a ze změny potenciální energie máme  $F_3 = (M + m)g = 353 \text{ N}$ . Z virtuálního posunutí ve vodorovném směru  $\Delta x$  dostaneme  $F_1 = F_2$ . Dáme-li úhlu  $\alpha$  malý virtuální přírůstek  $\Delta\alpha$  a přirovnáme-li virtuální práci síly  $F_1$  změně potenciální energie, dostaneme

$$F_1 = \frac{1}{2} \left( M + \frac{3}{2}m \right) g \cot\alpha = 177 \text{ N}.$$

- 4.3 Řešíme podobně jako úlohu 4.2. Pro napěťovou sílu dostaneme  $T = \frac{l}{x} \left( \frac{M}{2} + \frac{m}{\sqrt{2}} \right) g \sin\theta$ .

- 4.4 Závaží klesne a síla  $F = mgy/x$  bude tyč roztahovat.

- 4.5 Vozík i závaží jsou upevněny pomocí volné kladky a při poklesu závaží se vozík posune o 4–krát menší vzdálenost. Hmotnost vozíku  $M = 4m/\sin\theta$ .

- 4.6 Při malém pootočení cívký, při němž její těžiště stoupne, závaží klesne. Přirovnáme-li změnu potenciální energie cívký a závaží, dostaneme  $M = mr/(R-r)$ . Týž výsledek bychom dostali z podmínky rovnováhy sil a momentů sil.

- 4.7 Uvážíme práci vykonanou silami při zvedání a spouštění břemene o jednu celou otočku kladky a přirovnáme změně potenciální energie. Práce sil tření je v obou případech táž a můžeme ji z rovnic vyložit. Pro zvedací sílu dostaneme  $F_2 = MgR/[n(R-1) + 1]$ , sílu spouštění  $F_2 = F_1/R$ .

- 4.8 Uvážíme malý virtuální pokles řetězu a určíme, jak se změní jeho délka. Práce napěťové síly  $T$  musí být rovno změně potenciální energie řetězu. Odtud  $T = (Mgh)/(2\pi r)$ .

- 4.9 Jako virtuální posunutí uvážíme pootočení rámu v ložiscích o malý úhel. Ze změny potenciální energie dostaneme  $M_2 = \frac{1}{2} M_1 = 0,25 \text{ kg}$ .

- 4.10 Rychlost určíme z kinetické energie soustavy rovné úbytku její potenciální energie jako  $v = \sqrt{gd(\sin\varphi - \sin\theta)}$ .

- 4.11 Řešíme podobně jako v předchozí úloze a dostaneme  $v = \sqrt{2gd\sin\theta(M_1 - M_2)/(M_1 + M_2)}$ .

- 4.12 Označme rychlost výtoku kapaliny  $v$ , rychlost poklesu hladiny  $u = v$ . Z rovnice spojitosti zjistíme, že  $u = (s/S)v$ . Podle zákona zachování energie  $v = \sqrt{2hg/[1 - (s/S)^2]}$ .

- 4.13 I. Použijeme kosinovou větu a součtový vzorec pro  $\cos(\alpha + \Delta\alpha)$ .

II. Plyne z Pythagorovy věty.

- 4.14 Uvážíme malou virtuální změnu polohy klád, při níž vrchní kláda trochu klesne do mezery mezi oběma spodními a odtlačí kládu napravo poněkud vzhůru. Klády jsou hladké a proto předpokládáme, že se celková potenciální energie nezmění; oč klesne těžiště jedné klády, o to stoupne těžiště druhé. Trochu pracnější geometrický výpočet dává výsledek  $\theta \approx 1/3\sqrt{3}$ , a tedy  $\theta = 11^\circ$ .

- 4.15 Provedeme myšlený pokus a odstraníme některou z tyčí konstrukce. Závaží  $m$  poklesne a můžeme usoudit, zda se koncové klouby odstraněné tyče přiblíží nebo vzdálí. Pokud mají tendenci se vzdálit, můžeme je nahradit ohebnými vazbami. Jsou to tyče  $BC$ ,  $AC$ ,  $CE$ ,  $EG$ ,  $ED$  a  $EF$ . Dále si představíme malé virtuální posunutí spočívající v tom, že se tyč  $BD$  trochu zkrátí (je namáhána stlačováním), vodorovná základna praskne v kloubu  $C$  a ten se malinko posune dolů. Přitom klesne i závaží  $m$ . Při geometrickém výpočtu se nám hodí vztah z úlohy 4.13 I.; z údajů o délce tyčí snadno zjistíme, že  $\sin(\angle BCD) = 24/25$ . Přirovnáme-li změnu potenciální energie závaží práci napěťové síly v tyči  $BD$ , dostaneme  $T_{BD} = mg/2$ .

- 4.16 Visí-li tyč v rovnovážné poloze, má její potenciální energie minimum a při vychýlení o (nekonečně) malý úhel se nemění. Vychýlíme-li tyč například nalevo, těžiště její lehčí poloviny stoupne a těžiště její těžší poloviny klesne. Jednoduchým geometrickým výpočtem pak dostaneme pro úhel  $\alpha$ , který tyč svírá s vodorovnou přímkou  $\tan\alpha = 1/6\sqrt{3}$ ,  $\alpha = 5^\circ 30'$ .

- 4.17 Uvážíme dvě virtuální posunutí. Při prvním se závaží  $m_2$  malinko posune po odvěsně směrem dolů a závaží  $m_1$  zůstane nehybné (vlákno se roztáhne); při druhém posunutí tomu bude naopak. Změnu potenciální energie přirovnáme práci napěťové síly  $T$  a dostaneme  $\tan\alpha = 3\sqrt{3}$ ,  $\alpha = 79^\circ$ ,  $T = \frac{g}{2} \sqrt{m_1^2 + 3m_2^2} = 2,60 \text{ N}$ .

## KAPITOLA 6

- 6.1 Pohyb molekuly můžeme považovat za náhodnou procházku, při níž se molekula po  $N$  srážkách dostane do vzdálenosti  $D = \sqrt{N}l$ , kde  $l$  je střední volná dráha. O 1 cm se tedy molekula vzdálí za dobu  $t = D^2/(l^2\nu) = 3 \text{ s}$ .

- 6.2 Pravděpodobnosti jsou 0,3 a 0,05.

- 6.3 Jde o tzv. izotropní rozptýl, kdy počet rozptýlených kuliček nezávisí na směru. Srážkový parametr  $\rho$  (tj. vzdálenost letové přímky od rovnoběžné přímky procházející rozptýlovým centrem) souvisí s úhlem rozptýlu  $\chi$  vztahem  $\rho = (a + b) \cos(\chi/2)$ . Poměrnou část kuliček rozptýlených v rozmezí úhlů mezi  $\chi$  a  $\chi + d\chi$  lze určit z diferenciálního srážkového průřezu

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| = \frac{1}{2} \pi (a + b)^2 \sin\chi d\chi,$$

který po zintegrování přes celý prostorový úhel dá celkový srážkový průřez uvedený v zadání.

## KAPITOLA 7

- 7.1 Použijeme-li vztahy pro parametry elipsy uvedené pod textem úlohy, 3. Keplerův zákon a označíme periody oběhu Měsíce a družice  $T_M$  a  $T_d$ , dostaneme

$$T_d = \sqrt{\left(\frac{r_{pd} + r_{ad}}{r_{pM} + r_{aM}}\right)^3} T_M = 1,55 \text{ h.}$$

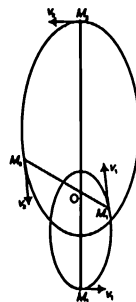
- 7.2 a) Dostaneme známý vztah  $a_d = v^2/R$ .  
 b) Známe-li výraz pro dostředivé zrychlení, můžeme z gravitačního zákona odvodit 3. Keplerův zákon a naopak. Newton tak získal gravitační zákon pro obecnější případ eliptických orbit.
- 7.3 a) Porovnáme druhé mocniny oběžných dob a použijeme 3. Keplerův zákon. Dostaneme  $M_S/M_Z = 3,33 \cdot 10^6$ .  
 b) Podobně  $M_J/M_Z = 318$ .
- 7.4 Doba oběhu  $T$  kolem společného těžiště  $O$  kolem sebe navzájem je stejná, protože těžiště musí pořád ležet na jejich spojnici. Jsou-li hmotnosti obou těles  $M_1, M_2$  a vzdálenosti každého tělesa od těžiště  $R_1, R_2$  a od sebe navzájem  $R = R_1 + R_2$ , potom platí.

$$\frac{4\pi^2 M_1 R_1}{T^2} = x \frac{M_1 M_2}{R^2}, \quad \frac{4\pi^2 M_2 R_2}{T^2} = x \frac{M_1 M_2}{R^2}.$$

Sečteme-li tyto rovnice, určíme odtud  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{x(M_1 + M_2)}}$ .

V případě eliptických orbit obě tělesa obíhají kolem společného těžiště  $O$  po elipsách s velkými poloosami  $a_1, a_2$  a též excentricitě (viz obrázek). Z Keplerových zákonů lze poněkud pracnějším způsobem najít  $T = 2\pi \sqrt{a^3/x(M_1 + M_2)}$ , kde  $a = a_1 + a_2$ .

Výsledek jinak plyne též z obecného řešení úlohy dvou těles.



- 7.5 S použitím výsledku úlohy 7.4 pro uvedené hodnoty dostaneme  $\frac{m_a + m_b}{M_B} = \left(\frac{R}{R_{ZS}}\right)^3 \left(\frac{T_Z}{T}\right)^2$ , kde  $m_a, m_b$  jsou hmotnosti složek dvojhvězdy,  $M_B$  hmotnost Slunce,  $R_{ZS} = 1 \text{ AU}$  a  $T_Z = 1 \text{ r}$ . Zanedbali jsme hmotnost Země vzhledem k hmotnosti Slunce.

- 7.6 Z obr. 7.7 lze zjistit, že úhlový rozměr velké poloosy dráhy Síría B je přibližně  $7,30''$  a doba oběhu kolem  $45 \text{ r}$ . Stejně jako v předchozí úloze určíme hmotnost dvojhvězdy  $m_A + m_B = 3,7 M_S$ . Z orientace roviny dvojhvězdy vzhledem k pozemskému pozorovateli plyne, že jde o dolní odhad.

- 7.7 Z 2. Keplerova zákona  $v_{\max}/v_{\min} = r_a/r_p = (1 + e)/(1 - e) = 1,0334$  ( $e$  je excentricita zemské trajektorie).

- 7.8 Pro Halleyovu kometu z uvedených údajů  $T = 76 \text{ r}$ ,  $a = 18 \text{ AU}$ ,  $r_a = 2a - r_p = 35,4 \text{ AU}$ ,  $v_{\max}/v_{\min} = 59$ .

- 7.9 Z výsledku úlohy 7.4 a známé oběžné doby Měsíce  $T_M$  dostaneme  $M_M = \frac{4\pi^2 R_{ZM}^3}{x T_M^2} - M_Z = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg} = 0,012 M_Z$

( $R_{ZM}$  je vzdálenost Měsíce od Země,  $M_M, M_Z$  hmotnosti Měsíce a Země).

Jiná možnost je určit hmotnost Měsíce z doby oběhu a poloměru trajektorie umělé družice Měsíce (např. kosmická loď Apollo), nebo ze slapových pohybů na povrchu oceánu.

- 7.10 Z Newtonova gravitačního zákona, poloměru a hmotností Země a Měsíce  $R_Z, R_M, M_Z, M_M$  dostaneme

$$g_M = M_M R_Z^2 g / M_Z R_M^2 = 1,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

- 7.11 Je-li  $\Delta g$  rozdíl gravitačních zrychlení, když je Měsíc v maximální a minimální vzdálenosti od laboratoře na povrchu Země, při zanedbání poloměru Země ze srovnání se vzdáleností Měsíce  $R_Z \ll R_{ZM}$  najdeme  $\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{M_M}{M_Z} \left(\frac{R_Z}{R_{ZM}}\right)^2 = 10^{-5}$ .

## KAPITOLA 8

- 8.1 Platí  $d v_x / dt = a = \text{konst.}$ , odkud integrací s danými počátečními podmínkami dostaneme výsledek.

- 8.2 Bez komentáře.

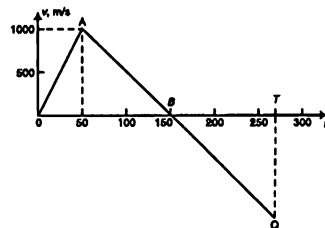
- 8.3 Dostaneme  $v^2 = v_0^2 + 2[a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0)]$ .

- 8.4 Vzdálenost  $x_d = v^2 \sin^2 \theta / g$ , maximální výška  $y_v = v^2 \sin^2 \theta / 2g$ .

- 8.5 Pod úhlem  $\theta = 45^\circ$ .

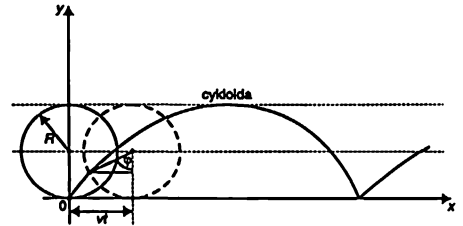
- 8.6 Ze vztahu  $s(t) = v_0 t + a t^2 / 2$  dostaneme  $v_0 = 3,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $a = 0,84 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

- 8.7 Viz obrázek. Raketa dosáhne výšky  $h_{\max} = 73500 \text{ m}$ , celková doba letu  $t_f = 272 \text{ s}$ .



- 8.8 Je-li  $s$  celková délka testovací trati, z podmínky rovnosti dob  $t \sqrt{\frac{s}{a_1}} + \sqrt{\frac{s}{4a_1}} = \sqrt{\frac{2s}{a_2}}$  dostaneme  $a_1/a_2 = 9/8 = 1,125$ .
- 8.9 Aby mina těsně minula okraj srázu, musí být vystřelena pod úhlem daným podmínkou  $\sin 2\alpha = sg/v_0^2$  ( $s$  je vzdálenost od srázu,  $v_0$  počáteční rychlost), odkud  $\alpha = 59^\circ$ . Pod tímž úhlem rychlostí  $v_0$  bude mina mjet okraj srázu směrem dolů. Od tohoto okamžiku poletí 0,41 s a dopadne do vzdálenosti asi 63 m od úpatí srázu.
- 8.10 Bez komentáře.
- 8.11 Projde-li těleso za dobu  $t$  úhel  $\varphi = \omega t$ , kde  $\omega$  je úhlová rychlost, pak  $x = R\cos\omega t$ ,  $y = R\sin\omega t$ ,  $v_x = -R\omega\sin\omega t$ ,  $v_y = R\omega\cos\omega t$ ,  $a_x = -R\omega^2\cos\omega t$ ,  $a_y = -R\omega^2\sin\omega t$ ,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$ .
- 8.12 Kamínek bude opisovat křivku zvanou cykloida. Podle obrázku, kde úhel  $\varphi = vt/R$ , najdeme

$$\begin{aligned}x &= vt - R\sin(vt/R), \\y &= R[1 - \cos(vt/R)], \\v_x &= v[1 - \cos(vt/R)], \\v_y &= v\sin(vt/R), \\a_x &= (v^2/R)\sin(vt/R), \\a_y &= (v^2/R)\cos(vt/R).\end{aligned}$$



## KAPITOLA 9

- 9.1 Síla stálé velikosti  $F$  a kolmá k rychlosti vyvolává pohyb po kružnici poloměru  $r = mv^2/F$ . V našem případě  $r = mv_0/k$ .
- 9.2 Poloměr křivosti  $R = v^2/a_n$ , kde  $a_n$  je normálové zrychlení. Určíme-li tečné zrychlení  $a_t = dv/dt$ , pak  $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$ . Pro uvedené časové okamžiky dostaneme  $R$  rovno 0,664; 0,650; 0,665 (v přijatých jednotkách).
- 9.3 Protože míč vletěl do okna vodorovně, musel být na vrcholu své trajektorie. Použijeme-li výsledek úlohy 8.4, máme  $v_0 = \sqrt{2hg/\sin^2\alpha} = 14,5$  m/s. Zrychlení v tomto bodě je kolmé k rychlosti, takže poloměr křivosti  $R = v_0^2\cos^2\alpha/g = 2,46$  m. V obecném okamžiku  $t$  bychom dostali  $R = (v_0^2 + g^2t^2 - 2gv_0t\sin\alpha)^{3/2}/g v_0\cos\alpha$ .
- 9.4 Rychlost, zrychlení, síla a energie se musí násobit koeficienty  $\lambda/r$ ,  $\lambda/r^2$ ,  $\mu\lambda/r^2$ ,  $\mu\lambda^2/r^2$ .
- 9.5  $x' = (\lambda^3/\mu r^2) x$ .
- 9.6  $x M_g = 4\pi^2 \cdot AU^3/r^2$ .
- 9.7 Násobíme-li délky koeficientem  $k$  a má-li hustota materiálů zůstat nezměněna, musíme násobit hmotnost koeficientem  $k^3$ . S použitím výsledku předchozí úlohy zjistíme, že se periody oběhu planet nezmění.
- 9.8 Ze zákona zachování energie  $g = (2M + m)v^2/2mh$ .
- 9.9 Při uvedeném způsobu zavěšení bude celkové zatížení gondoly  $F = 3T$ , kde  $T$  je napěťová síla závěsu. Tu dostaneme řešením pohybových rovnic  $m_P a_P = -m_P g - 2T$ ,  $m_F a_F = m_F g - T$ ,  $a_F = -2a_P$  (indexy F a P se vztahují ke jménům cestujících). Odtud  $F = 9m_P m_F g / (4m_F + m_P)$ . Zatížení loďky se tak zmenší na 1 445 N, tj. o pouhých 26 N. Kdyby si Paolo a Francesca vyměnili místa, gondole by se ulehčilo podstatně více, ale tento stav by zas trval kratší dobu.
- 9.10 Hmotnosti závaží A a B jsou v poměru měsíčního zrychlení  $g_M$  a zemského tíhového zrychlení  $g$ . Použijeme-li tento vztah v pohybových rovnicích obou těles na kladce, dostaneme  $m_B = 5,75$  kg.
- 9.11 a)  $a = F/(M_1 + M_2) - g$ , b)  $T = M_1 F/(M_1 + M_2)$ , c)  $a' = F/M_2 - g$ , d)  $t = \sqrt{2sM_2/\bar{F}}$ .
- 9.12 a)  $g/3$ , b) 112 kg.
- 9.13 Z podmínky plyne, že tíha závaží  $M_2$  musí být právě rovna napěťové síle nití, odkud zrychlení vozíku musí být rovno  $a = M_2 g/M_1$ . Potom  $F = (M + M_1 + M_2) M_2 g/M_1$ .
- 9.14 Označíme  $T$  napěťovou sílu nití, vodorovné zrychlení hmoty  $M + m$  jako  $a$  a svislé zrychlení  $m$  jako  $a_m$ . Máme  $ma_m = mg - T$ ,  $(m + M)a = 2T$ ,  $a_m = 2a$ , odkud  $a_m = 4mg/(M + 5m)$  a  $t = \sqrt{2d/a_m} = 1$  s.
- 9.15–9.18 Bez komentáře.

## KAPITOLA 10

- 10.1 Je-li  $m_2$  hmotnost tělesa v klidu a  $m_1$  hmotnost tělesa pohybujícího se rychlostí  $v_1$ , které do něho narazí, ze zákonů zachování hybnosti a energie zjistíme, že tělesa se po srážce rozletí rychlostmi

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Mají-li si být velikosti těchto rychlostí rovny, musí platit  $m_2 = 3m_1$ .

- 10.2 Malá změna rychlosti  $\Delta v = v/2$ . Bude-li jedno z těles před srážkou v klidu, bude se po srážce pohybovat rychlostí  $v - v/4$ , nalétající těleso bude pokračovat malou rychlostí  $v/4$ .
- 10.3 Rychlost družice pohybující se po kruhové dráze ve výšce  $h$  určíme jako  $v^2 = gR_z^2/(R_z + h) = gR_z(1 - h/R_z)$  a brzdicí sílu  $F = \rho S v^2 = 0,005 \text{ N}$  ( $\rho$  je hustota vzduchu,  $S$  obsah průřezu družice). Brzdicí síla vyvolá pokles družice a paradoxně vzrůst její rychlosti.
- 10.4 a) Počáteční zrychlení  $a = v_0 r_0 / M_0$ . b) Tažná síla  $F = r_0 v_0$ , odkud  $r_0 = 500 \text{ kg/s}$ , c)  $d v / v_0 = r_0 d t / (M_0 - r_0 t)$ ,  $v = v_0 \ln [M_0 / (M_0 - r_0 t)]$ .
- 10.5 Bez komentáře.
- 10.6  $v_T = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$  (rychlosti  $v_i$  jsou kladné v jednom směru a záporné v opačném směru).
- 10.7 Bez komentáře.
- 10.8  $T = T_T + \frac{1}{2} M v_T^2$ , kde  $M$  je celková hmotnost a  $T_T$  kinetická energie v těžiškové soustavě.
- 10.9 Ze zákonů zachování hybnosti a energie (viz výsledek úlohy 10.1) bude poměr kinetických energií neutronu po srážce a před ní  $E'/E = 121/169 = 0,72$ .
- 10.10 Rychlost kulky  $v = \frac{(M+m)x}{m} \sqrt{\frac{g}{L}}$ .

## KAPITOLA 11

- 11.1 a) 5 l + j, b) l + 3 j - 2 k, c) 3, d) 3, e) 3, f) 15 l - 18 j + 9 k.
- 11.2 a) Směr větru svírá se směrem pohybu cyklisty úhel  $139,5^\circ$ . b) Cyklista jedoucí opačným směrem pocítuje vítr pod úhlem  $141,3^\circ$ . V obou případech použijeme sinusovou větu.
- 11.3 Určíme závislost vzdálenosti obou lodí na čase a z podmínky minima zjistíme, že druhá loď míří přímo na sever a bude mjet záď naší lodí asi za 10 minut.
- 11.4 Bod na obvodu kola bude opisovat cykloidu (úloha 8.12). Jeho rychlost má velikost  $v = r \omega = v/R$ , kde  $r$  je průvodič bodu z bodu doteku s rovinou, a je k tomuto průvodiči kolmá.
- 11.5 Poměr  $t_1/t_2 = t_A/t_L = v/\sqrt{v^2 - u^2}$ .
- 11.6 Je-li rychlost plavání  $v$ , chůze  $u$  a rychlost toku řeky  $w$ , bude poměr dob potřebných k prvnímu a druhému způsobu překonání řeky  $t_1/t_2 = uv / [(w+u)\sqrt{v^2 - w^2}] = 5/4,5 = 1,1$ .
- 11.7 Z pohybových rovnic dostaneme a) 2 g, b)  $\sqrt{2} \text{ g}$ , c)  $F = Mg/\sqrt{2} = 2660 \text{ N}$ .
- 11.8 Dostředivá síla je výslednicí tíhové síly a napěťové síly nití a je rovna  $mgR/H = mv^2/R$ , kde  $R$  je poloměr dráhy. Potom perioda pohybu  $T = 2\pi R/v = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}$ .
- 11.9  $v_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i v_i$ , výraz pro kinetickou energii je formálně též jako v úloze 10.8.
- 11.10  $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 2(j + k) \text{ m/s}$ .
- 11.11  $T = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - v)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - v)^2 = 30 \text{ J}$ ,  $v = v_T$  (viz úlohu 11.10).
- 11.12 a) Ze zákona zachování hybnosti se těleso pohybuje rychlostí  $\sqrt{5} \text{ m/s}$  ve směru odchýleném od severu o  $26,5^\circ$  na západ. b) Ztratí se 3/4 původní kinetické energie, tj. 9 J. c) V těžiškové soustavě se lehčí těleso bude po srážce pohybovat na východ.
- 11.13 Bez komentáře.
- 11.14  $r_a(t) = 7(1+t)l + 3tj + 4,9(1+t^2)k \text{ m}$   
 $r_b(t) = 7(7-t)l + 3tj + 4,9(1+t^2)k \text{ m}$ .
- 11.15 Dostaneme  $\text{tg } \theta_1 = 3$ ,  $u_1 = 5v_1/8$ ,  $u_2 = v_1/8$ .
- 11.16 Platí  $\sin \theta_{\max} = m/M$ .
- 11.17 Platí  $\text{tg } \theta = [(M-m)/(M+m)]^{1/2}$ .

11.18 Zákon zachování energie v těžiškové soustavě musíme zapsat s ohledem na ztrátu části kinetické energie. Použijeme-li dále zákon zachování hybnosti a přejdeme do laboratorní soustavy, dostaneme  $\text{tg } \vartheta = [(\alpha^2 M^2 - m^2) (M + m)]^{1/2}$ .  
Uvažte, co se stane, bude-li  $\alpha < m / M$ .

11.19 a)  $r(0) = 0$ ,  $v(0) = \left( I + J - \frac{2}{\pi} k \right) \text{ m/s}$ ,  $a(0) = J \text{ m/s}^2$ ,  $T = \left( 1 + \frac{2}{\pi^2} \right) J$

$$r(1) = \left( I + \frac{3}{2} J - \frac{4}{\pi^2} k \right) \text{ m}, \quad v(1) = (I + 2J) \text{ m/s}, \quad a(1) = (J + k) \text{ m/s}^2, \quad T = 2,5 J$$

b)  $F = \left[ J + k \sin \left( \frac{2}{\pi} t \right) \right] \text{ N}$

c)  $R = 5\sqrt{30}/6 \text{ m} \approx 4,6 \text{ m}$  (viz též úlohu 9.3).

11.20  $r(t) = r_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 k$  (osa z míří vzhůru).

11.21 Označíme hledanou délku oblouku  $s$ , poloměr Země  $R_Z$ . Pak  $\cos(\angle R_Z) = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2$ .

11.22 Musíme sečíst dostředivá zrychlení Měsíce vzhledem k Zemi a vzhledem k Slunci. Pak dostaneme a)  $a_1 = 0,33 \text{ cm/s}^2$  směrem k Slunci, b)  $a_2 = 0,66 \text{ cm/s}^2$  pod úhlem  $\alpha = 24^\circ 13'$  vzhledem ke spojnici Měsíce a Slunce, c)  $a_3 = 0,87 \text{ cm/s}^2$  směrem k Slunci.

## KAPITOLA 12

12.1 a)  $a_y = -g \cos \vartheta (\mu + \text{tg } \vartheta)$

b)  $a_y = g \cos \vartheta (\mu - \text{tg } \vartheta)$

c)  $a_x = g (\mu \cos \vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi) \cos \varphi$ ,  $a_y = g (\mu \cos \vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi) \sin \varphi$ .

12.2 a)  $s = 0,68 \text{ m}$ , b)  $t = 1,1 \text{ s}$ , c)  $\Delta E = 2,2 \text{ J}$ .

12.3 Míří-li vodorovná síla přímo proti svahu, bude se těleso pohybovat vzhůru, překročí-li síla hodnotu  $F_{\min} = 3 \mu Mg / (2 - \mu^2)$ . Bude-li síla mířit od svahu, bude se těleso pohybovat dolů, překročí-li síla hodnotu  $F_{\min} = \mu Mg / (2 + \mu^2)$ .

12.4 Je-li  $T$  velikost napěťové síly úseku nití o délce  $1,5 \text{ m}$  a  $\alpha$  úhel, který svírá nit s tyčí v místě kroužku těsně před začátkem pohybu, platí  $T \cos \alpha = \mu T \sin \alpha$ , odkud  $\text{tg } \alpha = 1/\mu = 4/3$ . Pomocí sinové věty najdeme  $\vartheta = 90^\circ$ . Z rovnováhy sil pak dostaneme  $m = 3/5 \text{ kg}$ ,  $T = 4g/5 \text{ N}$ .

12.5 Těsně před tím, než se zámek dá do pohybu, budou tlaková síla  $N$ , kterou působí část  $B$ , síla tření a minimální síla  $F$  v rovnováze. Proto  $N = \sqrt{2} mg / (1 - \mu)$ ,  $F = (1 + \mu) mg / (1 - \mu)$ .

12.6 V pohybující se vztažné soustavě bude vedle tíhového zrychlení směrem vzhůru působit setrvačné zrychlení  $g \sin^2 \alpha$ . Odtud dostaneme náklon roviny  $\alpha = 30^\circ$ .

12.7 Zrychlení břemene  $a_2 = (M_1 - M_2) g / (4 M_1 + M_2) = g/9 = 1,06 \text{ m/s}^2$ , napěťová síla nití  $T = 4 M_1 M_2 g / (4 M_1 + M_2) = 2178 \text{ N}$ .

12.8 Označíme koeficient statického tření mezi kvádry  $\mu_{st}$ , smykového tření  $\mu$  a úhel náklonu roviny  $\alpha = 22^\circ 38'$ . Potom  $a = (\mu_{st} \cos \alpha - \sin \alpha) g = 0,75 \text{ m/s}^2$ ,  $F = (1/13 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha) (m_1 + m_2) g = 1962 \text{ N}$ .

12.9 V okamžiku, kdy se krychle začne pomalu dávat do pohybu, bude změna její potenciální energie právě rovna práci sil tření. Odtud dostaneme  $\text{tg } \vartheta = 1/(1 + 2\mu)$ . Pro  $\mu = 1$ ,  $\vartheta = 18^\circ 30'$ .

12.10 Z rovnováhy sil a momentů sil dostaneme  $x = 32 \text{ cm}$ .

12.11 Rozdíl napěťových sil je právě roven síle tření  $\Delta T = \mu N = \mu T \Delta \vartheta$ , kde  $\mu$  je koeficient tření a  $N$  kolmá tlaková síla. Pro konečný úhel  $\alpha$  dostaneme integraci  $T_2/T_1 = \exp(\mu \alpha)$ .

12.12 Úlohu řešíme v neinerciální vztažné soustavě spojené s deskou. Řešením pohybové rovnice dostaneme  $t = [2s/(a \cos \vartheta - g \sin \vartheta)]^{1/2} = 2,16 \text{ s}$ .

12.13  $[E] = \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$ ,  $[B] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$ ,  $[EB] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $[K] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

12.14 Poloměr trajektorie  $R = mv/qB$  ( $m$ ,  $v$ ,  $q$  jsou hmotnost, rychlost a náboj částice).

12.15  $T = 2\pi m/qB$ .

12.16 a)  $m\ddot{x} = qyB_z$ ,  $m\ddot{y} = qEx - qx\dot{B}_z$ ,  $m\ddot{z} = 0$ ,

b)  $m\dot{x}' = qy'B_z$ ,  $m\dot{y}' = -qx'B_z$ ,  $m\dot{z}' = 0$

V takto se pohybující soustavě (tzv. driftovej rychlosti) bude působit jen magnetické pole a částice se bude pohybovat po kružnici. V laboratorní soustavě bude částice opisovat cykloidu.

## KAPITOLA 14

14.1 a)  $F(0) = (4,5 I + 12 J - 2,6 k) \text{ N}$ , b)  $a(0) = (4,5 I + 12 J - 2,6 k) \text{ m/s}^2$ , c)  $T(0) = 2,5 \text{ J}$ , d)  $dT/dt = F(0) \cdot v(0) = 21,4 \text{ J/s}$ .

14.2 Použijeme-li řešení úlohy 14.1, dostaneme přibližně a)  $r(0,01) = r(0) + 0,01 v(0)$ , b)  $v(0,01) = v(0) + 0,01 a(0)$ , c)  $T = T(0) + 0,01 dT/dt = mv^2(0,01)/2 = 2,71 \text{ J}$ .



- 14.3 Pro obě trajektorie je práce síly  $F$  nulová. Aby však silové pole bylo konzervativní, musela by být tato práce nulová pro každou trajektorii. Zjistíme-li, že pro některou trajektorii to neplatí, dokážeme tím, že toto pole konzervativní není, což je náš případ.
- 14.4 1) 3 m/s; 2,5 m/s<sup>2</sup>; 45 W, 2) 4,5 m/s; 2,5 m/s<sup>2</sup>; 67,5 W.
- 14.5  $q = 4\pi \epsilon_0 \varphi R = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ .
- 14.6 Pro  $R_1 > R_2$ ,  $C = 4\pi \epsilon_0 R_1 R_2 / (R_1 - R_2) F$ .
- 14.7 1409 V.
- 14.8  $a = 7,2 \text{ m/s}^2$ .
- 14.9 Změnu potenciální energie kabelu přirovnáme jeho kinetické energii, odkud  $v = \sqrt{g L/2}$ . Údaj o lineární hmotnosti kabelu jsme nepotřebovali.
- 14.10 Máme  $S = 35 \text{ cm}^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $h = 4,8 \text{ m}$ ,  $h_0 = 2,4 \text{ m}$ .  
Rychlost vody u ústí hadice  $v = \sqrt{2hg/\sin^2\alpha} = \sqrt{8hg}$ . Pumpa musí zvednout každou sekundu množství vody o hmotnosti  $\rho S v$  do výšky  $h_0$  a dodat jí potřebnou kinetickou energii. S uvažováním účinnosti pumpy  $\eta$  dostaneme výkon  $P = \rho g v S (h_0 + 4h)/\eta = 25 \text{ kW}$ .
- 14.11 Označíme počáteční výšku  $h = 1,8 \text{ m}$ , dálku doletu  $s$  a hmotnost vrhaného nářadí  $M$ . Z rovnice trajektorie šikmého vrhu určíme počáteční rychlost  $v = \sqrt{gs^2/(s+h)}$  a práci  $W = mgs^2/2(s+h)$ . To odpovídá u koule 646 J, disku 588 J a oštěpu 328 J.
- 14.12 Označíme hmotnost automobilu  $M$ , výkon na rovině  $P_r$  a maximální výkon  $P_{\max}$ . Při stoupání musí automobil vedle tření překonávat i svislou složku tíhové síly. Maximální úhel stoupání dostaneme ze vztahu  $\sin\alpha = (P_{\max} - P_r)/Mgv = 0,30$ .
- 14.13 Pro  $r < R$  potenciál  $\psi(r) = xM(r^2/2R^3 - 3/2R)$ , intenzita  $K(r) = xMr/R^3$ ; pro  $r \geq R$ ,  $\psi(r) = -xM/r$ ,  $K(r) = xM/R^2$ .
- 14.14 Závažička dopadne z výšky  $h$  rychlostí  $v = \sqrt{2hg}$ ; podle zákona zachování hybnosti se miska o hmotnosti  $m_m$  se závažíčkem o hmotnosti  $m_z$  začnou pohybovat dolů rychlostí  $v' = m_z v / (m_z + m_m)$  tak dlouho, dokud jejich celková kinetická a tíhová potenciální energie nepřejdou v potenciální energii roztážené pružiny tuhostí  $k$ . Miska se závažíčkem přitom klesnou o  $h' = m_z g/k + [m_z g/k + 2m_z h/(m_m + m_z)]^{1/2} = 10,1 \text{ cm}$ .
- 14.15 Bude-li na pružinu v nové rovnovážné poloze  $x_0$  působit další síla  $F'$ , která vyvolá malou výchylku  $x$ , bude celková výchylka  $x_0 + x = (F + F')/k$ . Tedy i v nové rovnovážné poloze bude platit  $F' = kx$  s toutéž tuhostí  $k$ .
- 14.16 V horním bodu smyčky musí být tíhová síla  $mg$  právě rovna dostředivé síle  $mv^2/R$  působící na vozík. Vozík musí být vypuštěn z takové výšky  $h$  nad smyčkou, aby jeho potenciální energie vzhledem k hornímu bodu smyčky byla rovna jeho kinetické energii, tedy  $h = R/2$ .
- 14.17 Hmotný bod se odtrhne v okamžiku, kdy projde oblouk o středovém úhlu  $\alpha$  a kdy jeho obvodová rychlost bude splňovat podmínku  $v^2/R = g \cos\alpha$ , tj. radiální složka tíhového zrychlení bude právě rovna dostředivému zrychlení. Podle zákona zachování energie  $mv^2/2 = mgR(1 - \cos\alpha)$  dostaneme  $\cos\alpha = 2/3$ . Hmotný bod tedy klesne o svislou vzdálenost  $R/3$  a projde dráhu  $s = 0,84 R$ .
- 14.18 Pohyb probíhá v poli konzervativních sil, takže součet kinetické a potenciální energie nezávisí na poloze tělesa. Proto můžeme určit celkovou energii v perigeu a apogeu trajektorie a použít druhý Keplerův zákon  $v_p r_p = v_a r_a$ . Z těchto vztahů můžeme vyloučit rychlosti  $v_p$ ,  $v_a$  a excentricitu  $e$ . Pro energii pak dostaneme  $E = -x m M/2a$ .
- 14.19 Bez komentáře.
- 14.20 Označíme  $v_0$  rychlost, s níž je těleso vypuštěno, v hledanou rychlost ve vzdálenosti  $r$  od Země a  $v_2$  druhou kosmickou rychlost. Ze zákona zachování energie  $v = [v_0^2 - v_2^2 (r - R_z)/R_z]^{1/2} = 4,78 \text{ km/s}$ .
- 14.21 Součet potenciální energie vzhledem k Zemi, potenciální energie vzhledem k Slunci a kinetické energie se zachovává a rovná se výsledné kinetické energii. Odtud dostaneme hledanou rychlost  $v = 47 \text{ km/s}$ . Využijeme-li oběžné rychlosti Země kolem Slunce, stačí vystřelit loď rychlostí 17 km/s ve směru pohybu Země.
- 14.22 Nejméně výhodný směr pohybu lodí by byl proti směru pohybu Země kolem Slunce a vyžádal by si rychlost 77 km/s.
- 14.23 Eliptická trajektorie kosmické lodí podle třetího Keplerova zákona musí mít stejně velkou hlavní poloosu jako trajektorie Země a v periheliu se bude velmi přibližovat Slunci. Platí též, že kosmická loď a Země mají v téže vzdálenosti od Slunce (tj. když se míjejí) stejnou velikost rychlosti vzhledem k Slunci. Uvážíme-li ještě, že kosmická loď musí získat dodatečnou kinetickou energii k odpoutání od zemské přitažlivosti, zjistíme, že musí být vypuštěna rychlostí 42 km/s ve směru 41° vzhledem ke směru spojnice Země – Slunce odečítaného v opačném smyslu než probíhá oběh Země. Existuje ještě jedno, energeticky méně výhodné řešení vypuštění lodí v místě druhého průsečíku trajektorí Země a lodí. Můžete se pokusit určit potřebnou rychlost v tomto případě.
- 14.24 Použijeme princip superpozice; výsledné zrychlení je dáno jako rozdíl zrychlení vyvolaného plnou koulí a menší, odebranou koulí. Jest

$$a = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{x \rho}{(x+R)^2} \left[ 1 - \left( 8 + \frac{2R}{x+R} \right)^{-2} \right]$$

## KAPITOLA 15

- 15.1 Zpětnou Lorentzovu transformaci dostaneme, vyměníme-li čárkované a nečárkované souřadnice a změníme znaménko rychlosti soustavy  $u$ .
- 15.2 Analýza ukáže, že pohybující se hodiny půjdou pomaleji než nehybné bez ohledu na jejich prostorovou orientaci.

- 15.3 a) Pozorovaná doba života mionu  $t = 1,67 \cdot 10^{-6}$  s, vlastní doba života  $\tau = 2,33 \cdot 10^{-6}$  s. b) Vrstva atmosféry v soustavě spojené s mionem má tloušťku  $d = 0,71$  km.
- 15.4 a) 86 kg, b)  $3,5 \cdot 10^{-3}$  kg/s.
- 15.5  $6,2 \cdot 10^8$  t/s.
- 15.6 Derivováním  $x$  podle času určíme rychlost  $v$  a zrychlení  $dv/dt$ . Dosazením do relativistické pohybové rovnice
- $$F = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \text{ najdeme } F = m_0 c^2/a = \text{konst.}$$
- 15.7 a)  $g = 1,03$  světelných roků za rok na druhou. b) S použitím výsledku úlohy 15.6 zjistíme, že loď uletí vzdálenost 4,15 ly a dosáhne rychlost 0,98  $c$ .

## KAPITOLA 16

- 16.1 Dostaneme vzorce pro relativistickou transformaci složek rychlosti  $v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}$ ,  $v_{y,z} = \frac{v'_{y,z} \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + uv'_x/c^2}$ .
- 16.2  $v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$ ,  $a'_x = dv'_x/dt' = \frac{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}{(1 - uv_x/c^2)^3} a_x$
- 16.3 Bez komentáře.
- 16.4 Přejdeme do vztažné soustavy, v níž se obě částice pohybují proti sobě stejnou rychlostí  $\alpha/2$  a mají relativistickou hmotnost  $m$  (viz odstavce 16.3). Nová částice vzniklá nepružnou srážkou bude v této soustavě v klidu a bude mít hmotnost  $2m = 4 m_0/\sqrt{3}$ . V laboratorní soustavě se bude pohybovat rychlostí  $\alpha/2$ .
- 16.5 Ve vztažné soustavě, v níž se nalétající a terčové protony přibližují stejnou rychlostí  $u$ , budou vznikající protony a antiprotony v klidu. Z podmínky  $2m_p/\sqrt{1 - u^2/c^2} = 4m_p$  dostaneme  $u = \sqrt{3}c/2$ . Potom rychlost urychlovaných protonů v laboratorní soustavě  $v = 2u/(1 + u^2/c^2) = 4\sqrt{3}c/7$ . Jejich prahová kinetická energie, na níž je třeba urychlovač projektovat, je tedy  $E_{pr} = (m_v - m_p)c^2 = 6,00 m_p c^2 = 5,628$  GeV.

## KAPITOLA 17

- 17.1 Označíme  $t = 10^6 r$ , energii protonu  $E = E_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Pak doba, která uplyne ve vlastní soustavě protonu je  $\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2} = tE_0/E = 10^{-6} r = 5$  min.
- 17.2 Bez komentáře.
- 17.3 Použijeme soustavu jednotek, v níž  $c=1$ . Označíme hybnosti mionu a neutrina  $p_\mu$  a  $p_\nu$ , klidové hmotnosti pionu a mionu  $m_\pi$  a  $m_\mu$ . Ze zák. zachování hybnosti  $p_\mu = p_\nu$ , zák. zachování energie nám dá  $m_\pi = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} + p_\nu$ . Odtud  $p_\mu = 29,8$  MeV,  $T_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} - m_\mu = 4,1$  MeV,  $T_\nu = E_\nu = p_\nu = 29,8$  MeV.
- 17.4 Použijeme výsledek úlohy 12.4, který platí i v relativistickém případě. V uvedených jednotkách dostaneme  $p = 300$  ZBR.
- 17.5 a) Použijeme-li výsledek úlohy 17.4 a vztah mezi hybností  $p$ , kinetickou energií  $T$  a klidovou hmotností  $m_0$ :  $p = \sqrt{T(T + 2m_0)}$ , dostaneme  $R = p/300$   $B = \sqrt{T(T + 2m_0)}/300$   $B = 1,84$  m
- b) V našem případě relativistická hmotnost  $m = 2 m_0/\sqrt{3}$  a frekvence  $f = 300$  Bcl/2  $\pi m = 300 \sqrt{3}$  Bcl/4  $\pi m_0 = 1,3 \cdot 10^7$  s $^{-1}$ .
- c) Frekvence oběhu se mění v rozsahu  $1,5 \cdot 10^7$  s $^{-1} \pm 1,3 \cdot 10^8$  s $^{-1}$ , tedy asi o 13 %.

## KAPITOLA 18

- 18.1 a) 140 N · m, b) 2,8 m, c) 14 N.
- 18.2 Obvodová rychlost bodu na povrchu Země  $R_2 \omega \cos \varphi$ , kde  $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$  s $^{-1}$ , a  $\varphi$  je zeměpisná šířka. Pro L. A.  $\varphi_1 = 34^\circ$ , hledaná šířka  $\varphi = 66,6^\circ$ .
- 18.3 Ze vztahů pro rovnováhu složek působících sil a momentů sil vzhledem k bodu  $O$  najdeme velikost výsledné síly, která udrží destičku v rovnováze jako  $F = 20,5$  N, její působíště 0,34 m na přímce  $AB$  vlevo od bodu  $O$  a směr rovnoběžný se směrem síly působící v bodě  $O$ .
- 18.4 Náraz musí mířit směrem na těžiště úhelničky, tj. ve vzdálenosti 7,5 cm od bodu  $O$ .
- 18.5 Vyjádříme podmínky rovnováhy sil a momentů sil. Odtud  $F_1 = F_g/3$ ,  $F_2 = 2F_g/3$ . Určíme-li postupně napěťové síly působící v bodech  $G$  a  $F$  zjistíme, že tyč  $DF$  je namáhána stlačením silou  $F = 4F_g/3\sqrt{3}$ .
- 18.6 Integrováním určíme a)  $m l^2/3$ , b)  $m l^2/12$ , c)  $m r^2$ , d)  $m r^2/2$ .
- 18.7 Řešením pohybové rovnice pro závaží  $ma = mg - T$  a pro otáčivý pohyb válce  $l\epsilon = Tr$  ( $T$  je napěťová síla vláknem,  $l$  moment setrvačnosti válce,  $\epsilon = a/r$  úhlové zrychlení válce) dostaneme  $a = mg/(m + M/2)$ .

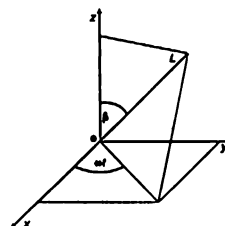
- 18.8 a)  $v_2 = r_1 v_1 / r_2$ , b)  $m v_1^2 (r_1^2 - r_2^2) / 2 r_2^2$ , c)  $m v^2 / r$ .
- 18.9 Moment hybnosti orbitálního pohybu planety je  $m v R = m \sqrt{\chi M R}$  ( $M$  je hmotnost Slunce). Uvážíme-li všechny rotační pohyby v soustavě Země–Měsíc, zjistíme, že moment hybnosti této soustavy je přibližně roven  $L = M_m \sqrt{\chi M_Z R + L_Z}$ , kde  $M_m$  je hmotnost Měsíce,  $M_Z$  hmotnost Země,  $R$  vzdálenost Země–Měsíc a  $L_Z$  moment hybnosti zemské rotace. Protože slapové síly postupně zpomalují zemskou rotaci a zmenšují tak veličinu  $L_Z$ , přičemž se celkový moment  $L$  zachovává, bude se  $R$  postupně zvětšovat. Celková rotační energie soustavy se přitom bude slapovým působením samozřejmě zmenšovat.
- 18.10  $M_2 = 0,25$  kg.
- 18.11 Z rovnováhy tíhových a odstředivých sil působících na hmotnosti  $M$  a na objímku  $C$  o hmotnosti  $m$  dostaneme  $M = mg / (\omega^2 l / \sqrt{2} - g)$  ( $l$  je délka ramen,  $\omega$  úhlová rychlost rotace).
- 18.12 Potřebný výkon  $P = F v = 2 \mu m \omega^3 r^2$ .
- 18.13 Hromádka se zhroutí, bude-li těžiště celé soustavy destiček procházet mimo základnu. Označme vodorovnou vzdálenost těžiště od středu nejnižší destičky  $x_T$ . Protože těžiště  $x_i$  každé další položené destičky se posouvá (téměř) o délku  $l/2$ , dostaneme pro  $n$  stejných destiček naložených na základní destičku  $x_T = (x_1 + \dots + x_n) / n = L(1 + 2 + \dots + n) / n a = L(n+1) / 2 a$ . Přesáhne-li  $x_T = l/2$ , tj.  $n = a - 1$ , hromádka se zhroutí. Je zajímavé, že pokud nejvyšší destička bude vzhledem k destičce pod ní posunuta téměř o  $l/2$  a ta vzhledem k níže ležící téměř o  $l/4$ , dále o  $l/6$ ,  $l/8$  atd. zůstane hromádka vždy stabilní. Může přitom obsahovat libovolný počet destiček a vrchní destička může být vzhledem k nejspodnější posunuta o libovolnou vzdálenost.

## KAPITOLA 19

- 19.1 Moment setrvačnosti každé z tyčí je v prvním uspořádání  $4 M l^2 / 3$ , v druhém  $M l^2 / 3$ . Celkový moment setrvačnosti soustavy včetně vnitřního mechanismu je v prvním případě  $24 M l^2$ , v druhém  $16 M l^2$ . Protože celkový moment hybnosti se zachovává, změní se úhlová rychlost na  $\omega = 3 \omega_0 / 2$ . Změnu energie pak určíme jako  $\Delta E = 6 M l^2 \omega_0^2$ .
- 19.2 a) Potenciální energii určíme jako práci momentu vnějších sil integrací přes úhel  $\theta$ .  
b) Moment hybnosti rámečku získáme ze vztahu  $dL/dt = n A B l dq/dt$  jako  $L = n A B Q_0$ . Na počátku pohybu má rámeček kinetickou energii  $E_k = n^2 A^2 B^2 q_0^2 / 2I$  ( $I$  je jeho moment setrvačnosti), a ta se změní v potenciální energii registračního zařízení, takže podle a) bude maximální úhel odklonění  $\theta_{\max} = n A B Q_0 / \sqrt{kI}$ .
- 19.3  $I = M l^2 / 12$ , nezávisí na úhlu  $\theta$ .
- 19.4 Je-li  $r_3^2 = r_2^2 - r_1^2$ .
- 19.5 Podle Pappovy věty  $V = 2 \pi R \cdot \pi R^2 = 2 \pi^2 R^3$ .
- 19.6 Těžištěm.
- 19.7 Poměr úhlové rychlosti v okamžiku uvolnění závaží  $\omega$  a původní úhlové rychlosti  $\omega_0$  plyne ze zákona zachování momentu hybnosti:  $\omega / \omega_0 = (M R^2 + 4 m R^2) / [(M R^2 + 4 m (R + h)^2) = 1/n$ . Odtud  $I = R \sqrt{n + M(n-1) / 4 m - 1}$ .
- 19.8 Provedeme transformaci souřadnic, rychlostí a zrychlení při potočení úhel  $\theta$  a dostaneme  $F'_x = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta + 2 m \dot{\theta} \omega + m \omega^2 x'$ ,  $F'_y = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta - 2 m \dot{\theta} \omega + m \omega^2 y'$ . Předposlední členy odpovídají síle Coriolisové, poslední členy síle odstředivé.
- 19.9 Jediná síla, která na kouli působí ve vodorovném směru, je síla tření  $F_t = \mu g M$ . Přechod od klouzání k valení nastane v okamžiku, kdy rychlost bodu dotyku koule s rovinou klesne k nule. Označíme-li  $v_T = v_0 - \mu g t$  rychlost těžiště koule a  $\omega = 5 \mu g t / R$  úhlovou rychlost rotace způsobenou momentem síly tření, dostaneme podmínku  $v_T - \omega R = 0$ . Přechod tedy nastane v okamžiku  $t_1 = 2 v_0 / 7 \mu g$ , ve vzdálenosti  $s = v_0 t_1 - a t_1^2 / 2 = 12 v_0^2 / 49 \mu g$  při rychlosti  $v = v_0 - \mu g t_1 = 5 v_0 / 7$ .
- 19.10 Tíhovou sílu, kterou hřídel  $T$  působí na buben  $K$  a válec  $P$  rozložíme do směru  $TP$  a do směru kolmého. Podmínka pro mezní hodnotu tečné síly  $F$  mezi válcem  $P$  a hřídelí  $T$ , aby se neztratil kontakt s bubnem  $K$ , je  $F \leq M g \cos \theta$ . Tato mezní síla uděluje hřídeli  $T$  úhlové zrychlení  $\varepsilon_T = 2 g \cos \theta / R$ , odkud dostaneme úhlové zrychlení válce  $P$ :  $\varepsilon = 2 g \cos \theta / R$ .
- 19.11 Určíme-li polohu těžišť (jednotlivých kvadrantů a zvažíme je příslušnými hustotami, dostaneme polohu těžiště válce  $x_T = -2 \sqrt{2} R / 15$ ,  $y_T = -\sqrt{2} R / 15$  ( $R$  je poloměr válce) a rovnici hledané přímky  $y = x/2$ .
- 19.12 Poloha těžiště ve středu plného kotouče je rovna poloze těžiště daného útvaru, k níž přičteme polohu těžiště vyřiznuté části, takže  $x_T = R/6 = 1,67$  cm.
- 19.13 Integrací podle definice těžiště dostaneme jeho  $x$ -ovou souřadnici  $x_T = 2 R \sin(\alpha/2) / \alpha$ ,  $\alpha = L/R$ . Můžeme též použít Pappovu větu.
- 19.14  $x_T = 4 R \sin(\alpha/2) / 3\alpha$ .
- 19.15 Nejdříve určíme polohu těžiště složeného tělesa ( $x_T = -\sqrt{3}/2$  cm,  $y_T = -1/2$  cm). Z rovnic rovnováhy působících sil a momentů sil najdeme sílu, kterou válec působí na stěnu:  $F = 3\sqrt{3} g / 2 \pi \approx 8,1$  N. Po odstranění stěny udržíme těleso v rovnováze momentem dodatečné tíhové síly závaží na úsečce  $OA$  ve vzdálenosti  $r = 3\sqrt{3} M / 2 m$  cm.
- 19.16 Bod  $P$  musí být těžištěm destičky s vyřiznutým trojúhelníkem. Podobně jako v úloze 19.12 určíme  $h = a(3 - \sqrt{3}) / 2 = 0,63 a$ .
- 19.17 a) Nit musí mít visivší směr. b) Z pohybových rovnic najdeme pro postupný a otáčivý pohyb cívky zrychlení  $a = g / (1 + R^2 / 2 r^2)$ .
- 19.18 a) Ze zachování momentu hybnosti  $\omega = (I_0 + m R^2) \omega_0 / (I_0 + m r^2)$ . c) Kinetická energie bude rovna práci odstředivé síly, a proto hledaná rychlost  $v = \sqrt{(I_0 + m R^2) (R^2 - r^2) \omega_0^2 / (I_0 + m r^2)}$ .

## KAPITOLA 20

- 20.1 Bez komentáře.
- 20.2 Bez komentáře.
- 20.3 Malý úhel pootočení můžeme považovat za vektor mířící ve směru osy rotace v pravotočivém smyslu. Při postupném pootočení o dva malé úhly  $\Delta \vartheta_1$  a  $\Delta \vartheta_2$ , jejichž osy svírají úhel  $\alpha$ , bude výsledný pohyb ekvivalentní jednomu pootočení o úhel  $\Delta \vartheta = \sqrt{\Delta \vartheta_1^2 + \Delta \vartheta_2^2} + 2 \Delta \vartheta_1 \Delta \vartheta_2 \cos \alpha$  ve směru výslednice vektorů obou úhlů. To lze zobecnit na více následných pootočení. Zároveň odtud plyne, že i úhlové rychlosti pohybu tělesa lze sčítat jako vektory.
- 20.4 Bez komentáře.
- 20.5 Plyne z geometrické interpretace smíšeného součinu vektorů, v daném případě je objem rovnoběžnostěny 406 objemových jednotek.
- 20.6 Při nárazu bude tělesu předána hybnost  $p$ , těžiště se začne pohybovat posuvnou rychlostí  $v = p/2$  m a těleso bude rotovat kolem osy procházející těžištěm úhlovou rychlostí  $\omega = 9p/5ml$  ( $m$  a  $l$  jsou hmotnost a délka každé z tyčí). Moment setrvačnosti tělesa je  $I = 5m l^2/12$ . Těžiště každé z tyčí se pohybuje rychlostí, která je vektorovým součtem rychlosti těžiště tělesa (ve směru osy  $x$ ) a rychlosti rotačního pohybu o velikosti  $v_r = 9p/10\sqrt{2}$  m pod úhlem  $45^\circ$  k ose  $x$  a opačným směrem. Pro poměr velikostí výsledných rychlostí dostaneme  $\sqrt{41/221} = 0,43$ .
- 20.7 Označme úhel mezi osou rotace a osou kotouče  $\alpha = 1^\circ$ . Lze ukázat, že vektor momentu hybnosti  $L$  bude svírat s osou rotace malý úhel  $\beta = \alpha^2$  a jeho složky se budou měnit v čase jako  $L_x = \beta L \cos \omega t$ ,  $L_y = \beta L \sin \omega t$ , kde  $L = \sqrt{5} M R^2 \omega/4$ . Přitom osa  $z$  je osou rotace,  $M$  hmotnost,  $R$  poloměr a  $\omega$  úhlová rychlost kotouče (viz obrázek). Z pohybových rovnic pro změnu složek momentu hybnosti dostaneme velikost momentu sil působícího v ložiscích:  $N = dL/dt$ ,  $N = \beta \omega L = 30 N \cdot m$ .



- 20.8 Určíme síly působící na každé z těles a z nich výsledný silový moment  $N = 2x m M r^2 \sin 2\theta/R^3$ .
- 20.9 Působící silové momenty jsou v poměru  $M/R^3$ , kde  $M$  je hmotnost a  $R$  vzdálenost Slunce, respektive Měsíce. Měsíc působí na Zemi asi dvakrát větším momentem než Slunce.
- 20.10 a)  $I = 8,1 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ; b)  $L = 5,9 \cdot 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ; c)  $T = 2,1 \cdot 10^{29} \text{ J}$ .
- 20.11 Ze zákona zachování energie  $v = \sqrt{2Mgh/(M + Jr^2)}$ . To dává pro kouli  $v = \sqrt{6gh/5}$ , kotouč  $v = \sqrt{4gh/3}$  a ve třetím případě

$$v = \sqrt{\frac{4(M_1 + m_2)gh}{3M_1 + m_2[2 + (r_2/R_1)^2]}}$$

- 20.12 a) Před nárazem i po něm  $v_T = v/2$ ; b)  $Mv/4$ ; c)  $6v/5$ ; d) kinetická energie se zmenší o  $Mv^2/10$ .
- 20.13 Při uvažované změně rozložení hmoty na povrchu Země by zůstal součin momentu setrvačnosti  $I$  a úhlové rychlosti  $\omega$  nezměněn. Při změně momentu setrvačnosti o  $\Delta I$  by se změnila úhlová rychlost o  $\Delta \omega$  a perioda rotace o  $\Delta T = T \Delta I/I$ . Předpokládáme-li, že voda v podobě polárního ledu k momentu setrvačnosti Země téměř nepřispívá a po roztání vytvořila rovnoměrnou kulovou slupku na celém zemském povrchu, dostaneme  $\Delta I = 8\pi \rho R^4 \Delta R/3$  a  $\Delta T = 8\pi \rho R^4 T \Delta R/3 I = 1 \text{ s}$ .
- 20.14 a) Rychlost těžiště po nárazu  $v_0 = J/M$ , úhlová rychlost  $\omega = 12J/I M^2$  a rychlost bodu  $A$   $v_A = J(1 - 6r/I)M$ ; b)  $AP = 2R/3$ .

## KAPITOLA 21

- 21.1 Jde o tzv. fyzické kyvadlo. a)  $I\ddot{\theta} + Mg d \sin \theta = 0$ ; b)  $T = 2\pi \sqrt{I/Mgd}$  ( $I$  je moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace).
- 21.2 Je-li  $I_T$  moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm,  $T = 2\pi \sqrt{(I_T + Md^2)/Mgd}$ . a) Dané hodnotě odpovídají  $d_{1,2} = gT^2/8\pi^2 \pm \sqrt{g^2 T^4/64\pi^2 - I_T/M}$ . c) Uvedené hodnotě  $d$  odpovídá  $T_{\min} = 2\pi \sqrt{2d/g}$ .
- 21.3 Koeficient tuhosti pružiny je  $k = mg/A$ . Spojí-li se obě závaží, bude soustava kmitat kolem rovnovážné polohy dané protažením pružiny na délku  $D + 2A$  s periodou  $T = 2\pi \sqrt{2A/g}$ . Amplitudu určíme z počáteční podmínky dané tím, že pružina byla rozkmitána dopadem závaží  $m$  jako  $a = A/\sqrt{2}$ . Při kmitání vystoupí spojená závaží nejvýše o  $A = (\sqrt{2} - 1)$  nad původní rovnovážnou polohu před dopadem druhého závaží.
- 21.4 a) 2,17 cm; b)  $50 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- 21.5 Určíme-li moment setrvačnosti a polohu těžiště kostry, dostaneme  $T = 2\pi \sqrt{(2/3 + \pi)R/2g} = 1,38 \text{ s}$ .
- 21.6 Označíme  $m = 20 \text{ g}$ ,  $m_1 = 5 \text{ g}$ ,  $m_2 = 25 \text{ g}$ . Tuhost pružiny je pak  $k = 36(m + m_1)$  a výchylka  $d = (m_2 - m_1)g/k = 21,8 \text{ cm}$ .
- 21.7 Je-li rychlost nárazu  $v$ , bude se po nárazu těžiště soustavy pohybovat rychlostí  $v_T = v/8$ . V těžišťové soustavě bude dvojice částic, každá o hmotnosti  $M$ , spojených pružinou harmonicky kmitat proti sobě s periodou  $T = 2\pi \sqrt{M/2k}$  a amplitudou  $a = (v\sqrt{M/2k})/4$ .
- 21.8 Jde o kvazielastický pohyb s konstantou  $k = mg/R_2$  a periodou  $T = 2\pi \sqrt{R/g}$ . Těleso se propadne za dobu  $T/2 = 42 \text{ min}$ .
- 21.9  $dn/dt = an$ .

21.10 Bod závěsu zvolíme za počátek neinerciální vztažné soustavy a zahrneme působící setrvačnou sílu. Je-li amplituda kmitů závěsu  $a$  a jejich úhlová rychlost  $\omega$ , dostaneme pro malé kmity pohybovou rovnici  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{a\omega^2}{l}\sin\omega t$ .

Řešením této nehomogenní diferenciální rovnice dostaneme pro amplitudu ustálených kmitů  $A = aT_0^2/(T^2 - T_0^2) = 4,7$  cm. ( $T$  je perioda kyvadla,  $T_0$  perioda závěsu.)

## KAPITOLA 22

Úlohy 22.1–22.10 představují důkazy vztahů známých z algebry komplexních čísel.

22.11  $\log_{11} 2 = 0,28906$ ,  $\log_{11} 7 = 0,81146$ .

## KAPITOLA 23

23.1 Je-li komplexní napětí  $\hat{U} = U_0 \exp(i\omega t)$ , dostaneme komplexní proudy ze vztahu analogického Ohmova zákona  $\hat{I} = \hat{U}/\hat{Z}$ . Komplexní impedance a)  $\hat{Z}_L = i\omega L$ , b)  $\hat{Z}_C = 1/i\omega C$ .

23.2 a)  $\hat{Z}_C = i\omega L + 1/i\omega C$ , b)  $(1/i\omega L + i\omega C)^{-1}$ .

23.3 c) Pro  $\gamma > 2\omega_0$  bude mít řešení tvar  $x = e^{-\gamma t/2} [A \exp(-t\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}) + B \exp(t\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2})]$ .

23.4  $A, B = \frac{1}{2} \left[ x_0 \mp \frac{v_0 + (\gamma x_0/2)}{\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}} \right]$ .

23.5 Komplexní napětí mezi body A a B je  $\hat{U}_{\text{vst}} = -\frac{1}{2} \hat{U}_{\text{vst}} \frac{R + i\omega C}{R - i\omega C}$ .

23.6 a)  $RF/C/L = 1$ ; b)  $I_A(t) = \frac{U_0 \cos(\omega t + \varphi_1)}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}$ ,  $I_B(t) = \frac{U_0 \cos(\omega t + \varphi_2)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ ,  $\text{tg } \varphi_1 = 1/\omega RC$ ,  $\text{tg } \varphi_2 = -\omega LR$ .

## KAPITOLA 24

24.1 Rovnice  $m\ddot{x} + kx = 0$ ; označíme  $k/m = \gamma$  a zvolíme počáteční podmínky  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ . Řešení  $x = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$ ,  $v = v_0 e^{-\gamma t} = v_0 - \gamma x$ .

24.2 Rovnice  $\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}U = 0$ ,  $U = U_0 e^{-t/RC}$ .

24.3 Rovnice  $\ddot{x} + \gamma \dot{x} = F_0/m$ . Řešením dostaneme rychlost  $v = F_0/m\gamma + Ce^{-\gamma t}$ , která se pro velká  $t$  blíží  $F_0/m\gamma$ . Pro počáteční podmínky  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = 0$  najdeme řešení  $x = F_0/\gamma (e^{-\gamma t} - 1 + \gamma t)/m\gamma^2$ .

24.4 a)  $U = U_0 \cos(t/\sqrt{LC})$ ; b) Jde o hustoty energie elektrického pole v kondenzátoru a magnetického pole v cívice a mění se jako  $1/2 CU_0^2 \cos^2(t/\sqrt{LC})$  a  $1/2 CU_0^2 \sin^2(t/\sqrt{LC})$  (jejich součet zůstává konstantní).

24.5 Podobně jako v úloze 24.4 najdeme  $U = (U_0/R) \sqrt{LC} \sin(t/\sqrt{LC})$ , takže maximální napětí  $U_{\text{max}} = (U_0/R) \sqrt{LC}$ .

24.6 Původní perioda  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 1$  s, nová perioda po zavedení útlumu  $\gamma$  je  $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ . Z udaných podmínek určíme  $\gamma = 0,1386 \text{ s}^{-1} \cdot \omega_0$ . a) Pohybová rovnice  $\ddot{x} + 0,1386 \dot{x} + 39,478 x = 0$ ; b)  $T = 1,00006$  s; c) za 20 period, za 34 period; d) Řešením pohybové rovnice dostaneme maximální ztrátový výkon 1,1 W.

24.7 1. Řešením rovnice  $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F/m$ , kde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , najdeme

a)  $x = (F_0/m\omega_0^2) [1 - e^{-\gamma t/2} (\cos \omega t + \gamma/2\omega \sin \omega t)]$ , kde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ ,  $\gamma < 2\omega_0$ ;

b)  $x = (p_0/m\omega) e^{-\gamma t/2} \sin \omega t$ .

c)  $x = (F_0/\gamma m) [(1/\omega_0) \sin \omega_0 t - (1/\omega) e^{-\gamma t/2} \sin \omega t]$ .

2. Při  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$  nastává rezonance s amplitudou  $F_0/m\gamma\omega$ .

## KAPITOLA 25

25.1 V ustáleném režimu  $U_{\text{vst}} = U_0 \cdot [U_2/(1 + R^2 C^2 \omega^2)] [\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t]$ . Amplituda střídavé složky je potlačena 7,6 krát.

25.2 Bez komentáře.

25.3  $U_{\text{vst}} = -CRU_0 \omega \sin \omega t = CR(dU_{\text{vst}}/dt)$ .

25.4 Například obvod z úlohy 25.2, v němž zaměníme vstup a výstup.

25.5 a) V průběhu první půlperrody kmitů máme  $\ddot{x} + \omega^2 x = fg$ , kde  $\omega = \sqrt{k/m}$  a  $f$  je koeficient tření. Řešení vyhovující počátečním podmínkám je  $x = (A - fg/\omega^2) \cos \omega t + fg/\omega^2$ .

Během každé půlperrody klesne amplituda o  $2fg/\omega^2$ .

b)  $A \geq B + 2fg/\omega^2$ .

## KAPITOLA 26

- 26.1 Vezmeme-li za proměnnou veličinu vzdálenost bodu  $K$  od zdi, můžeme vyjádřit celkovou dobu chůze jako funkci této vzdálenosti a najít její minimum. Odpovídá mu vzdálenost  $KC = 27$  m. Týž výsledek bychom dostali z představy, že se takto láme světlý paprsek podle zákona  $\sin \alpha / \sin \beta = v_1 / v_2$ , kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou úhly dopadu a lomu na rozhraní a  $v_1, v_2$  rychlostí pohybu po chodníku a po poli.
- 26.2 Je-li  $\alpha$  úhel dopadu paprsku na destičku a  $\beta$  úhel lomu, platí  $\alpha = \beta + 30^\circ$  a ze zákona lomu určíme  $\beta = 38,26^\circ$ . Potom boční posun  $PP'' = 0,127$  m. Doba průchodu vzroste asi o 16 %.
- 26.3 Přirovnáme-li dobu chodu paprsku procházejícího středem čočky a paprsku procházejícího okrajem čočky, dostaneme tloušťku čočky asi 20 mm.
- 26.4 Zobrazení je symetrické vzhledem k rovině zrcadla a postava stojící před zrcadlem se jakoby otočí o  $180^\circ$ .
- 26.5 Dochází k dvojitmu odrazu.
- 26.6 Princip se užívá např. při měření vzdáleností umělých družic nebo Měsíce odrazem laserového paprsku.
- 26.7 Dochází k úplnému vnitřnímu odrazu, žádný paprsek se neláme. Jev objevil J. Kepler a dnes se využívá např. v technice optických vláken.

## KAPITOLA 27

- 27.1 Všechny paprsky musí dorazit do ohniska za stejnou dobu jako osový paprsek. Umístíme-li počátek soustavy souřadnic do vrcholu plochy a osu  $x$  ve směru optické osy, dostaneme rovnici plochy v rovině  $x, y$  ve tvaru  $n^2 y^2 = 2Fn(n-1)x - (n^2 - 1)x^2$ .
- 27.2 Stěna kapiláry působí jako tlustá válcová čočka a vyjádření  $d'$  pomocí  $d, D$  a  $n$  je poměrně komplikované. Pro  $d \ll D$  platí přibližně  $d' = d/n$ .
- 27.3 Plocha má tvar elipsoidu s ohnisky  $P$  a  $P'$ .
- 27.4 Jde o Keplerův dalekohled, zvětšení  $Ff$ .
- 27.5 5 cm a 4,16 cm. V prvním případě je zvětšení nekonečné, ve druhém přibližně 6 násobné.
- 27.6 Použijeme-li dvakrát rovnici pro čočkové zobrazení, dostaneme vzdálenost fotografické desky od rozptylky přibližně 25 cm.
- 27.7 Vzdálenost obrazu od ohniska při pozorování Měsíce je 0,067 mm, při pozorování družice 80 mm.
- 27.8 Využijeme-li vlastností hlavních rovin (bod v hlavní rovině v určité vzdálenosti od osy se zobrazuje v druhé hlavní rovině v téže vzdálenosti od osy), dostaneme  $F = ff/(D - f - f)$ ,  $\Delta = fD/(D - f - f)$ ,  $\Delta' = fD/(D - f - f)$ .

## KAPITOLA 28

28.1 a)  $|re^{i\varphi/2} + re^{-i\varphi/2}| = 2r \cos(\varphi/2)$  b)  $\left| \sum_{n=0}^{N-1} re^{in\varphi} \right| = r \sin(N\varphi/2) / \sin(\varphi/2)$ .

## KAPITOLA 29

- 29.1 Poměr amplitud pole vyzařovaného oběma anténami je  $A_2/A_1 = \sqrt{2}$  a fázový rozdíl  $\pi \sin \vartheta$  (úhel  $\vartheta$  odečítáme od směru na východ). Pro uvedené tři směry  $I(0^\circ) = 5,83 I_0$ ,  $I(30^\circ) = 3 I_0$ ,  $I(90^\circ) = 0,17 I_0$ .
- 29.2 Zářiče jsou vzdáleny o  $\lambda/4$  a fázový rozdíl mezi nimi v závislosti na úhlu  $(\pi/2)(1 - \sin \vartheta)$ . Použijeme-li výsledek úlohy 28.1b) pro  $N = 4$ , dostaneme  $I = I_0 \sin^2 [\pi(1 - \sin \vartheta)] / \sin^2 [\pi(1 - \sin \vartheta)/4]$ .
- 29.3 Dopadá-li signál pod úhlem  $\vartheta$  ke spojnici obou antén, pak malá změna úhlu  $\Delta \vartheta$  vyvolá fázový posun  $\Delta \varphi = 2\pi d \sin \vartheta \cdot \Delta \vartheta / \lambda$ . Intenzita signálu na výstupu směšovače bude  $I = 4 A^2 \cos^2(\Delta \varphi/2)$ . Je-li  $\vartheta = 90^\circ$ , pak citlivost zařízení umožňuje měřit úhlovou polohu zdroje s přesností asi  $21''$ .
- 29.4 Rovnoměrný kruhový pohyb můžeme považovat za superpozici dvou kolmých harmonických oscilátorů. Podle rovnice 29.3 složky intenzity pole v rovině kolmé k paprsku  
 $E_x = -(qa\omega^2/4\pi\epsilon_0 rc^2) \cos(\omega t - \pi/2)$ ,  
 $E_y = -(qa\omega^2/4\pi\epsilon_0 rc^2) \sin(\pi/2 - \vartheta) \cos(\omega t)$ ,  $t' = t - r/c$ .  
 V rovině orbity je intenzita vyzařování úměrná  $\cos^2(\omega t' - \pi/2)$ . Na ose orbity intenzita nezávisí na čase a je rovna dvojnásobku střední intenzity vyzařování v rovině oběh.
- 29.5 Použijeme komplexní vztahy úlohy 28.1 a pro amplitudu ve směru  $\pi/2 - \vartheta$  k linii dipólů dostaneme  
 $A(\vartheta) = A_1 [1 + \exp(i\Delta\varphi)] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(in\Delta\varphi)$ , kde  $A_1$  je amplituda každého z dipólů,  $\Delta\varphi = \pi \sin \vartheta$  fázový posun mezi sousedními dipóly, a  $\Delta\varphi' = (\pi/2)(1 - \sin \vartheta)$  fázový posun mezi dipóly v první a druhé řadě. Výsledná intenzita  $I = 2 A_1^2 \sin^2 \Delta\varphi' \sin^2(N\Delta\varphi) / \sin^2 \Delta\varphi$ .
- 29.6 Označíme lineární hustotu elektronů  $\tau$ . Potom pro  $R \gg L$  máme  
 $E = -(q_e \tau L a \omega^2 / 4 \pi \epsilon_0 R c^2) \cos(\omega t' + \varphi_0) \sin \vartheta$ ,  $t' = t - R/c$ .
- 29.7 Intenzita vyzařování v daném směru  $I = \text{konst} \cdot \sin^2 \vartheta$ . Integrovaním přes kulovou plochu poloměru  $R$  dostaneme celkový vyzařovaný výkon  $P$  a určíme  $I = (3P/8\pi R^2) \sin^2 \vartheta$ . Intenzita vyzařování sondy přijímaná na povrchu Země pod úhlem  $45^\circ$  je  $I = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ W/m}^2$ .

## KAPITOLA 30

- 30.1 Již nepoužívaná délková jednotka angström  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ . Je-li  $n$  počet vrypů,  $m$  řád spektra a  $\lambda$  vlnová délka, bude rozlišení  $\Delta\lambda = \lambda/mn$ . Mřížka musí mít 1000 vrypů, a tedy délku 1,7 mm.
- 30.2 Rozlišovací mez lidského oka podle Rayleighova kritéria je  $\psi = 1,22 \lambda/D$ , kde  $\lambda$  je vlnová délka a  $D$  průměr zornice. Odtud zjistíme vzdálenost pozorovatele  $l = 8,3 \text{ km}$ . Není-li světlo monochromatické, je rozlišení znesnadněno.
- 30.3 a)  $h' = h F_2/F_1$ ;  
 b)  $\lambda = |\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1|/(N \cdot 10^3)$ ;  
 c) při konstantním  $\vartheta_1$  bude vzdálenost  $D = F_2 \Delta \vartheta_2$ , kde interval úhlů  $\Delta \vartheta_2$  odpovídá rozdílu úhlů obou spektrálních čar. Zderivujeme-li vztah  $\sin \vartheta_2 = \sin \vartheta_1 + m N \cdot 10^3 \lambda$  ( $m$  je řád spektra), určíme  $\Delta \vartheta_2$  a  $D = F_2 m N \cdot 10^3 \Delta \lambda / \cos \vartheta_2$ ;  
 d)  $w' = (w F_2 \cos \vartheta) / (F_1 \cos \vartheta_1)$ .
- 30.4 a) Z podmínky maxima  $2 \sin \vartheta = m N \cdot 10^3 \lambda$  ( $N$  je počet vrypů na 1 mm,  $m$  řád spektra) dostaneme  $\vartheta = 51,96^\circ$ ;  
 b)  $\lambda_1 = 375 \text{ nm}$  ( $m = 7$ ),  $\lambda_2 = 437,5 \text{ nm}$  ( $m = 6$ ),  $\lambda_3 = 656 \text{ nm}$  ( $m = 4$ );  
 c) Možno použít typ mřížky uvažovaný v úloze 30.6;  
 d)  $D = 11,2 \text{ mm}$  (viz úlohu 30.3c);  
 e)  $\lambda / (m N \cdot 10^3 \lambda) = 0,7 p_m$  ( $l = 25 \text{ cm}$  je délka mřížky).
- 30.5 Nejde o rozlišení dvou spektrálních čar, ale o stanovení maxima intenzity jedné čáry.
- 30.6 a) Dopadající svazek se bude odrážet podle zákona odrazu světla; maximum intenzity nastane, budou-li paprsky odražené od sousedních stupínek ve fázi. Směr, v němž mřížka blyští, bude dán úhlem  $\vartheta$ , pro nějž  $\vartheta = \vartheta_p$ ,  $d \sin \vartheta = m \lambda$  ( $m$  je řád spektra). Je-li  $\Delta \lambda$  interval vlnových délek viditelného světla, bude  $\Delta \vartheta = m \Delta \lambda / 2 d \cos \vartheta_p$ .
- 30.7 Amplituda vlny, která se v interferometru odrazila  $2n$  krát, je  $A_n = T A_0 [R^2 \exp(2\pi l D/\lambda)]^{2n}$ . Sečteme-li tyto amplitudy přes všechna  $n$ , dostaneme pro intenzitu procházejícího světla  $I = I_0 T^4 / |1 - R \exp(4\pi l D/\lambda)|^2$ .

## KAPITOLA 31

- 31.1 Podle rovnice (31.19) pro  $\omega_0 = \omega$   $n = 1 - 6,5 \cdot 10^{-7}$ .
- 31.2  $n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ .
- 31.3 b)  $I = I_0 \exp(-N q^2 z / \epsilon_0 m \gamma \omega)$ .
- 31.4 a) Použijeme vyjádření intenzity elektrického pole (29.1), hustotu toku energie  $S$  vystředujeme a zintegrujeme přes prostorový úhel. Výsledný zářivý výkon  $P = q^2 \omega^4 x_0^2 / 12 \pi \epsilon_0 c^3$ ;  
 b)  $\gamma_R = 2 \theta^2 \omega^2 / 3 m c^3$ ;  
 c)  $\Delta \lambda = 2 \pi c \gamma_R / \omega^2 = q^2 / 3 \pi m \epsilon_0 c^2 = 10^{-5} \text{ nm}$ .

## KAPITOLA 32

- 32.1 Zářivý výkon oscilátoru za jednu periodu,  $P_r = (2e^2/3mc^3 T) \int_0^T (d^3x/dt^3) (dx/dt) dt$ ,  $T = 2\pi/\omega$  (srv. úlohu 31.4).
- 32.2 Při průchodu jednotkovou plochou nekonečně malé tloušťky  $dx$  klesá intenzita světla o  $dI = -IN\sigma dx$ , kde  $N$  je koncentrace rozptylových center a  $\sigma$  jejich efektivní srážkový průřez rozptylu. Integrováním dokážeme výsledný vztah.
- 32.3 Použijeme rovnici 31.19.
- 32.4 Použijeme výsledky úloh 32.2 a 32.3; index lomu vzduchu  $n = 0,999708$ . Stačí odhadnout tloušťku atmosférické vrstvy, kterou projde světlo v prvním a druhém případě. Dostaneme  $l(90^\circ) = 0,78 I_0$ ,  $l(10^\circ) = 0,24 I_0$ .
- 32.5 Charakter a polarizaci rentgenového záření můžeme studovat při jeho průchodu vhodnými krystaly.
- 32.6 Za předpokladu, že hustota volných elektronů v uvažovaném prostoru je konstantní z podmínky oslabení slunečního světla rozptylem v K koróně dostaneme koncentraci elektronů  $N_0 = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ .
- 32.7 Tzv. impedance vakua  $377 \Omega$ .
- 32.8 Záleží na velikosti prachových částic. Jejich účinek bude největší, bude-li rozměr částic srovnatelný s vlnovou délkou světla. Pak můžeme brát účinný průřez přibližně  $\sigma = \pi \lambda^2$ . Je-li hmotnost částice rovna  $m$ , jejich koncentrace  $N$  a vzdálenost hvězdy  $r$ , platí  $N\sigma r = \ln 100$ . Odtud na jednotku plochy bude připadat  $3 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^2$  částic.
- 32.9 a) Použijeme výsledek úlohy 29.6, odkud  $E = -(q_0 N \chi E_1 \omega^2 / 4 \pi \epsilon_0 R c^2) \cos(\omega t + \varphi_0) \sin \vartheta$ . Zintegrujeme-li intenzitu rozptýleného záření  $S = \epsilon_0 c E^2$  a vystředujeme v čase, dostaneme rozptýlený zářivý výkon  $P_r = N^2 \chi^2 \omega^4 q_0^2 E_1^2 / 12 \pi \epsilon_0 c^3$ . Dělíme-li ho dopadajícím výkonem  $P_0 = \epsilon_0 c E_0^2 / 2$ , najdeme účinný průřez  $\sigma = N^2 \chi^2 \omega^4 q_0^2 E_1^2 / 6 \pi \epsilon_0 c^4 E_0^2$ .  
 b) Jako  $\cos^2 \vartheta$ .

### KAPITOLA 33

33.1  $I = I_0 \sin^2 2\theta / 8.$

33.2  $I = I_0 \left[ \frac{1}{2} (a^4 + \varepsilon^4) \cos^2 \theta + a^2 \varepsilon^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (a^2 + \varepsilon^2) a \varepsilon \sin 2\theta \right].$

33.3 Bez komentáře.

33.4 Viz úlohu 29.4. V prvním případě je záření kruhově polarizováno, v druhém lineárně polarizováno.

33.5 Z podmínky fázového posunu  $\Delta\varphi = 2\pi(n_e - n_o) d/\lambda = \pi/2$  dostaneme  $d = 1,67 \cdot 10^{-2}$  mm.

33.6 Student zná Fresnelovy vzorce a index lomu vody  $n = 1,67$ . Pak snadno vypočítá úbytek jasů Měsíce na 35 %. Pokud jde o přítelkyni, bude si muset poradit sám.

33.7 Odrazí se  $(n - 1)^2 / (n + 1)^2 = 17\%$  dopadajícího světla. Brewsterův úhel  $\theta_B = 67,5^\circ$ .

33.8 Fázový posun pro světlo o  $\lambda_1 = 410$  nm bude přibližně  $0,8 \pi$ , světlo bude ellipticky polarizováno.

33.9 Necháme na destičku dopadat světlo polarizované v rovině dopadu a budeme měnit úhel dopadu. Tak můžeme určit Brewsterův úhel a index lomu.

### KAPITOLA 34

34.1  $x = -R \cos \theta, z = A \theta + R \sin \theta$ ; bod opisuje zkrácenou cykloidu. Její rovnice je zadána parametricky. Dvojnásobným integrováním najdeme  $d^2x/dt^2 = (AR \cos \theta + R^2) c^2 / (A + R \cos \theta)^3$ .

34.2  $d^2x/dt^2 = -(1 - vR/xc) c^2 x/R^2 (1 - vx/cR)^3$ .

34.3 Použijeme výsledek předešlé úlohy, kde  $x = R$ . Poměr intenzit bude  $I_1/I_2 = \left(1 + \frac{v}{c}\right)^4 / \left(1 - \frac{v}{c}\right)^4$ .

34.4 Plyne z transformace úhlu, který vlnový vektor svírá s osou  $x$ , resp.  $x'$  v nehybné a pohybující se vztažné soustavě.

34.5 Energie pohybujícího se elektronu  $E = m_e c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , kde  $m_e c^2 = 0,511$  MeV. Odtud určíme rychlost  $v$ .

34.6 Ze vztahu pro Dopplerův jev (34.12)  $v = 500$  km/s.

34.7 600 nm.

34.8 Z aberace můžeme určit oběžnou rychlost Země  $v$ , odkud  $R = vT/2\pi, T = 1$  rok.

34.9 a) Obě síly jsou nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti od Slunce.

b) Označíme-li intenzitu slunečního záření na zemské dráze  $P$ , bude síla radlačního tlaku na částice  $F_r = P \sigma \pi R^2$ . Přirovnáme-li ji gravitační síle, dostaneme  $R = 3Pcr/4\rho M_s = 0,6 \mu\text{m}$  ( $\rho$  je hustota částic ledu,  $M_s$  hmotnost Slunce,  $r$  poloměr zemské dráhy).

### KAPITOLA 38

38.1 Podle (32.13) můžeme šifru spektrální čáry vyjádřit pomocí kvality  $Q$  jako  $\Delta\lambda = 2\pi c \Delta\omega / \omega^2 = \lambda/Q$  a dobu života atomu ve vybuzeném stavu  $\Delta T = Q/\omega$ . V kvantové fyzice energie a hybnost  $E = \hbar\omega, p_x = \hbar k_x$ , odkud  $\Delta E \Delta T = \hbar \Delta\omega \Delta T = \hbar$ . Použijeme-li vztahů  $\Delta x = c \Delta T, \Delta p_x = \hbar \Delta k_x$ , kde  $k_x = 2\pi/\lambda$ , dostaneme též  $\Delta x \Delta p_x = \hbar$ .

38.2 Kombinací konstant  $\hbar, m_e, e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$  (kde  $m_e$  a  $q_e$  je hmotnost a náboj elektronu) dostaneme veličinu  $r_B = \hbar^2/m_e e^2 = 5,29 \cdot 10^{-11}$  m, která má rozměr délky. Z relace neurčitosti  $\Delta E = \Delta p^2/2m_e = m_e e^4/2\hbar^2 = 13,6$  eV (odpovídá ionizačnímu potenciálu vodíku).

38.3 Podle (38.17) dostaneme 486,0 nm, 656,0 nm, 1880 nm.

### KAPITOLA 39

39.1  $TV^{\gamma-1} = \text{konst}, T\rho^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{konst}$

39.2 Považujeme-li proces huštění za adiabatický a použijeme-li vztahy z úlohy 39.1, dostaneme  $T_2 = T_1 (\rho_2/\rho_1)^{(\gamma-1)/\gamma} = 145^\circ\text{C}$ .

39.3 a) Plyn rozpíná se do vakua nekoná práci. Proto  $T = T_0, V = 2V_0, p = p_0/2$ .

b) Plyn koná práci, proces je adiabatický. Pro helium  $\gamma = 5/3$ . Jsou-li  $T_0, V_0, p_0$  parametry původního stavu, budou výsledné parametry  $T = 0,629 T_0, V = 2 V_0, p = 0,315 p_0$ .

39.4 a) Přírůstek tlaku při změně výšky o  $dh$  je roven tíze vrstvičky tekutiny jednotkového obsahu plochy  $dp = \rho g dh$ .

b) Pro atmosférický vzduch dostaneme za použití Boyleova-Mariotteova zákona  $p/\rho = \text{konst}$  známý barometrický vzorec  $p = p_0 \exp(-\text{konst} \cdot h)$ ; konstanta v exponentu  $\text{konst} = \mu g/RT = \rho_0 g/p_0$ , kde  $p_0$  a  $\rho_0$  jsou tlak a hustota vzduchu u povrchu Země.

39.5 a) Budeme řešit rovnici  $dT/dh = -[(\gamma-1)/\gamma] T_0 \rho_0 g/p_0$ , neboli  $dT/dh = -\mu g(\gamma-1)/R\gamma$  s výsledkem

$$T(h) = T_0 - [(\gamma-1)/\gamma] T_0 \rho_0 g h/p_0 = T_0 - \mu g(\gamma-1)h/R\gamma.$$

Použijeme-li pro vzduch molární hmotnost  $\mu = 0029$  kg/mol a  $\gamma = 1,40$ , dostaneme pokles teploty vzduchu na každý kilometr o 9,8 K/km. Skutečně naměřená hodnota v dolních vrstvách atmosféry je asi 6,5 K/km, což odpovídá  $\gamma = 1,25$ .



b) Je-li atmosféra v tepelné rovnováze ( $T = \text{konst}$ ), pak podmínku mechanické rovnováhy udává barometrický vzorec odvozený v úloze 39.4. Je-li v různých vrstvách atmosféry různá teplota, může dojít k nestabilitě, vertikálnímu proudění vzduchu. Máme určit, jak velký musí být gradient teploty, aby se rovnováha atmosféry narušila. Je možno uvažovat dva objemové elementy vzduchu jednotkové hmotnosti v různých výškách. Pokud si tyto elementy vymění místo a energie přitom poklesne, bude situace nestabilní (atmosféra se snaží zaujmout stav s nejnižší energií). Podmínku stability proto můžeme zapsat jako  $dU/dh + p dV/dh > 0$ , kde  $U = pV/(\gamma - 1)$  je vnitřní energie. Použijeme-li dále stavovou rovnici ideálního plynu a rovnici pro změnu tlaku s výškou z úlohy 39.4 a), dostaneme podmínku stability  $dT/dh \geq -\mu g(\gamma - 1)/R\gamma$ .

39.6  $W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1 \ln(V_1/V_2) \approx 10^5 \text{ J}$  (indexy 1 a 2 odpovídají počátečnímu a konečnému stavu).

39.7 Z rovnice adiabaty  $p_A = 3,17 p_0$ ,  $p_B = 2,64 p_0$ .

39.8 S uvážením zákona adiabaty po zintegrování  $W = - \int_{V_0}^{V_0/2} p dV = p_0 V_0 [2^{(\gamma-1)} - 1]/(\gamma - 1)$ . Poměr pro oba plyny  $W_A/W_B = 1,13$ .

39.9 V konečném stavu bude platit  $pV_1 = N_1 k T_1$ ,  $pV_2 = N_2 k T_2$ , kde  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $N_1 + N_2 = N$  celkový počet molekul kyslíku rovný  $N = p_0(V_1 + V_2)/kT_0$  (index 0 odpovídá počátečnímu stavu, indexy 1 a 2 konečnému stavu v obou nádobách). Z těchto vztahů dostaneme výsledný tlak  $p = p_0 T_2(V_1 + V_2)/T_0 [V_2 + (T_2/T_1)V_1] = 1,11 p_0$ , kde  $p_0$  je atmosférický tlak.

39.10 Podobně jako v úloze 39.9 určíme celkový počet molekul  $N = p_0 V_1/kT_0$ , kde  $p_0$  je atmosférický tlak a  $T_0$  původní termodynamická teplota. Je-li  $p_p = p_1 - p_2$  udaný přetlak, máme ve výsledném stavu  $(p_p + p_2)V_1 = N_1 k T$ ,  $p_2 V_2 = (N - N_1)kT$ . Odtud  $p_2 = V_1(p_0 T - p_p T_0)/(V_1 + V_2)T_0 = 0,262 p_0$ .

39.11 Z Avogadrova zákona určíme celkový počáteční počet molekul  $N_2O_4$  rovný  $N$ . Po odpaření a disociaci bude celkový počet molekul v nádobě  $pV/kT$ , z toho  $2\alpha N$  molekul  $NO_2$  a  $(1 - \alpha)N$  molekul  $N_2O_4$ , kde  $\alpha$  je stupeň disociace. Potom  $\alpha = pV/NkT - 1 = 13\%$ .

39.12 Teplo dodané při stálém tlaku  $Q = 5/2 R(T_2 - T_1)$ . Odtud  $T_2 = T_1 + 2Q/5R = 1740 \text{ K}$ .

Plyn vykonal práci  $W = p_1(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1) = 2Q/5 = 3,32 W \cdot h$  a jeho vnitřní energie je  $U = 3/2 RT_2 = 21700 \text{ J}$ .

## KAPITOLA 40

40.1 Jako přibližný odhad  $P = F\bar{v}_x$ , kde  $\bar{v}_x = \sqrt{3kT/m}$  je střední kvadratická rychlost molekul.

40.2 Leží-li stěna v rovině  $y, z$ , pak za jednotku času na ni budou dopadat částice, jejichž vzdálenost od stěny je číselně menší nebo rovna  $v_x$ , kde  $v_x$  je příslušná složka rychlosti. Protože částice mají Maxwellovo rozdělení, bude tento počet

$$n = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_0^{v_x} v_x \theta^{-mv_x^2/2kT} dv_x = n_0 \bar{v}/4, \text{ kde } n_0 \text{ je koncentrace částic a } \bar{v} \text{ střední aritmetická rychlost molekul rovná}$$

$$\bar{v} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \theta^{-mv^2/2kT} dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Přejdeme-li ke kinetické energii částic  $\epsilon$ , můžeme psát  $n = n_0 \frac{2\pi}{m^2} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \epsilon \theta^{-\epsilon/kT} d\epsilon$ .

Integrací v příslušných mezích snadno zjistíme, že počet dopadajících molekul s energiemi většími než  $3kT/2$  je  $0,55 n$  a většími než  $9kT/2$  je  $0,061 n$ .

40.3 a)  $C_V = 3R/2 = 12,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . b)  $C_V = 7R/2 = 29,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

40.4 Označíme-li  $J$  hustotu toku plynu, pak platí  $J = \rho v = \rho' v'$ ,  $F = AJ/(v - v')$ ,  $\left[ \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{v^2}{2} \right] J + \frac{Q}{A} = \left[ \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho'} + \frac{v'^2}{2} \right] J$ .

Označíme-li rychlost zvuku  $c_x = \sqrt{\gamma p/\rho}$ , řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$a) v' = \sqrt{\left( v + \frac{c_x^2}{(\gamma - 1)v} \right)^2 + \frac{2Q}{AJ} - \frac{c_x^2}{(\gamma - 1)v}}, \text{ b) } T' = Tv/v, \text{ c) } F = AJ(v - v')$$

40.5 Označíme-li  $\mu$  hmotnost paliva spotřebovávaného za sekundu a  $h$  jeho výhřevnost, pak účinnost vzduchového reaktivního motoru bude  $\eta = Fv/\mu h$ , kde tažná síla  $F$  byla odvozena v úloze 40.4. Dosadíme-li pro vzduch  $\gamma = 9/7$  a rychlost  $v = 800 \text{ km/h}$ , dostaneme účinnost  $\eta = 12\%$ . Při malých rychlostech závisí účinnost pouze na rychlosti vztahem  $\eta = (\gamma - 1)v^2/c_x^2$ .

40.6  $y_{\max} = 0,368$ .

40.7 Pro zemskou atmosféru je parametr  $h_x = kT/mg = 8,8 \text{ km}$ , v okolí Slunce  $h_s = 113 \text{ km}$ . Udává přibližně výšku izotermické atmosféry.

## KAPITOLA 41

41.1 a)  $T = 11600 \text{ K}$ , b)  $kT = 0,025 \text{ eV}$ , c)  $\lambda = 1,24 \mu\text{m}$ .

41.2 Jde o Stefanův-Boltzmannův a Wienův zákon.

- 41.3 Pro danou vlnovou délku určíme veličinu  $\hbar\omega/k = 4,64 \cdot 10^4 \text{ K}$ .  $\hbar$  je Planckova konstanta a  $k$  Boltzmannova konstanta. Pak z Planckova zákona uvedeného v úloze 41.2 najdeme  $I_1/I_2 = \exp\left[\frac{\hbar\omega}{k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = e^{11,6}$ .

#### KAPITOLA 42

- 42.1  $1 \text{ eV/atom} = 96 \text{ 520 J} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- 42.2 Bez komentáře.
- 42.3 Relativní chyba při určení hustoty  $\Delta n/n = (E/kT)(\Delta E/E)$  bude při  $E/kT = 2,4$  asi 7 %.
- 42.4 Při teplotách menších než  $300^\circ\text{C}$  se uplatní elektrony uvolněné atomy příměsí, při vyšší teplotě se uvolňují elektrony z atomů křemíku (energie odpovídající šířce zakázaného pásu je 1,2 eV).

#### KAPITOLA 43

- 43.1 Srovnajte řešení úlohy 1.1. Koncentrace molekul kyslíku  $n_0 = p/kT$ , odkud  $l = kT/(\pi p d^2) = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ . Střední doba života  $\tau = l/\bar{v} = l\sqrt{\pi m/8kT} = 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ .
- 43.2 Pravděpodobnost toho, že molekula projde bez srážky vzdálenost  $L$  je  $\exp(-L/l)$ . Z podmínky  $N \exp(-L/l) < 0,5$  dostaneme  $L > 56 l$ .
- 43.3 Na jednu molekulu připadá vnitřní energie  $kT(\gamma - 1)$  (pro jednoatomový plyn  $\gamma = 5/3$ , pro dvouatomový plyn  $\gamma = 7/5$  a pro víceatomový plyn  $\gamma = 4/3$ ). Předpokládáme, že molekuly přilétají k ploše jednotkového obsahu nastavené kolmo ke gradientu teploty ze vzdálenosti  $l$  rovné střední volné dráze. Po vystředování podle směru dostaneme hustotu toku energie  $S = n_0 \bar{v} k [T(-l) - T(+l)]/6 (\gamma - 1) = -[n_0 \bar{v} k l / 3 (\gamma - 1)] (dT/dx) = -\chi (dT/dx)$ , takže  $\chi = n_0 \bar{v} k l / 3 (\gamma - 1) = \rho \bar{v} l c_v / 3$ , kde  $\rho$  je hustota plynu a  $c_v$  je měrná tepelná kapacita plynu při stálém objemu. Koeficient  $1/3$  jsme dostali odhadem při středování směru rychlostí a autoři úlohy jej nepovažují za podstatný.
- 43.4 Postup analogický použitému při řešení úlohy 43.3 dá  $\eta = n_0 \bar{v} m l / 3 = \rho \bar{v} l / 3$ .
- 43.5 Postupem použitým při řešení úlohy 43.3 dostaneme pro hustotu toku energie  $S = n_0 \bar{v} k \Delta T / 6 (\gamma - 1)$  a pro hustotu toku hybnosti  $G = n_0 \bar{v} m \Delta v / 6$ .
- 43.6 Pohyblivost iontu definujeme vztahem  $\mu = l/m\bar{v}$ , kde  $m$  je hmotnost iontu a  $\bar{v}$  je stejné v obou plynech. Střední volná dráha je nepřímo úměrná koncentraci plynu a pravděpodobnosti srážky (srážkovému průřezu). Ve směsi plynů se tedy budou sčítat převrácené hodnoty střední volné dráhy a výsledná pohyblivost  $\mu = \mu_A \mu_B / (\mu_A + \mu_B)$ .

#### KAPITOLA 44

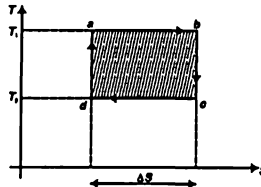
- 44.1 Určíme dílčí změny entropie podél jednotlivých částí cyklu

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_{DC} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{dQ}{T} = \frac{kN}{\gamma - 1} \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = \frac{kN}{\gamma - 1} \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{kN}{\gamma - 1} \ln \frac{p_B}{p_A}, \text{ podobně}$$

$$\Delta S_{BC} = \Delta S_{AD} = \frac{kN\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_C}{T_B} = \frac{kN\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{V_C}{V_B}, \text{ a zjistíme, že } \Delta S_{ABC} = \Delta S_{ADC} = \frac{kN}{\gamma - 1} \ln (p_C V_C^\gamma / p_A V_A^\gamma) = 30,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- 44.2 Použijeme výsledek úlohy 39.1 a určíme

$$\Delta S = \int_a^b \frac{2Q_1}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_a^b p dV = Nk \ln \frac{V_b}{V_a} = Nk \ln \left[ \frac{V_b}{V_a} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma - 1)} \right]$$



- 44.3 66,3 %.

- 44.4 a)  $V_b = 8,8 \text{ l}$ ,  $V_a = 12,3 \text{ l}$ , b)  $Q_{a,b} = RT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} = 1270 \text{ J}$ , c)  $Q_{c,d} = -(T_2/T_1) Q_{a,b} = -952 \text{ J}$ , d) 25 %, e)  $0,11 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

- 44.5 Podobně jako v úloze 44.2 je  $\Delta S = Nk \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{\mu} R \ln \frac{p_1}{p_2}$ , kde  $M$  je hmotnost plynu a  $\mu$  jeho molární hmotnost. Potom  $\Delta S/M = 11 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

#### KAPITOLA 45

- 45.1 Je-li  $R$  poloměr Slunce,  $\alpha$  jeho úhlový průměr viditelný ze Země a  $R_s$  vzdálenost Slunce, pak můžeme vyjádřit  $R = R_s \alpha / 2$ . Vyzařuje-li Slunce s teplotou  $T$ , a na měděné kouli se díky dobré tepelné vodivosti ustaví všude teplota  $T'$ , bude v tepelné rovnováze  $\alpha^2 T^4 / 4 = 4 T'^4$ , takže  $T' = T \sqrt{\alpha} / 2 = 266 \text{ K}$ . Teplota koule není příliš velká a nezávisí na jejím poloměru.
- 45.2  $T = (K/\sigma)^{1/4} = 396 \text{ K}$  ( $K$  je sluneční konstanta,  $\sigma$  Stefanova-Boltzmannova konstanta  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ).
- 45.3 Z bilance vyzařované energie najdeme teplotu obálky  $T_0 = (r^2/2R^2)^{1/4} T$ , odkud poměr intenzity vyzařované systémem s obálkou a bez ní je  $R^2 T_0^4 / r^2 T^4 = 1/2$ .

- 45.4 Označíme-li  $n$  koncentraci částic v centru Slunce a uvážíme-li, že hustota sluneční látky je určena převážně protony, dostaneme pro tlak plynu  $p = nkT = 2 \rho RT / \mu = 1,7 \cdot 10^{16}$  Pa. ( $\mu$  je molární hmotnost jednoatomového vodíku). Ve srovnání s tím je radiální tlak  $p_r = 4 \sigma T^4 / 3c = 7,2 \cdot 10^{14}$  Pa.
- 45.5 Podle Clausiovy-Clapeyronovy rovnice se tlak soustavy, v níž jsou dvě fáze (např. voda a pára) v rovnováze mění s teplotou podle vztahu  $dp/dT = L / (T\Delta v)$ , kde  $L$  je měřené latentní výparné teplo a  $\Delta v$  měrný objem (v daném případě páry, neboť měrný objem vody lze zanedbat). Tlak je určen atmosférickým tlakem vzduchu, pro nějž  $dp/dz = -\rho g$ . Změna teploty varu s výškou bude  $dT/dz = (dT/dp)(dp/dz) = -T\Delta v \rho g / L = 3,2$  °C/km.
- 45.6 Zahříváme-li plyn při stálém tlaku a dodáme mu teplo  $\Delta Q$ , bude  $\Delta Q = C_p \Delta T = \Delta U + p\Delta V = C_v \Delta T + R\Delta T$ .
- 45.7 Použijeme Clausiovy-Clapeyronovu rovnici; z tabulek závislosti tlaku sytých vodních par na teplotě najdeme  $dp/dT = 50$  Pa · K<sup>-1</sup>. Odtud  $L = \Delta v T (dp/dT) = 2,8 \cdot 10^6$  J · kg<sup>-1</sup>.
- 45.8 Dopadající a vyzařovaný tok zářivé energie v případě absolutně černého tělesa je  $I = \sigma T^4$ . Jestliže těleso pohlcuje tok  $A_I$  a odráží  $(1 - A_I)$ , bude vyzařovat tok  $A_I = A\sigma T^4$ .
- 45.9 a) Plyne z Clausiovy-Clapeyronovy rovnice  $dp/dT = L / T(\Delta v_1 - \Delta v_2)$ , kde  $L > 0$  je latentní teplo tání,  $\Delta v_1$  a  $\Delta v_2$  měrné objemy kapaliny a pevné látky. Pro vodu  $\Delta v_2 > \Delta v_1$ .
- b) Integrací Clausiovy-Clapeyronovy rovnice dostaneme  $T = T_0 \exp[p(\Delta v_1 - \Delta v_2) / L]$ . Odhadneme-li tlak brusle na led jako  $10^6$  Pa,  $\Delta v_2 - \Delta v_1 = 8 \cdot 10^{-5}$  m<sup>3</sup> · kg<sup>-1</sup>,  $L = 3,35 \cdot 10^5$  J · kg<sup>-1</sup> a určíme konstantu  $T_0$  za normálního tlaku a teploty, zjistíme, že exponenciální funkci můžeme aproximovat rozvojem do mocninné řady. Hledaná nejnižší teplota leží jen nepatrně pod Celsiovou nulou ( $= -0,06$  °C). Za mrazivého počasí nebude led pod bruslí tát.

## KAPITOLA 47

- 47.1 Rychlost zvuku  $c_x = \sqrt{\gamma p / \rho} = \sqrt{\gamma RT / M} = \sqrt{\gamma T / \mu}$ , kde  $\mu$  je molární hmotnost plynu. Pro hélium  $\gamma = 5/3$ , pro vodík  $\gamma = 7/5$ , takže  $c_x(\text{He}) / c_x(\text{H}_2) = 0,78$ .
- 47.2 Výška tónu je úměrná  $\sqrt{T}$ ; hledaná teplota je 99 °C.
- 47.3 Vzrostla by v poměru rychlostí zvuku, tj. 2,9krát (srovnej úlohu 47.1).
- 47.4 a) Označíme  $\rho'$  a  $p'$  proměnnou část hustoty a tlaku ve zvukové vlně. Potom  $\rho' = p' / c_x^2 \leq 10^{-5}$  kg · m<sup>-3</sup>.
- b) Relativní změna hustoty při výchylce  $\chi$   $\rho' / \rho_0 = -\partial \chi / \partial x$ , takže  $\chi_{\text{max}} = \rho'_{\text{max}} c_x / \rho_0 \omega = 2,5 \cdot 10^{-7}$  m je srovnatelné se střední volnou dráhou.
- c)  $I = (1/2) \rho_0 \omega^2 \chi_{\text{max}}^2 c_x = 5,4 \cdot 10^{-4}$  W · m<sup>-2</sup>.
- 47.5 Natahujeme-li gumový pásek, bude frekvence jeho kmitů úměrná  $(1/L) \sqrt{T/r}$ , kde  $L$  je délka,  $T$  napěťová síla a  $r$  lineární hustota. Protože  $T$  je úměrné  $L$ , a  $r$  nepřímo úměrné  $L$ , frekvence na  $L$  nezávisí. U struny se však mění pouze  $T$ .
- 47.6  $\partial^2 y / \partial x^2 = (r/T) \partial^2 y / \partial t^2$ ,  $v = \sqrt{T/r}$ .
- 47.7 Bez komentáře.

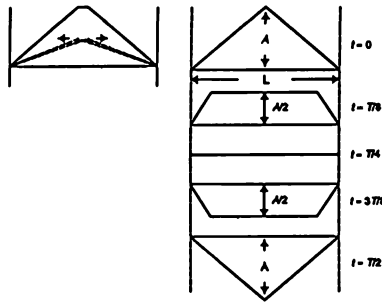
## KAPITOLA 48

- 48.1 Platí  $v_x = \sqrt{g\lambda / 2\pi} = \sqrt{g/k}$ ,  $\omega = v_x k = \sqrt{gk}$ ,  $v_y = \partial \omega / \partial k = v_x / 2$ . Pro  $\lambda = 1000$  m,  $v_x = 39,5$  m · s<sup>-1</sup>.
- 48.2  $v_y = (\lambda / 4\pi) (12 \pi^2 \sigma / \rho \lambda^2 + g) / \sqrt{(2\pi \sigma / \lambda \rho) + (\lambda g / 2\pi)}$ .
- 48.3 Podle vztahu z úlohy 48.2 dostaneme  $v_x = 24,4$  cm · s<sup>-1</sup> a  $v_y = 17,8$  cm · s<sup>-1</sup>.
- 48.4 Z podmínky minima funkce  $v_x(\lambda)$ ,  $\lambda = 1,5$  cm,  $f = 14,4$  Hz.
- 48.5 Podle Dopplerova vztahu pro změnu frekvence při vzájemném pohybu zdroje vlnění a pozorovatele rychlostí vuslyší pozorovatel zvuk o frekvenci  $f = f_0 (1 \pm v/c)$ . Strojvůdce uslyší zvuk  $f_0 = 340$  Hz a ozvěnu 350 Hz, tedy rázy o frekvenci 10 Hz. Člověk stojící na zemi uslyší zvuk  $f = 335$  Hz a ozvěnu 345 Hz, tedy opět rázy o téže frekvenci.

## KAPITOLA 49

- 49.1 Označíme-li též  $k/m_1 = \omega_1^2$ ,  $k/m_2 = \omega_2^2$ , máme  $\ddot{x} + (\omega_0^2 + \omega_1^2)x - \omega_1^2 y = 0$ ,  $\ddot{y} + (\omega_0^2 + \omega_2^2)y - \omega_2^2 x = 0$ .
- 49.2 Pro normální módy je  $\Omega_1 = \omega_0$ ,  $\Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2}$ , pro  $\Omega_1$  je  $A = B$ , pro  $\Omega_2$  je  $A = -(m_2/m_1)B$ .
- 49.3 Dosadíme do rovnice  $\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ , kde  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  je Laplaceův operátor.
- 49.4 Nejmenší frekvence odpovídá  $l = m = n = 1$  a je rovna  $\omega_0 = 7\pi / 6a$ . Nejnižší další frekvence dostaneme násobením  $\omega_0$  1,12; 1,25; 1,29; 1,34; 1,48; 1,57; 1,65; 1,79; 1,86; 1,93 ...

- 49.5 Počáteční průběh struny si můžeme představit jako superpozici dvou stejných trojúhelníkových průběhů poloviční výšky, které se začnou pohybovat opačnými směry. Na koncích struny se odrážejí tak, že jejich výchylka mění znamení.



## KAPITOLA 50

- 50.1 a) Do uvedené řady dosadíme  $x = \pi/2$ , přičemž  $f(\pi/2) = 1$ .  
 b) Vypočítáme integrál druhé mocniny uvedené řady a položíme  $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 2\pi$ .  
 c) Hledaný součet nekonečné řady vyjádříme jako  $\Sigma = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right) = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \frac{1}{4} \Sigma$ .  
 Z této rovnice vypočítáme  $\Sigma$  a použijeme výsledek b).
- 50.2  $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$ .
- 50.3 a) Vypočítáme integrál druhé mocniny uvedené řady a položíme  $\int_0^{2\pi} g^2(x) dx = 2\pi/3$ .  
 b) Hledaný součet nekonečné řady vyjádříme jako  $\Sigma = \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) + \frac{1}{2^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) = \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) + \frac{1}{2^4} \Sigma$ .  
 Z této rovnice vypočítáme  $\Sigma$  a použijeme výsledek a).
- 50.4 Bez komentáře.
- 50.5  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$ .
- 50.6 a)  $\bar{V} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} V_0 \sin \omega t dt = \frac{2V_0}{\pi}$ . b)  $a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T V(t) \cos 2\omega t dt = \frac{2V_0}{T} \int_0^T |\sin \omega t| \cos 2\omega t dt = \frac{8V_0}{3\pi}$ .
- 50.7 a) Je-li  $V_{\text{vt}} = V_0 \sin \omega t$ , dostaneme  $V_{\text{vvt}} = (V_0 + 3eV_0^2/4) \sin \omega t - (eV_0^3/4) \sin 3\omega t$ .  
 b) Je-li  $V_{\text{vt}} = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$ , dostaneme  $V_{\text{vvt}} = (A + 3eA^3/4 + 3eAB^2/2) \sin \omega_1 t + (B + 3eB^3/4 + 3eA^2B/2) \sin \omega_2 t - (eA^3/4) \sin 3\omega_1 t - (3eA^2B/4) \sin(2\omega_1 + \omega_2)t + (3eA^2B/4) \sin(2\omega_1 - \omega_2)t - (3eAB^2/4) \sin(\omega_1 + 2\omega_2)t - (3eAB^2/4) \sin(\omega_1 - 2\omega_2)t - (eB^3/4) \sin 3\omega_2 t$ .

## REJSTŘÍK VYBRANÝCH POJMŮ A JMEN

- A**  
aberace 366, 463  
absorpce 419  
Adams 98  
amplitudová modulace 650  
Anderson 710  
anomální lom 446  
antičástice 710  
Aristotelés 64  
atomová hypotéza 17  
baryon 37
- B**  
Becquerel 373  
Boehm 709  
Bohr 577  
Bohrův poloměr 517  
Boltzmann 555  
Boltzmannův zákon 542  
Born 497  
Brewster 442  
Brewsterův úhel 442  
Briggs 301  
Brown 554  
Brownův pohyb 25, 554  
brzdné záření 458
- C**  
Carnot 51, 597  
Cavendish 102  
celková energie 235  
celková hybnost 141  
cívka 315  
Clausiova-Clapeyronova rovnice 621  
Clausius 597  
Coriolis 268  
Coriolisova síla 268  
Comuova spirála 403
- Č**  
Čerenkov 687  
čtyřvektor 461
- D**  
Dedekind 298  
Dicke 105  
difrakce 391  
difrakční mřížka 395  
difuze 589
- dípolový zářič 374  
Dirac 710  
disperze 416  
disperzní vztah 417  
Dopplerův jev 459  
dvojlom 439, 446
- E**  
Einstein 32, 90, 93, 105, 210, 235, 554, 563, 577, 592  
elektrická energie 58  
elektromagnetická vlna 31  
elektromagnetické pole 31  
elektromagnetické záření 344, 371  
elektron 30  
entalpie 618  
entropie 608  
Eötvös 105  
Euklidés 29, 70
- F**  
fázová rychlost 653  
Fermat 347, 353  
Fermatův princip 347  
Fermi 75  
foton 34, 577  
Fourier 677  
Fourierova řada 679  
Fourierovy transformace 336  
Frank 687  
Fresnelovy zákony 446
- G**  
Galileo 64, 94, 122, 702  
Gell-Mann 35  
geometrická optika 357  
gravitace 29  
gravitační energie 54  
gravitační zákon 92  
gravitační zrychlení 126  
Greenovy funkce 336  
grupová rychlost 654
- H**  
Haidingerův jev 489  
Hamilton 358  
Heisenberg 497, 505  
Helmholtz 475  
Heron Alexandrijský 348
- hlavní rovina 365  
hmotnost 123, 231  
hmotný střed 250, 259  
Huygens 345, 446  
hybnost 123, 231
- CH**  
chemická energie 58  
chemická reakce 23  
chromatická aberace 366
- I**  
impedance 317  
impedance vakua 426  
index lomu 353  
indukčnost 315  
indukovaná emise 577  
intenzita elektrického pole 177, 180  
intenzita gravitačního pole 178  
interference 376, 388  
interval 240
- J**  
jaderná energie 58  
Jeans 551, 561  
Johnsonův šum 556  
Justová 476
- K**  
kapacita 315  
Kepler 93, 94  
Keplerovy zákony 94  
Kerrův článěk 441  
Kerrův jev 441  
kinetická energie 57, 185  
Kirchhoffovy zákony 342  
klasický poloměr elektronu 429  
kondenzátor 315  
kvantová elektrodynamika 34, 373  
kvantová mechanika 32
- L**  
Laplace 643  
laser 431, 579  
Lee 709  
Leibnitz 112  
Leonardo da Vinci 482  
lepton 37  
Leverrier 98

- Lorentz 213, 215  
 Lorentzova transformace 460  
 Lorentzovy transformace 213, 237
- M**  
 magnetická indukce 180  
 magnetické pole 179  
 maser 579  
 Maxwell 88, 370, 373, 550, 630  
 Mayer 41  
 mezon 37  
 Michelson 213  
 Miller, W. C. 469  
 Minkowski, R. 466  
 mlon 35  
 molekula 17, 22  
 moment hybnosti 254  
 moment setrvačnosti 256  
 moment síly 252, 276  
 Morley 213
- N**  
 napětí 207  
 Nemst 610  
 neutron 30  
 Newton 94, 95, 103, 105, 112, 122, 211, 497, 643  
 Nishijima 35  
 nutace 281
- O**  
 odpor 315  
 Ohmův zákon 315, 339  
 ohnisková vzdálenost 360  
 optická aktivita 443
- P**  
 Pappova věta 263, 264  
 paradox dvojčat 227  
 paraxiální paprsky 359  
 Pasteur 49  
 perioda 382  
 pion 35  
 Planck 552, 561  
 Poincaré 213, 216, 225  
 polarizace 438  
 pole 206  
 potenciál 207  
 potenciální energie 54, 185, 200  
 pozitron 34  
 práce 188, 198
- precese 279  
 princip neurčitosti 90, 505  
 princip reciprocity 350  
 princip relativity 142  
 princip setrvačnosti 122  
 princip superpozice 178  
 princip virtuální práce 56  
 prostoročas 238  
 proton 30  
 Ptolemaios 346  
 Purkyňův efekt 469  
 Pythagoras 672
- R**  
 radlační odpor 425  
 radlační tlak 464  
 radiační útlum 428  
 rameno síly 253  
 Rayleighovo kritérium 398  
 Rayleighův zákon 560  
 rezistor 315  
 rezonance 37  
 Ritzův kombinační princip 519  
 Roemer 98  
 rovnice čočky 365  
 rozdělení molekul podle rychlosti 544  
 rozlišovací schopnost 367  
 Rushton 478  
 rychlost 124, 161  
 Rydbergova energie 517
- S**  
 Sahova ionizační rovnice 574  
 Schrödinger 473, 497  
 setrvačná síla 180  
 sférická aberace 366  
 Shannon 597  
 síla 123, 126, 162  
 slapové pohyby 97  
 Smoluchovskí 563  
 smykové tření 172  
 Snell 346  
 Snellův zákon 347  
 spontánní emise 577  
 srážky 142  
 statistická mechanika 40  
 Stefan-Boltzmannova konstanta 622  
 Stevinus 54  
 stupeň volnosti 536  
 symetrie fyzikálních zákonů 153  
 synchrotronní záření 456
- Š**  
 šířka spektrálních čar 430
- T**  
 Tamm 687  
 tepelná energie 57  
 tepelná vodivost 592  
 teplota 530  
 těžiště 261  
 Thomsonův rozptyl 433  
 tlak 525  
 tuhé těleso 250  
 Tycho Brahe 93
- U**  
 účinný průřez 74  
 účinný průřez rozptylu 433  
 úhlová frekvence 382
- V**  
 vazba 199  
 vlnová délka 382  
 vlnová rovnice 641  
 vlnová zóna 383  
 vlnové číslo 382  
 vnitřní energie 527  
 výkon 187
- W**  
 Wapstr 709  
 Wu 709
- Y**  
 Yang 709  
 Young 475  
 Yukawa 35
- Z**  
 zákon zachování baryonů 59  
 zákon zachování momentu hybnosti 58, 255, 277  
 zákon zachování hybnosti 58, 141  
 zákon zachování energie 41, 50  
 zákon zachování leptonů 59  
 zákon zachování náboje 59  
 záření černého tělesa 560  
 zářivá energie 58  
 zrychlení 124, 162



# FEYNMANOVY FEYNMANOVY FEYNMANOVY



Kompletní vydání světově  
proslulého kurzu fyziky  
Richarda P. Feynmana.

- |   |   |
|---|---|
| 1 ATOMY V POHYBU                          | 27 GEOMETRICKÁ OPTIKA                                       |
| 2 ZÁKLADY FYZIKY                          | 28 ELEKTROMAGNETICKÉ<br>ZÁŘENÍ                              |
| 3 VZTAH FYZIKY K JINÝM VĚDÁM              | 29 INTERFERENCE   |
| 4 ZACHOVÁNÍ ENERGIE                       | 30 DIFRAKCE   |
| 5 ČAS A VZDÁLENOST                        | 31 PŮVOD INDEXU LOMU  |
| 6 PRAVDĚPODOBNOST                         | 32 RADIČNÍ ÚTLUM,<br>ROZPTYL SVĚTLA                         |
| 7 TEORIE GRAVITACE                        | 33 POLARIZACE   |
| 8 POHYB                                   | 34 RELATIVISTICKÉ JEVY A ZÁŘENÍ                             |
| 9 NEWTONOVY ZÁKONY DYNAMIKY               | 35 BAREVNÉ VIDĚNÍ   |
| 10 ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI                     | 36 MECHANIZMUS VIDĚNÍ                                       |
| 11 VEKTORY                                | 37 KVANTOVÉ CHOVÁNÍ   |
| 12 CHARAKTERISTIKY SÍLY                   | 38 SOUVISLOST MEZI VLNOVÝM<br>A KORPUSKULÁRNÍM<br>HLEDISKEM |
| 13 PRÁCE A POTENCIÁLNÍ ENERGIE            | 39 KINETICKÁ TEORIE PLYNŮ                                   |
| 14 PRÁCE A POTENCIÁLNÍ ENERGIE<br>(ZÁVĚR) | 40 PRINCIPY STATISTICKÉ MECHANIKY                           |
| 15 SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY            | 41 BROWNŮV POHYB  |
| 16 RELATIVISTICKÁ ENERGIE<br>A HYBNOST    | 42 APLIKACE KINETICKÉ TEORIE                                |
| 17 PROSTOROČAS                            | 43 DIFUZE   |
| 18 DVOJROZMĚRNÁ ROTACE                    | 44 ZÁKONY TERMODYNAMIKY                                     |
| 19 HMOTNÝ STŘED, MOMENT<br>SETRVAČNOSTI   | 45 ILUSTRACE TERMODYNAMIKY                                  |
| 20 ROTACE V PROSTORU                      | 46 ROHATKA SE ZÁPADKOU                                      |
| 21 HARMONICKÝ OSCILÁTOR                   | 47 ZVUK, VLNOVÁ ROVNICE                                     |
| 22 ALGEBRA                                | 48 RÁZY   |
| 23 REZONANCE                              | 49 MODY   |
| 24 PŘECHODOVÉ JEVY                        | 50 HARMONICKÉ KMITY   |
| 25 LINEÁRNÍ SYSTÉMY, PŘEHLED              | 51 VLNY   |
| 26 OPTIKA: PRINCIP<br>NEJKRATŠÍHO ČASU    | 52 SYMETRIE FYZIKÁLNÍCH ZÁKONŮ                              |

ISBN 80-7200-405-0



9 788072 004058